Природа математики, космология и структура реальности

А.Д. Панов

В статье рассматриваются критерии объективной реальности особого сорта, которые характеризуются как достаточные и операционально определенные. Затем эти критерии используются для анализа природы математических истин и аргументируется точка зрения, согласно которой есть все основания рассматривать мир математических форм как объективно существующий, но не являющийся лишь продуктом культуры. Объективное существование мира математических форм соотнесено с непротиворечивостью математики. Далее показано, что природа математики не может рассматриваться как чисто идеальная, но она находится в прямой зависимости от физики: именно, от возможности существования классического приближения в квантовой теории и от причинной структуры пространства-времени. Показано, что связь математики с культурой имеет много общего с зависимостью математики от физики. В этом контексте рассматривается также вопрос о том, является ли мир математики уникальным, внепространственным и вневременным, или должна рассматриваться его зависимость от области пространства-времени, для которой он определен. Здесь устанавливаются аналогии с методологическими проблемами космологии. Наконец, затрагивается вопрос о том, что первично, информация и математика, или физика?

Введение. О целях и методе.

В статье обсуждается природа математики. Один из основных защищаемых тезисов будет состоять в том, что мир математических форм обладает объективным самостоятельным существованием, не принадлежа при этом ни миру материи, ни миру духа, но представляя третий сорт бытия, не сводимый к первым двум. При этом мы будем настаивать на том, что данный тезис не является спекулятивным философским утверждением, а имеет структуру научной истины в обычном понимании. Именно, он является утверждением, открытым для контроля опытом и допускающим фальсификацию. Другой обсуждаемой проблемой будет вопрос о том, как именно протекает это объективное существование мира математики. Этот вопрос формулируется как вопрос о физических основаниях математики. Под физическими основаниями математики подразумеваются физические предпосылки, которые делают существование мира математики возможным и осмысленным.

Несколько слов надо сказать об используемой методике. В обсуждении мы будем избегать спекулятивных утверждений. Существенным исключением будут начальные методологические принципы, которые имеют характер философской спекуляции просто по необходимости, как и любые исходные принципы. Все другие случаи, когда утверждения будут иметь спекулятивный характер, будут явно оговариваться.

В первом разделе статьи обозначены довольно узкие рамки обсуждения. Соответственно, смежные вопросы в статье затрагиваются строго при необходимости, это же касается и цитирования литературы.

В процессе обсуждения будет показано, что анализ в некоторых случаях выводит к границам применимости научного метода в его обычном понимании, основанном, в частности, на принципе наблюдаемости. Похожая ситуация имеет место в методологии современной космологии, что подробно обсуждалось нами в статье[1]. Так как мы неоднократно будем обращаться к этой статье, то будем ссылаться на нее ниже как на *Методологию космологии* (всегда курсивом).

---

[1] А.Д. Панов. Методологические проблемы космологии и квантовой гравитации. В кн.: Современная космология: философские горизонты. Под ред. В.В. Казютинского. М.: "Канон+" РООИ "Реабилитация", 2011, С.185-215.

1. Достаточные операциональные критерии объективной реальности.

Что означает, что нечто реально «само по себе»? Как учит диалектический материализм, и с чем, видимо, трудно не согласиться здравому смыслу ученого, занятого практической научной работой, объективно реальным является то, что существует вне и независимо от нашего сознания[2]. Но это определение имеет несколько декларативный характер. Как практически проверить факт такого независимого существования? Можно ли формулировке придать ясный операциональный смысл? Каковы критерии реальности, которые можно было бы применить на практике в сложных и сомнительных случаях?

Не претендуя на полноту исследования вопроса[3], мы сосредоточимся лишь на одном *достаточном* критерии реальности объектов. Имеется в виду следующий критерий:

Что объективно познаваемо, то объективно существует. (R)

Надо отметить, что этот принцип, представляя лишь достаточный признак объективной реальности, не утверждает, что он является и необходимым. Если некоторый объект объективно познаваем, то он существует сам по себе, но обратное не утверждается. То есть принцип не исключает объективное существование объективно непознаваемых вещей, он просто игнорирует такую возможность. Хотя исключить существование реальности, недоступной для объективного познания, невозможно, и нам придется касаться этого вопроса, но входить в детали мы не будем, хотя здесь возникает множество проблем: что значит такое существование для нас и т. д. Не будем также настаивать, что этот принцип (R) исчерпывает все возможные признаки объективной реальности. Для наших целей этого критерия будет достаточно.

Введенный принцип требует некоторых разъяснений и уточнений, которые будут даны ниже. Сначала, однако полезно привести пару практических примеров его использования.

Естественно начать с примера из физики. Почему считается, что реален электрон? Мы ведь не можем его увидеть или пощупать. Мы считаем, что электрон реален, так как его свойства могут изучаться объективными научными методами, поэтому эти свойства являются объективно познаваемыми. Заряд электрона может быть измерен разными способами: в наблюдениях движения заряженной капли под действием электрического поля в вязкой жидкости, в опытах по электролизу и др. Разные исследователи с использованием разных методов придут к одному результату, поэтому мы и считаем, что заряд электрона объективно имеет определенное значение сам по себе, независимо от того, кто и как его измеряет. Требуется только, чтобы процедура была признана корректной с научной точки зрения. Могут быть объективно исследованы и другие характеристики электрона: масса, спин и т. д., что позволяет считать, что реально существует и носитель всех этих свойств – частица, под названием электрон.

Теперь пример из гуманитарных наук. Рассмотрим некоторое историческое событие. Оно рассматривается как реально имевшее место, если несколько независимых источников описывают его согласованным образом, имеются артефакты, подтверждающие это событие, все это сходится с датировками, получаемыми какими-то объективными методами вроде

---

[2] Диалектический материализм настаивает также на том, что объективная реальность должна быть дана нам в ощущениях, но этот аспект определения кажется мне очень мутным. Непонятно, что следует считать ощущением. Даже мысль для мыслящего ее человека является некоторым ощущением. Я, по крайней мере, с полной уверенностью могу это утверждать в отношении себя лично. В то же время можно ли считать изучение компьютерной распечатки с информацией о далеком квазаре 25-й звездной величины «ощущением» этого квазара, не очень понятно.

[3] Современный статус таких понятий, как реализм, материализм, объективная реальность в приложении к физике и, особенно, к космологии детально обсуждается в статье: В.В. Казютинский. Космология, теория, реальность. В кн.: Современная космология: философские горизонты. Под ред. В.В. Казютинского. М.: «Канон+» РООИ «Реабилитация, 2011, С. 8-54

радиоуглеродного анализа и т. д. Иными словами, историческое событие считается реальным, если относительно него удается получить согласованную информацию, которая имеет одинаковый смысл для любого непредвзятого исследователя. Так строится наука история. Этот пример показывает, что сфера применимости критерия реальности (R), в принципе, очень широка, но, в то же время, в его использовании имеются многочисленные тонкости, зависящие от области применения, и при его использовании могут возникнуть трудности. Так, исторические документы и другие свидетельства часто фальсифицируются правящими элитами из конъюнктурных политических соображений, а история из-за этого нередко превращается из науки в орудие подавления инакомыслия. Впрочем, история в этом смысле вовсе не является исключением. Применение научного метода и в общем случае сопряжено со многими проблемами, что является благодатной почвой для произрастания лженауки в разных вариантах и для других злоупотреблений. Достаточно вспомнить «мичуринскую биологию» и борьбу с кибернетикой в сталинском СССР или «теорию мирового льда» Ганса Гёрбигера[4], пропагандируемую в фашистской германии. Фальсификация истории в этом смысле является лишь частным примером. Все это, однако, не мешает за научным методом признавать право на существование. Условием развития науки является сознательное отношение к возможности различных аберраций.

Этот опыт учит, что в каждом конкретном случае особенности использования критерия (R) должны быть тщательно проанализированы, а сам критерий представляет собой некоторую идеализацию. Установить истинность посылки в критерии (R) – объективную познаваемость – возможно лишь с некоторой степенью точности или уверенности. Хотя эта степень уверенности практически может быть очень высокой, но в ее оценке *всегда* присутствует субъективный фактор, и это правило не знает исключений. Полная уверенность является недостижимым пределом, к которому, однако, следует стремиться[5]. Этого, однако, достаточно для того, чтобы возникала уверенность в объективном существовании предметов, входящих в сферу научного опыта, хотя степень уверенности в существовании того или иного конкретного объекта легко может оказаться функцией времени.

Как следует из формулировки критерия (R), вопрос об объективной реальности объекта, по сути, сведен к вопросу о смысле термина «объективно познаваемо». Объективная познаваемость сама по себе тоже требует разъяснения. Опять, не пытаясь дать исчерпывающую дефиницию, поясним, что это означает по крайней мере в некоторых важных случаях. Мы сформулируем два достаточных критерия (или, более мягко, признака) объективной познаваемости, которые могут быть поняты операционально, хотя могут и не давать исчерпывающего определения. Этого будет для нас достаточно.

Во-первых, «объективно познаваемо» то, что приводит к воспроизводимому знанию, – к знанию, которое может быть получено с использованием воспроизводимых методов. В этом случае разные субъекты могут прийти к одной и той же информации об интересующем объекте контролируемым способом, поэтому разумно считать, что эта информация имеет объективный смысл, не зависящий от самих субъектов, но зависящий от объекта, который, тем самым, объективно существует.

Подчеркнем, что когда речь идет о воспроизводимом *методе* познания, имеется в виду воспроизводимость именно метода, а не результата. Воспроизводимый метод легко может приводить и к невоспроизводимому результату. Так, например, тщательно описанная и воспроизводимая процедура измерения спина электрона с помощью установки Штерна-Герлаха приводит к невоспроизводимому в классическом смысле результату: электрон отклоняется магнитным полем установки то в одну сторону, то в другую (хотя в этом случае имеется воспроизводимость в ансамблевом смысле[6]). То, что метод воспроизводим, означает,

---

[4] См. статью в Википедии: http://ru.wikipedia.org/wiki/Гёрбигер,_Ганс

[5] Если бы научный метод приводил к полной уверенности в достоверности полученной информации, то научные споры были бы исключены. В действительности оппонирование является одной из главных составляющих научной работы.

[6] Воспроизводимость результата здесь возникает когда мы переходим от классического понятия

грубо говоря, что он может быть описан четкой инструкцией или программой, а его реализация может быть возложена (в принципе) на автомат, пусть идеализированный и очень совершенный. Вот если вместе с воспроизводимостью метода имеется и воспроизводимость результата, то можно говорить о том, что объект познаваем воспроизводимым методом, так как не только процедуру можно воспроизвести, но и результат ее будет одним и тем же. В нашем первом примере с объективной познаваемостью электрона воспроизводимость методов означала прежде всего воспроизводимость процедур экспериментальной физики, а во втором примере (с историческим событием) воспроизводимость метода означала воспроизводимость процедур изучения источников или артефактов. Кто бы ни изучал источник и артефакт, он перед собой будет иметь один и тот же физический объект (или копию объекта, в худшем случае), поэтому воспроизводимость метода здесь мало чем отличается от воспроизводимости обычных экспериментальных методов. Например, если исследуются два разных текста и они имеют совпадающие фрагменты, то этот объективный факт может быть подтвержден любым исследователем или даже роботом и т. д.[7]

Предполагается, что, в принципе, всегда существует способ убедиться в том, что информация действительно получена воспроизводимым методом определенного типа. Более того, предполагается, что способ проверки воспроизводимости может быть всегда реализован в виде некоторой финитной процедуры. Отсюда следует операциональность признака объективности полученного знания, так как, во-первых, упомянутая финитная процедура проверки метода всегда может быть до конца реализована, и, во-вторых, можно прямо проверить, приводит ли сам метод к воспроизводимому (с требуемой точностью) результату. В таком понимании операциональности имеется, конечно, элемент идеализации, так как воспроизводимость метода иногда невозможно проверить с абсолютной несомненностью, да и со сравнением результатов могут возникнуть похожие проблемы. Это вполне аналогично идеализации в понимании исходного критерия (R) в целом, как это уже обсуждалось выше, но это не является препятствием в использовании понятия воспроизводимой процедуры. В науке всегда приходится иметь дело с некоторыми идеализациями.

Вторым признаком объективности полученного знания является то, что оно в одном и том же или эквивалентном виде реально было получено независимо разными исследователями. Действительно, если бы соответствующий объект не существовал объективно, как такое могло бы случиться? Однако, остается возможность, что одно и тоже знание в разных головах возникает не в силу объективного существования соответствующего предмета, но в силу некоторого коллективного свойства, характеризующего человеческий ум как таковой. Более того, такие примеры, видимо, существуют. Это, например, представление о высшей трансцендентной сущности, лежащей в основе мира, которое возникало в разных частях света и в разных культурах вполне независимо, но со многими общими чертами. Чтобы исключить подобные артефакты разума, дополнительно мы потребуем, чтобы независимые акты познания были связаны также с воспроизводимыми методами[8]. Здесь мы явно апеллируем к предыдущему признаку объективности, т. е. новый признак не является самостоятельным, но является лишь его усилением. Однако, как будет показано ниже, он важен и сам по себе, так как позволяет в отдельных случаях превратить этот критерий из

воспроизводимости к статистическому. Тогда становятся воспроизводимыми все распределения вероятности, и волновая функция приобретает смысл как операционально определенная измеримая величина, но не по отношению к отдельной квантовой частице, а по отношению к квантовому ансамблю.

[7] Определение воспроизводимой процедуры познания, апеллирующей к роботу или автомату, вовсе не подразумевает, что развитие науки может быть оставлено на усмотрение таких автоматов. Сами процедуры выдумываются людьми, здесь существенен творческий элемент, не имеющий алгоритмической природы.

[8] Иногда приходится слышать, что разного рода духовные практики (медитации, молитвы) являются воспроизводимыми методами, так как вполне определенные действия приводят к вполне определенным результатам. В нашем понимании воспроизводимости такие практики воспроизводимостью обладать не могут, так как их выполнение в принципе не может быть доверено автомату. В нашем понимании воспроизводимая методика должна быть в принципе реализуема чисто механически, алгоритмическим автоматом, как это уже было указано. Это принципиальный элемент определения воспроизводимости.

достаточного – в необходимый и достаточный, и использовать его для опытного контроля объективного существования объектов определенного сорта.

В отношении этого признака надо сделать несколько замечаний. Проявление либо отсутствие его наличия в отношении некоторого объекта познания (физического закона, математической теоремы, материального объекта вроде какого-нибудь отдаленного квазара со специальными свойствами), является делом случая. Это определенно именно так, если ограничиться познавательной деятельностью людей на Земле. Хотя научные открытия очень часто делаются независимо разными учеными в разных местах планеты, но стремительное распространение научной информации в современных условиях может воспрепятствовать независимому получению одного и того же результата разными группами исследователей. Этот фактор, как видно, имеет субъективный характер – он связан с условиями, в которых протекает познавательная деятельность. Другим препятствием субъективного характера для проявления этого признака является крайняя дороговизна исследований в ряде фундаментальных областей науки в настоящее время (и в обозримом будущем)[9], что приводит к тому, что многие экспериментальные исследования, по необходимости, проводятся на совершенно уникальных, существующих в единственном экземпляре, установках, и поэтому соответствующие результаты никак не могут быть получены независимо. Однако, можно выделить отдельные широкие области знаний, в которых феномен «независимых открытий» проявлялся достаточно регулярно. Для тех конкретных случаев, когда такое дублирование открытий имело место, мы определенно имеем признак того, что речь идет об объективном знании. Предполагая, что рассматриваемая область знаний обладает определенной однородностью, можно думать, что и другие истины из этой области в принципе могли бы быть открыты независимо, если бы обстоятельства сложились для них более «удачно». Вся эта область знаний получает тогда дополнительный аргумент в пользу того, что исследуемые в ней объекты существуют реально, сами по себе. Критерий «независимой открываемости» является операциональным в том смысле, что в каждом конкретном случае можно указать, было ли какое-то знание получено несколько раз независимо, или нет, и имели ли место такие случаи в рассматриваемой области знаний. Здесь, конечно, тоже присутствует некоторый элемент идеализации в том смысле, что вопрос о том, было ли сделано некоторое открытие действительно независимо разными авторами, может оказаться спорным[10].

Подчеркнем, что оба упомянутых достаточных и операционально определенных признака объективности знания должны пока рассматриваться как предмет философского выбора. На данном этапе анализа они являются философской спекуляцией, философской гипотезой или методологической установкой. Мы их принимаем для проведения дальнейшего анализа, но нужно четко понимать, что осмысленная возможность «доказательства», «опытной проверки» или фальсификации для них не обсуждалась.

Для удобства дальнейших ссылок зафиксируем введенные признаки объективной познаваемости и, соответственно, объективной реальности в «квазиматематической» форме. Пусть A означает вещь, которая может быть объектом познания, ОбСущ(A), ОбПозн(A), ВоспрМет(A), НезОткр(A) есть предикаты, означающие, соответственно, «A объективно существует», «A объективно познаваемо», «A познаваемо воспроизводимыми методами», «A открыто независимо более одного раза». Тогда введенные выше признаки объективного существования объекта A имеют форму двойной импликации:

$$\text{ВоспрМет}(A) \Rightarrow \text{ОбПозн}(A) \Rightarrow \text{ОбСущ}(A) \tag{R1}$$
$$\text{НезОткр}(A) \Rightarrow \text{ОбПозн}(A) \Rightarrow \text{ОбСущ}(A) \tag{R2}$$

[9] См. детальное обсуждение этого круга вопросов в: А.Д. Панов. Наука как явление эволюции. В кн.: Эволюция: космическая, биологическая, социальная. М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ" (URSS), 2009, С.99 – 127.

[10] Если бы это было не так, не возникали бы споры о приоритете.

И, наконец, последнее общее замечание о критериях объективной реальности. Идея, согласно которой собственной реальностью обладает все то, что объективно познаваемо, вовсе не отменяет того, что возможны разные виды объективной реальности. Объективная реальность не обязана быть однородной. Возможна простая физическая реальность того, что операционально определимо или прямо наблюдаемо в физике. Возможна реальность за пределами горизонтов событий или реальность, связанная с операционально неопределимыми распределениями вероятности – то, что в *Методологии космологии* было соотнесено с теоретически реальными объектами. Возможна математическая реальность, которая будет подробно рассмотрена в оставшейся части статьи. И это, конечно, не исчерпывает всех возможностей и оттенков. Однако, из этого списка мы бы исключили такую реальность объекта, которую можно назвать «потенциальной» в том смысле, что она находится в зависимости от того, имел ли место фактически акт познания в отношении этого объекта, или нет, в том случае, когда принципиальная возможность такого познавательного акта не вызывает сомнений. Т. е. мы решительно устраняем субъективный фактор из любых оценок реальности. Если, например, в какой-то момент времени был обнаружен некоторый далекий и интересный астрономический объект, то мы считаем, что этот объект вполне объективно существовал и до того, как мы его нашли и исследовали. Ничего «потенциального» в его существовании не было ни до его обнаружения, ни даже до появления нас самих как познающих субъектов, если объект достаточно стар. Мы считаем, что объективно существует множество еще не обнаруженных астрономических объектов. «Потенциальность» может характеризовать наше субъективное отношение к существованию каких-то объектов, но не это существование как таковое[11]. Светили звезды и до нас, и Луна на небе появилась не когда на нее посмотрел первый человек.

2. Объективное существование мира математических форм

Мы теперь применим намеченный выше аппарат достаточных операциональных критериев объективной реальности, который мы принимаем в качестве начального методологического принципа и в качестве инструмента, к непростому вопросу: обладают ли «самостоятельным» существованием абстрактные математические объекты, или они являются лишь продуктами нашего сознания (или продуктами культуры)? Является ли мир математики в каком-то смысле объективно реальным или математика – это просто изобретение людей?

Мы, конечно, не являемся первыми исследователями этой проблемы[12]. Горячим сторонником независимой реальности «платоновского мира математических форм» является,

---

[11] Тонкий момент, связанный с понятием «потенциальной» реальности возникает при анализе квантовых измерений. Здесь наблюдаемые значения физических величин возникают только в результате акта измерения, поэтому, казалось бы, это тот случай, когда следует признать их «потенциальное» существование до измерения. Но одиночные квантовые измерения не дают воспроизводимого результата. Поэтому мы должны считать, что одиночное квантовое измерение хоть и воспроизводимо как процедура, но не приводит ни к какому объективному знанию из-за отсутствия воспроизводящегося результата. Поэтому ни о какой объективной реальности, связанной с одиночными квантовыми измерениями, говорить вообще нельзя – по крайней мере со строго операциональной точки зрения. Поэтому проблема «потенциальной» реальности снимается. Воспроизводимость результата, приводящая к объективному знанию, возникает только при ансамблевых измерениях в статистическом смысле, но ансамблевые измерения не приводят к проблеме «возникновения» наблюдаемых величин в процессе измерения, следовательно проблема «потенциальной» реальности в ансамблевых измерениях и не возникает. В квантовой объективной реальности нет ничего потенциального, но в обычной интерпретации квантовой механики относится эта реальность не к отдельным квантовым системам, а к ансамблям. В этом, собственно, и состоит специфика квантовой реальности.

[12] Направление мысли, в котором математические объекты мыслятся как реально существующие, хорошо известно в философии математики под именем «математический реализм». Многие величайшие математики придерживались этой позиции: среди них Шарль Эрмит, Давид Гильберт, Анри Пуанкаре, Курт Гёдель. Для нас наиболее важна фигура Роджера Пенроуза, так как его аргументация ближе всего той, которой и мы будем придерживаться, но суждения некоторых других математиков тоже будут приведены.

как известно, знаменитый математик, физик, и популяризатор науки Роджер Пенроуз[13]. Он последовательно проводил эту идею в своих книгах[14] о законах мышления и законах природы. Пенроуз обосновывал ее, используя ряд конкретных примеров «математических форм». Одним упомянутым им примером была знаменитая Великая теорема Ферма. Хотя теорема была сформулирована Пьером Ферма в 1637 году, и окончательно доказана Эндрю Уайлзом лишь к 1995 году (результаты публиковались несколько лет), мнение Пенроуза состоит в том, что теорема была справедлива (существовала) не только до того, как ее доказал Уайлз, но и до того, как она впервые пришла в голову Ферма. Пьер Ферма первым догадался о существовании реального объекта (теоремы), который существовал и до него в идеальном мире математических форм, а Эндрю Уайлз только окончательно установил, что догадка Ферма была верна. Другим излюбленным объектом Роджера Пенроуза является невероятно сложное множество (фрактал), открытое Бенуа Мандельбротом. Чтобы представить аргументацию Пенроуза о независимой реальности этого множества, лучше всего предоставить слово ему самому и привести довольно длинную выдержку из книги «Путь к реальности...» (стр. 37): «Множество Мандельброта совершенно определенно не является изобретением человеческого разума. Оно просто объективно существует в самой математике. Если вообще имеет смысл говорить о существовании множества Мандельброта, то существует оно отнюдь не в наших с вами разумах, ибо ни один человек не в состоянии в полной мере постичь бесконечное разнообразие и безграничную сложность этого математического объекта. Равным образом не может оно существовать и в многочисленных компьютерных распечатках, которые пока только начинают охватывать некую малую толику его невообразимо сложно детализированной структуры, – на этих распечатках мы видим не само множество Мандельброта и даже не приближение к нему, но лишь бледную тень очень грубого приближения. И все же множество Мандельброта существует и существует вполне устойчиво: кто бы ни ставил перед компьютером задачу построения множества, каким бы ни был этот самый компьютер, структура в результате получается всегда одинаковая — и чем “глубже” мы считаем, тем более точной и детальной будет картинка. Следовательно существовать множество Мандельброта может только в платоновском мире математических форм, больше нигде.»

В приведенном фрагменте Роджер Пенроуз для аргументации обращается к здравому смыслу. Но в другом месте он дает так же и существенное уточнение своего понимания реальности математических структур: «Когда я говорю о “существовании” платоновского мира, я имею в виду всего-навсего объективность математической истины» («Путь к реальности...», стр. 35). Нетрудно видеть, что понимание «существования» у Роджера Пенроуза представляет собой, фактически, частный случай подхода к понятию объективного существования в общем случае, который был рассмотрен в предыдущем разделе. В обсуждении реальности множества Мандельброта звучит также мотив, связанный с независимым получением одной и той же информации различными путями. Собственно, наш подход к понятию «объективного существования» является лишь экспликацией идей Роджера Пенроуза, и, в значительной степени, был ими инициирован.

С точки зрения нашего несколько более общего и более явно сформулированного подхода к понятию объективной реальности, основанного на достаточных операционально определенных критериях, математические истины (или математические формы, по терминологии Пенроуза) определенно обладают собственной реальностью, так как, вне всяких сомнений, удовлетворяют обоим сформулированным нами условиям (R1) и (R2). Во-

[13] «Платновский мир математических форм» - это терминология, используемая самим Рождером Пенроузом. Атрибут «платоновский» он использует без детальных ссылок на самого Платона и, в действительности, точного соответствия миру эйдосов Платона. Поэтому его терминологию нужно понимать несколько условно.

[14] Рождер Пенроуз. Новый ум короля. М.: УРСС, 2003; Тени разума. М.-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2005; Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель. М.-Ижевск, Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007.

первых, они объективно познаваемы, так как получаются воспроизводимыми методами математических доказательств или вычислений[15] (критерий R1). Во-вторых, многие математические истины действительно открывались независимо разными исследователями (критерий R2). Достаточно вспомнить независимое изобретение математического анализа Исааком Ньютоном и Готфридом фон Лейбницем, независимое появление неевклидовой геометрии в трудах Карла Гаусса, Николая Лобачевского, Яноша Бойяи, независимое открытие односторонней поверхности Фердинандом Мёбиусом и Иоганом Листингом и т. д. Забавным примером работы второго критерия реальности в отношении математики является обыкновенная контрольная работа по математике в школе: оценка работ учителем основана на вере в то, что все ученики, не списывая друг у друга, должны прийти к одному и тому же правильному решению задачи, так как это правильное решение в мире математических форм объективно существует независимо о того, смогли ли его найти ученики.

Таким образом, если исходить из критерия объективной реальности, основанного на объективной познаваемости объектов (R), мир математических форм существует совершенно объективно и независимо от сознания познающих его субъектов. Это объективное существование ни в малейшей степени не является в чем-то ущербным по сравнению с объективным существованием объектов материального мира, оно ни в каком смысле не является «потенциальным». «Потенциальности» в существовании еще не открытого математического объекта не больше, чем «потенциальности» в существовании галактики, еще не занесенной в каталог. Точнее говоря, ни по каким формальным признакам объективное существование мира математических форм не отличается от объективного существования мира материальных объектов. В обоих случаях уверенность в объективном существовании основана на познаваемости воспроизводимыми методами, и только природа этих методов кажется различной в отношении мира математики и материального мира. В первом случае это метод доказательств, во втором случае это экспериментальный метод или наблюдения. Однако заметим, что вопрос о природе воспроизводимых методов вовсе не затрагивался нами при обсуждении признаков объективного существования, он не фигурирует в формулировке критериев (R), (R1), (R2), и действительно, не имеет отношения к делу. Важна только воспроизводимость и объективность методов познания как таковая.

Заметим однако, что даже если настаивать на необходимости рассмотрения вопроса о различии природы воспроизводимых методов познания в математике и в отношении материального мира, то следует отметить, что различие между этими двумя группами методов не столь велико, как это может показаться. Описание любого воспроизводимого экспериментального метода включает перечисление действий, которые должны быть выполнены одно за другим, будучи линейно упорядоченными во времени, чтобы получить конечный результат. Эти действия, в принципе, могут быть выполнены и автоматом, как мы уже упоминали[16]. Но любое математическое доказательство или вычисление означает в точности то же самое. Вычисление есть процесс, который в принципе должен быть выполнен некоторым физическим устройством шаг за шагом, будучи линейно упорядоченным во времени (точнее – последовательные шаги должны быть причинно связаны). Роль такого устройства могут играть мозги математика, но, в принципе, это может быть и автомат – машина Тьюринга (в большей или меньшей степени идеализированная) или эквивалентное устройство (в том числе – привычные для нас компьютеры). Собственно, это обстоятельство имеет прямое отношение к известному «тезису Черча-Тьюринга»[17]. Математическое доказательство неотделимо от его принципиальной реализуемости на некоторых физических

15 С формальной точки зрения любое доказательство можно представить как некоторое вычисление в специализированном формальном языке математической логики. Мы часто будем использовать слова «доказательство» и «вычисление» как синонимы.

[16] И реально выполняются автоматами в огромном количестве случаев: как например, автоматическими космическими телескопами, на Большом адронном коллайдере и т. д.

[17] Но не тождественно ему, так как тезис Черча-Тьюринга адресуется к существенно идеальным устройствам, а в данном случае речь идет о реальном причинном процессе.

носителях в виде процесса или последовательности действий, развернутых в физическом времени. Поэтому математическое доказательство, как определенная разновидность *метода познания*, может и должно рассматриваться как разновидность воспроизводимой *экспериментальной* процедуры. Мы еще не раз будем возвращаться к этому обстоятельству и существенно уточним аргументацию. Отметим, что любое доказательство имеет и другую сторону: оно существует как *объект* в идеальном мире математических форм. Реальное проведенное доказательство является проекцией этого идеального объекта в физический мир. Не следует путать доказательство как *метод* исследования математических истин и как *объект* идеального мира математических форм.

Близость методов математики обычным экспериментальным процедурам стала еще более заметной с возникновением понятия квантового компьютера, квантовых вычислений, и с появлением первых экспериментальных прототипов этих устройств. Не вдаваясь в детали, отметим, что квантовое вычисление принципиально не может быть выполнено «на бумаге» или «в уме», но может быть реализовано только в виде некоторого физического (существенно квантового) процесса специальным устройством – квантовым компьютером. При этом квантовый компьютер является по своей сути аналоговым, но не цифровым, устройством. Квантовый компьютер работает лишь с конечной точностью и всегда имеется неисчезающая вероятность получения ошибки. Квантовое вычисление ничем не отличается от других процедур экспериментальной физики, реальные прототипы квантовых вычислительных устройств действительно являются весьма сложными экспериментальными установками, но при этом все это принадлежит, все-таки, математике (например, это способ решения задачи разложения на простые множители очень больших целых чисел, которая недоступна классическим компьютерам). Даже если настаивать, что работа квантового компьютера и квантовые вычисления не являются чем-то вполне математическим, этот пример с полной очевидностью показывает, что граница между обычными экспериментальными методами и методами математики является крайне размытой.

В связи с этим заметим так же, что в математике метод познания (доказательство или вычисление, рассматриваемое как причинный материальный процесс) отделен от объектов познания – идеальных форм из мира математики (которые возникают как результаты вычислений и доказательств), подобно тому, как объекты исследования естественных наук отделены от методов[18]. Метод познания в математике адресует что-то материальное (причинный процесс типа вычисления), но объект познания является идеальным и существует вне материального мира – в объективном мире математических форм. Однако разделение на объект и метод в обоих случаях – и в математике, и в естественных науках – является весьма условным. Сами доказательства, как идеальные объекты мира математических форм, могут быть предметом математических исследований (в *метаматематике*; известнейшими результатами здесь являются теоремы Гёделя о полноте и неполноте). Аналогично, исследование экспериментальной методики занимает всегда львиную долю любой экспериментальной статьи по физике, химии, генетике и т. д. Более того, часто встречаются экспериментальные работы, имеющие исключительно методический характер – ничего кроме методики не исследующие. То есть метод сам по себе очень часто является объектом исследования и в естественных науках.

Как уже упоминалось в Разделе 1, понятие объективной познаваемости и понятие воспроизводимого метода познания в каждом конкретном случае может содержать множество тонкостей, и математическое доказательство, как воспроизводимый метод познания, не является в этом смысле исключением. Так, в математике отсутствует единое представление о том, что такое математическая строгость[19]. Обычное (классическое) понятие

[18] Обсуждение различия между объектом и методом в математике инспирировано моей дискуссией по этому вопросу с А.В. Болдачевым. С оригинальным мнением самого Александра Болдачева, который выступает моим оппонентом по этому вопросу, можно ознакомится по интернет-ресурсам: http://boldachev.livejournal.com/44998.html, http://boldachev.livejournal.com/44998.html.

[19] См. напр.: П.С. Новиков. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М.: Наука,

математической строгости допускает доказательства существования неконструктивных объектов (т. е. доказательство существования объекта без указания явного способа его построения), использование закона исключения третьего (и, вместе с этим, способа доказательства от противного), легко работает с актуальной бесконечностью (например, считает множество всех натуральных чисел актуально существующим). Само это обычное понятие математической строгости используется в двух вариантах: на интуитивном уровне (как в курсе школьной математики, в стандартных курсах математического анализа и алгебры т. д.), и в строго формализованном виде на основе математической логики и формальных языков. Эквивалентность двух подходов очевидна далеко не всегда. Помимо этого имеется представление о математической строгости в концепции интуиционизма или в конструктивной математике[20], которое идет от Л. Э. Я. Брауэра (1907) и было формализовано в математической логике А. Гейтингом (1930). Здесь неконструктивные доказательства существования не допускаются, закон исключения третьего и доказательства от противного не допускаются тоже, а вместо понятия актуальной бесконечности используется понятие потенциальной бесконечности, в котором предполагается только возможность конструктивно генерировать неограниченную последовательность элементов, но не одновременное существование всей совокупности. Математик-интуиционист не признает многие обычные доказательства строгими, а обычный математик вполне может посчитать выкладки интуиционистов ненужным ригоризмом. Как видно, даже воспроизводимость методов математики имеет субъективный аспект, и в этом смысле математика похожа на все прочие науки. Несмотря на все эти тонкости и проблемы, наличие воспроизводимости методов математики невозможно отрицать в любом из подходов – классическом или конструктивном – отдельно. В какой бы из концепций математической строгости мы ни работали, относительно любого математического рассуждения или вычисления можно совершенно определенно сказать, является ли оно правильным математическим выводом, или нет. Более того, в математической логике определены даже эффективные процедуры для решения такого рода вопросов. Однако из-за неоднозначности в определении понятия доказательства мир математических форм оказывается неоднородным. Некоторые его объекты достижимы в одном подходе, но недостижимы или даже не имеют смысла в другом. Соответственно, объективный мир математических форм содержит объекты (как минимум) двух различных типов – классические математические объекты и конструктивные. Мир математических форм содержит неоднородности и других типов, некоторые из которых будут упомянуты ниже.

3. Опытный контроль существования мира математических форм и непротиворечивость математики

Шарль Эрмит (1822-1901) писал[21]: «Я *верю*, что числа и функции анализа не являются произвольными созданиями нашего разума; я думаю, что они существуют вне нас в силу той же необходимости, как и объекты реального мира, и мы их встречаем или открываем и изучаем точно так, как это делают физики, химики или зоологи» [курсив мой, А.П]. Отмечая исключительную ясность формулировки основной мысли и полностью к ней присоединяясь, хотелось бы, однако, внести одно уточнение в статус этой идеи. *Верить* в независимую реальность объектов математики не обязательно, так как ее можно *проверить*. Объективное существование мира математических форм имеет следствия, открытые для контроля опытом, и формулировка этих следствий такова, что они открыты и для фальсификации в смысле Поппера. Реальность мира математики имеет структуру проверяемого научного утверждения. Рассмотрим обоснование этого очень сильного утверждения.

1977; Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. М.: Изд-во иностранной литературы, 1965.

[20] Интуиционизм и конструктивизм в математике являются практически синонимами. Второй из терминов просто более характерен для отечественной школы математической логики. См. напр.: П.С. Новиков. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М.: Наука, 1977, Гл. II.

[21] Цит. по: Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. М.: Изд-во иностранной литературы, 1965, стр. 29.

Идею опытной проверки реальности мира математических форм можно усмотреть уже в словах Роджера Пенроуза по поводу реальности множества Мандельброта: «кто бы ни ставил перед компьютером задачу построения множества, каким бы ни был этот самый компьютер, структура в результате получается всегда одинаковая» (см. раздел 2). Это утверждение имеет форму *предсказания*, которое адресует неограниченный и неопределенный набор еще не проведенных вычислений; оно является *следствием* идеи об объективном существовании множества Мандельброта; и это предсказание можно *проверить*.

Уточним и обобщим эту мысль. Рассмотрим какой-нибудь математический объект, про который заранее понятно, что он является осмысленным, но некоторые его детальные *характеристики* могут быть и неизвестны. Это может быть некоторый еще не исследованный фрагмент множества Мандельброта (характеристика – конкретный рисунок множества); это может быть осмысленное утверждение, имеющее форму теоремы, но которая еще не доказана и не опровергнута (характеристика – ложь или истина); это может быть и что-то совсем простое, например миллиардный знак в десятичном разложении квадратного корня из 4711 (характеристика – цифра от 0 до 9). Из представления об объективном существовании мира математических форм следует, что значения таких характеристик существуют совершенно объективно и независимо от того, вычислял их кто-нибудь или нет. Это позволяет относительно таких характеристик сделать следующее *предсказание*: кто бы и каким бы методом ни взялся вычислять определенную характеристику, результат получится всегда один, так как он существует объективно и независимо до любого его практического вычисления. Совершенно очевидно, что это предсказание имеет форму, открытую для проверки опытом. Этот опыт состоит в сравнении результатов различных путей вычисления значений данной характеристики. Заметим, что существование неэквивалентных путей вычисления какой-нибудь характеристики в общем случае не вызывает сомнений: например, число π может быть вычислено с помощью различных рядов и бесконечных произведений, представлено интегралами нескольких разных типов, можно, наконец, воспользоваться методом Монте Карло. В пределах точности, обеспечиваемой методом, получится одно и то же. Даже тот факт, что $1+1=2$, может быть проверен независимо в разных аксиоматических системах арифметики, соответствующее вычисление может быть проведено устройствами, работа которых основана на разных принципах (двоичные или десятичные, цифровые или аналоговые).

Очевидно также, что этот сорт предсказаний имеет форму, открытую для опытной фальсификации: достаточно предъявить два правильных вычисления[22], которые приводят к различным результатам, и объективное существование данной характеристики будет фальсифицировано. Но такой контрпример фальсифицирует объективное существование не только той характеристики, которая исследовалась, он делает и значительно больше.

Получение двух различных результатов с помощью различных, но правильных логических выводов, называется противоречием. Это означает, что в рассматриваемой системе для некоторого осмысленного утверждения A можно одновременно доказать A и не-A. Это означает противоречивость не только утверждения A, но и всей системы, в которой производился данный вывод, так как в системе, в которой можно хотя бы для одного утверждения A доказать одновременно A и не-A, можно доказать любое утверждение, которое вообще можно сформулировать (это теорема математической логики). Такая система с практической точки зрения является совершенно бесполезной, и это означает также, что никакие «истины» или математические формы такой теории никаким объективным существованием не обладают, так как им невозможно приписать никаких определенных значений. Единственный контрпример фальсифицирует объективное существование всего того фрагмента мира математических форм, который опирается на теорию или формальную

[22] Напомним, что правильность вычисления всегда может быть установлена с помощью финитных алгоритмических процедур.

систему, в которой был получен данный противоречивый результат.

Закономерен вопрос: не является ли полученная форма фальсифицируемости в каком-то смысле тривиальной или тавтологичной? В том смысле, например, что математика на самом деле является непротиворечивой (в противном случае она была бы бесполезной), поэтому попытка фальсифицировать ее a priori обречена на неудачу, и утверждение о фальсифицируемости утрачивает содержательный смысл: объективное существование мира математических форм тавтологично нефальсифицируемо.

На это мы приведем два возражения.

Первое возражение. Фальсифицируемость по Попперу есть требование только к *форме* следствий, вытекающих из теории. Научные утверждения должны приводить к таким следствиям, для которых в принципе можно содержательно описать ситуацию, когда следствие отвергается опытом. И это требование вне всяких сомнений выполнено для гипотезы о реальности мира математических форм: если предъявлено два правильных вычисления с различными результатами, то предсказание о том, что результат должен быть один, так как существует объективно, недвусмысленно опровергнуто. Для действительно вненаучных утверждений следствия не могут иметь даже такой формы. Например, из утверждения о существовании Бога нельзя вывести следствий, даже форма которых допускала бы фальсификацию.

Второе возражение состоит в том, что непротиворечивость мира математических форм на самом деле отнюдь не имеет тривиального характера. По этому поводу в первой книге фундаментального трактата по математике Н. Бурбаки написано[23]: «Итак, мы верим, что математике суждено выжить и что никогда не произойдет крушения главных частей этого величественного здания вследствие внезапного выявления противоречия; но мы не утверждаем, что это мнение основано на чем-либо, кроме опыта». Причем, добавим, что понимание опыта здесь весьма близко к пониманию опыта в экспериментальных научных дисциплинах: это применение раз за разом определенных процедур с неизменным вопросом: а что получится? Попытка обнаружить противоречие в математике и, вместе с тем, фальсифицировать объективное существование мира математических форм, является содержательно осмысленной, так как непротиворечивость математики в целом не доказана. Более того, опыт обнаружения противоречий в математике имеется: это случилось, например, в наивной канторовской теории множеств в начале 20-го века. Оказалось, что основная для теории множеств идея, согласно которой любое осмысленное свойство определяет множество объектов, обладающих этим свойством, приводит к противоречию. Тогда, правда, противоречие удалось устранить за счет более аккуратной формулировки теории, и математика в целом устояла, хотя потрясение было велико.

В утверждении о недоказанности непротиворечивости математики имеются детали, которые требуют уточнения. В отношении некоторых чрезвычайно обширных разделов математики непротиворечивость не только не доказана, но, в определенном смысле, не может быть доказана в принципе. Это следует из второй теоремы Гёделя о неполноте, которая выполняется для любой математической теории, содержащей формальную арифметику, для теорий, содержащих аксиоматическую теорию множеств (например, в виде системы аксиом Цермело-Френкеля) и для любых разумных обобщений этих теорий[24]. Вторая теорема Гёделя о неполноте утверждает, что непротиворечивость системы не может быть доказана внутри самой системы ее собственными средствами, если система действительно непротиворечива[25]. Так как формальная арифметика является основой теории рациональных чисел, рациональные числа являются основой системы вещественных чисел а те, в свою очередь, основой большинства других числовых систем и анализа, то под вопросом оказывается

[23] Н. Бурбаки. Теория множеств. М.: Мир, 1965, стр. 30.

[24] См.: К. П. Коэн. Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ» (URSS), 2009. Гл.I, § 10.

[25] Теоремы Гёделя о неполноте справедливы не для всех математических теорий. См. обсуждение ниже по тексту.

непротиворечивость всей математики, работающей с числовыми системами. Теория множеств, в свою очередь, прямо включена во многие абстрактные математические дисциплины, такие как топология, теория групп и т. д., поэтому непротиворечивость всех этих областей математики так же не доказана. Все упомянутые системы вместе составляет бóльшую часть математики.

Заметим, что существуют доказательства непротиворечивости формальной арифметики, имеющие относительный характер: непротиворечивость арифметики доказана, если некоторая другая система непротиворечива. Этот подход был бы заведомо осмысленным в том случае, если бы непротиворечивость этой другой системы была чем-то существенно более очевидным, чем непротиворечивость самой формальной арифметики. Это, в частности, обеспечено для систем, основанных на финитных методах анализа (интуиционизм и родственные системы). Эта идея является одной из предпосылок программы установления непротиворечивости математики Давида Гильберта. По этому поводу в предисловии к первому тому «Оснований математики» Гильберт пишет[26]: «…возникшее на определенное время мнение, будто из некоторых недавних результатов Гёделя следует неосуществимость моей теории доказательств, является заблуждением. Этот результат на самом деле показывает только, что для более глубоких доказательств непротиворечивости финитная точка зрения должна быть использована некоторым более сильным образом, чем это оказалось необходимым при рассмотрении элементарных формализмов». Действительно, общих теорем, запрещающих доказательство непротиворечивости формальной арифметики внешними, не определенными в самой арифметике, но финитными средствами, нет, и невозможность существования таких доказательств не следует из теорем Гёделя о неполноте. Этой идее следует, в частности, хорошо известное генценовское доказательство непротиворечивости арифметики (см., например, статьи Рихарда Генцена в сборнике[27]). Здесь строится специальная математическая система, которую Генцен хотел бы рассматривать как более простую и надежную, чем сама арифметика, и в рамках этой системы как самостоятельные математические объекты рассматриваются доказательства формальной арифметики (строится теория доказательств, которая называется также метаматематикой[28]). В рамках этой системы показано, что противоречия в доказательствах арифметики не возникает. Т. е. если метаматематическая система Генцена непротиворечива, то и арифметика непротиворечива. Сама эта метаматематическая система более проста чем арифметика в том смысле, что главная ее часть действительно использует только идеи конструктивной математики и финитные рассуждения. Однако на финальной стадии доказательства привлекается так называемый принцип трансфинитной индукции, который особенно прозрачным назвать трудно. С этим вынужден согласиться даже и сам Генцен[29]. Вопрос о непротиворечивости генценовской системы открыт, и вопрос о непротиворечивости арифметики только сведен к вопросу о непротиворечивости системы, которая, на самом деле, вовсе не является более простой, чем арифметика, это просто совсем другая система. Сходные доказательства были затем предложены В. Аккерманом, П. С. Новиковым, П. Лоренценом, К. Шютте, И. Н. Хлодовским[30]. Полностью финитных доказательств непротиворечивости арифметики нет до сих пор, то есть идея Гильберта в отношении арифметики остается неосуществленной. Существует мнение, что программа Гильберта и не может быть реализована, так как требования Гильберта к финитности анализа столь высоки,

---

[26] Д. Гильбер, П. Бернайс. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1979, стр. 19.

[27] Математическая теория логического вывода. Под ред. А.В. Идельсона и Г.Е. Минца. М.: Наука, 1967.

[28] Термины «метаматематика» и «теория доказательств» были введены Давидом Гильбертом в связи с его программой обоснования непротиворечивости математики формальными средствами. См.: С.К. Клини. Введение в метаматематику. М.: Изд-во Иностранной литературы, 1957, стр.55.

[29] См. цит. книгу, стр. 189-190.

[30] См. ссылки в книге: Э. Мендельсон, Введение в математическую логику, Изд. 4-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ» (URSS), 2010, стр. 282. Там же полностью приведено доказательство К. Шютте.

что все эти средства могут быть реализованы без выхода за пределы формальной арифметики, следовательно с их помощью непротиворечивость арифметики не может быть доказана по второй теореме Гёделя о неполноте. Хотя полной уверенности в этом, все же, нет[31].

В отношении непротиворечивости теории множеств не существует даже и таких относительных доказательств. В университетском учебнике по математической логике[32], который соответствует современному состоянию дел, по этому поводу сказано (стр. 228): «В настоящее время непротиворечивость теории Ar или Ar2 можно считать надежно установленной. Непротиворечивость такой теории, как ZF, гораздо более проблематична». Здесь Ar и Ar2 – это разные способы формализации арифметики, ZF – теория множеств в аксиоматике Цермело-Френкеля. Заметим, что даже в отношении арифметики не сказано, что непротиворечивость доказана, но использована более мягкая оценка: «надежно установлена».

Между тем, теоремы Гёделя о неполноте выполняются не для всех математических теорий. Точнее, существует целый ряд теорий, непротиворечивость которых может быть доказана до конца простыми и строго финитными методами. Так, например, в математической логике доказана непротиворечивость исчисления высказываний (пропозициональное исчисление) и исчисления предикатов первого порядка[33] (последнее обстоятельство тесно связано с известной теоремой Гёделя о *полноте*). Фактически, это означает, что доказана непротиворечивость языка математической логики. Доказана непротиворечивость ограниченной арифметики без умножения (система Пресбургера) и непротиворечивость ограниченной арифметики с умножением, но без правила индукции или с некоторыми ограничениями на правило индукции (см. по этому поводу классическую книгу Стефена Клини[34], стр. 184, 389). Поэтому попытки фальсифицировать эти теории путем поиска противоречий обречены на неудачу. Это означает, что на неудачу обречены и попытки фальсифицировать объективное существование математических объектов этих теорий. Означает ли это, что объективное существование объектов этих теорий является тривиально нефальсифицируемым? Нет, ни в коем случае не означает. Напомним наше *Первое возражение* (см. выше): фальсифицируемость относится только к форме следствий из некоторой теории, но никак не к тому, возможна ли фальсификация «на самом деле». Теория должна быть открыта для контроля опытом по форме своих следствий, и не более. В конце концов, если некоторая теория истинна *на самом деле*, то фальсифицировать ее *на самом деле* невозможно, но это вовсе не мешает быть ей фальсифицируемой в обычном смысле. Ситуация, когда непротиворечивость некоторой математической теории доказана очевидными финитными средствами, означает следующее: здесь мы в действительности имеем такое доказательство объективного существования объектов этой теории, которое уже невозможно опровергнуть. Мы можем быть уверены, что все непротиворечивые объекты этой теории объективно существуют. Иными словами, мы имеем такие фрагменты мира математических форм, объективное существование которых доказано средствами математики. Но для других фрагментов мира математических форм объективное существование еще не доказано или (в определенном смысле) даже не может быть доказано в принципе (по второй теореме Гёделя), но открыто для опытной проверки и фальсификации. Объективный мир математики неоднороден в отношении уверенности в его объективном существовании в той же степени, в какой он неоднороден в отношении уверенности в его непротиворечивости.

Собственно, непротиворечивость математической теории и объективное существование объектов этой теории эквивалентны. В этой эквивалентности нет ничего тривиального. Это понимал еще Давид Гильберт, и эта мысль была основой мотивации его программы

---

[31] См.: Г. Такеути. Теория доказательств. М.: Мир, 1978, стр. 93-95.
[32] А.Н. Колмогоров, А.Г. Драгилин. Математическая логика. М.: КомКнига (URSS), 2006
[33] П.С. Новиков. Элементы математической логики. М.: Наука, 1973, стр. 108 и стр. 209.
[34] С.К. Клини. Введение в метаматематику. М.: Изд-во Иностранной литературы, 1957.

доказательства непротиворечивости математики путем превращения ее в чисто формальную текстовую систему. По этому поводу Н. Бурбаки пишет[35]: «Он [Гильберт] выставил новый принцип, вызвавший многочисленные отклики: в то время как в традиционной логике непротиворечивость некоторого понятия делала его лишь возможным, для Гильберта непротиворечивость некоторого понятия (по крайней мере для математических понятий, определенных аксиоматически) эквивалентна его существованию. В связи с этим возникла необходимость доказывать a priori непротиворечивость некоторой математической теории еще до начала ее систематического развития». Иными словами, Гильберт стремился получить уверенность в существовании объектов изучения, прежде чем начать их изучать. Причем его понимание существования, как видно, практически тождественно пониманию объективного существования мира математических форм в настоящей статье или у Рождера Пенроуза и явно противопоставляется «возможности» или «потенциальности».

Есть еще одна тонкость, имеющая отношение к фальсифицируемости объективного существования математических объектов, которую нельзя не упомянуть. По первой теореме Гёделя о неполноте (не путать со второй, которую мы упоминали выше) некоторые системы (формальная арифметика, теория множеств) содержат истинные утверждения, которые, однако, невыводимы в данной системе. Они называются Гёделевскими утверждениями. Непротиворечивость Гёделевских утверждений в общем случае закрыта для опытной проверки в описанном выше смысле, так как невозможно построить ни одного чисто формального доказательства[36] такого утверждения, следовательно невозможно сравнить и результаты различных доказательств, что только и открывает возможность получить противоречие. Следовательно, Гёделевские утверждения, вообще говоря, закрыты для прямой фальсификации, поэтому смысл «объективного существования» для истинности таких утверждений требует более тонкого анализа, чем мы проводили до сих пор. Мы здесь не будем пытаться выстроить такой более тонкий анализ[37], но отметим, что существование этих патологических объектов, независимо от нашего отношения к ним, ни в малейшей степени не бросает тень на фальсифицируемость объективного существования мира математических форм в целом. Дело в том, что кроме таких объектов в мире математических форм определенно существуют чрезвычайно обширные фрагменты, в отношении которых открытость утверждения об их объективном существовании для контроля опытом и для фальсификации не вызывает сомнений, как мы объяснили это выше. Именно в отношении этих фрагментов утверждение об объективном существовании имеет совершенно четкий смысл и является проверяемым, независимо о более трудного вопроса, связанного с Гёделевскими утверждениями.

Идея об объективном существовании мира математических форм позволяет получить еще одно любопытное следствие, которое, в принципе, тоже открыто для проверки опытом. Если математические истины существуют объективно и независимо от нас, то они должны

---

[35] Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. М.: Изд-во иностранной литературы, 1965, стр. 54.

[36] Здесь тоже есть свои тонкости. В некоторых случаях доказательство в точности одного и того же утверждения может быть получено в одной математической системе, и не может быть получено в другой, где это утверждение также имеет смысл. Что это означает в отношении истинности такого утверждения – отдельный непростой вопрос. Примером такого утверждения является теорема Гудстейна, упомянутая нами также в *Методологии космологии*.

[37] Отметим, впрочем, одно обстоятельство. Доказательство первой теоремы Гёделя о неполноте имеет конструктивный характер. То есть истинное, но невыводимое утверждение строится явно, при этом его истинность оказывается действительно совершенно тривиальной. Это конструктивное гёделевское утверждение является самоотнесенным, и приблизительно может быть сформулировано так: «данное утверждение невыводимо». Если оно невыводимо, то оно тривиально истинно и обратно. Теорема Гёделя, фактически, является средством построения истинных утверждений за пределами достижимости формальной системы (например - арифметики). Истинность Гёделевского утверждения этого типа объективно существует в мире математических форм вместе с другими теоремами арифметики, если арифметика непротиворечива. Но не все Гёделевские утверждения столь тривиальны. Примером является упомянутая уже теорема Гудстейна, и подобные случаи требуют другого анализа.

быть по необходимости переоткрыты другими космическими цивилизациями, достигшими как минимум уровня космических технологий (если такие цивилизации существуют), в той же форме, в которой известны нам, или в некоторой эквивалентной форме. Связано это просто с тем, что развитие высоких технологий без математики кажется совершенно невозможным, при этом другая цивилизация должна была пройти *весь* путь построения математики независимо от нас, и *все* результаты должны были быть получены независимо о нас. Но все эти результаты уже существуют независимо от кого бы то ни было в объективном мире математических форм, поэтому другая цивилизация найдет в точности то же, что и мы. Здесь, конечно, есть свои тонкости. Так, например, инопланетяне могут продвинуться в изучении высших абстрактных разделов математики меньше или больше чем мы. Поэтому можно допустить, что часть «высших» математических результатов может остаться и не переоткрытой. Но в отношении некоторых базовых разделов математики, таких, как евклидова геометрия и основы математического анализа, это совершенно невозможно. Они должны быть общими для всех. Тонкий вопрос о том, что в точности отделяет «базовые» разделы математики от «высших» остается, но в отношении упомянутых самых-самых базовых разделов сомнений быть не может. На этом уровне понимания критерий независимости получения информации в отношении мира математических форм (R2) превращается из достаточного критерия объективности, который имеет только философское обоснование, в необходимый, открытый контролю опытом. В этом качестве критерий (R2) перемещается из области философии в область естественных наук. Именно поэтому мы и выделили критерий (R2) несмотря на то, что он является только усилением критерия (R1). Если другие цивилизации вообще существуют и когда-нибудь будут обнаружены, но окажется, что они не имеют ничего похожего на нашу математику, достигнув при этом высокого уровня технологического развития, то «реальность математических форм» будет фальсифицирована. Она окажется артефактом цивилизации людей. Это другой, независимый путь фальсификации по сравнении с тем, который был связан с анализом непротиворечивости (см. выше). Тонким моментом этого нового пути фальсификации является то, что на самом деле неизвестно, существуют другие цивилизации, или нет. Перед практическим применением описанной процедуры, в принципе, должна быть решена проблема SETI[38]. По нашему мнению, это несущественно, так как фальсифицируемость относится только к форме следствий, как это мы уже объясняли выше. Нужно, чтобы ситуация, в которой происходит опытное опровержение следствия теории, была мыслима. Это определенно имеет место в данном случае. Напомним, что существуют «теории», для которых такие ситуации не являются даже мыслимыми.

4. Вопрос о пространственно-временной однородности мира математических форм

Важная проблема, имеющая отношение к реальности мира математических форм, затронута в статье Ли Смолина[39]. Вопрос заключается вот в чем. Из того, что некий объект обладает собственной реальностью, автоматически вовсе не следует, что вопрос о том, «где» или «когда» он существует, является осмысленным. Никакой прямой логической связи здесь нет. В этом легко убедиться еще раз взглянув на структуры критериев (R), (R1), (R2). Так является ли этот вопрос на самом деле осмысленным в отношении мира математических форм, или нет? Роджер Пенроуз на этом вопросе в своих книгах вообще не останавливается, упомянув лишь мимоходом, в связи с изобретением математического доказательства древними греками: «Людям впервые приоткрылась поистине вневременная природа математики» (Путь к реальности..., стр. 33). Вневременная природа математики Роджеру Пенроузу очевидна и не обсуждается.

[38] Л. М. Гиндилис. SETI: Поиск внеземного разума. М.: Изд-во физико-математической литературы, 2004.
39 Smolin, Lee. The unique universe, 2009. http://physicsworld.com/cws/article/indepth/39603

Напротив, Ли Смолин прямо задается этим вопросом. В связи с этим он рассматривает игру в шахматы. Игра в шахматы, будучи математической игрой, подчиняется некоторым вполне определенным математическим законам. Эти законы могут быть объективно познаны, и обладают в этом смысле самостоятельной объективной реальностью. Все законы шахматной игры уже существуют вместе с заданными правилами игры, хотя и не все еще нам известны. Но, настаивает Ли Смолин, говорить о законах шахматной игры до того, как эта игра была действительно придумана людьми, бессмысленно. Мы должны считать, что до изобретения шахмат всей этой «шахматной математики» не существовало, но в момент изобретения она появилась и существует с этих пор вполне объективно. Он рассматривает следующую альтернативу этому положению. «Последовательный платонист», настаивающий на вневременной природе реальности математики[40] (подобно Роджеру Пенроузу, которого, однако, Ли Смолин прямо не упоминает), может сказать, что в мире математических форм существует бесконечное множество, представляющее все возможные математические игры, и, вместе с ним, все «теоремы шахмат» вместе с полными теориями всех других математических игр. Ли Смолин против этой точки зрения выдвигает следующее возражение: такое предположение не дает ничего нового с практической точки зрения, и только запутывает дело. На этом основании он вневременную природу шахматной математики решительно отвергает. Не принимая «последовательно платоновскую» идею вневременной природы шахмат, он затем делает очень сильное и важное обобщение. Как и в случае «шахматной математики», зависимой от времени структурой обладает, вообще говоря, абсолютно вся математика, т. е. элементы идеального мира математических форм не обладают вневременным существованием, а появляются на свет только в тот момент, когда для этого созревают некоторые специфические условия в реальном физическом мире и в связи с некоторыми событиями реального мира. Именно, требуется, чтобы математический объект являлся абстракцией чего-то реально существующего. Тем самым, Ли Смолин совершенно недвусмысленно настаивает на том, что объективно существующий мир математики (который он вовсе не отрицает) не имеет статической вневременной природы. Напротив, это объект, динамически зависящий от времени. Таким образом, то, что очевидно и даже не обсуждается Роджером Пенроузом, категорически отвергается Ли Смолиным. Это говорит о том, что вопрос, на самом деле, нетривиален.

Здесь необходимо сделать несколько замечаний по поводу характера аргументации Ли Смолина. Во-первых, конечно, Ли Смолин не дал доказательства ошибочности «последовательно платоновской» вневременной точки зрения на математику. Его аргумент, по сути, имеет чисто эмоциональный характер. В действительности множество всех математических игр, по крайней мере с точки зрения классической (не конструктивной) математики, отнюдь не является ни «слишком большим», ни лишенным смысла. Кроме того, вполне можно представить себе теоремы математики, приложимые к любой математической игре (надо только хорошо определить, что такое математическая игра). В этом смысле множество всех игр, в том числе и еще не придуманных, надо рассматривать как актуально существующее в любой момент времени. Вневременная точка зрения на математический мир снова обретает право на существование, Ли Смолин ее отнюдь не закрыл. Однако Ли Смолин действительно поставил очень важный вопрос, касающийся природы объективности математического мира, и он будет более детально рассмотрен нами в следующем разделе статьи. Однако здесь хотелось бы отметить, что позиция Ли Смолина требует одного существенного уточнения.

Смолин рассматривал природу математики в упомянутой статье в связи со своей идеей о существовании единого фундаментального времени, отличного от локального времени

40 Заметим, что на самом деле никакой логической связи между «последовательным платонизмом» и верой в его вневременную природу нет (если только под платонизмом понимать идею об объективном существованием мира математических форм, но не иметь в виду в точности точку зрения самого Платона). Объективный мир математики вполне может мыслиться как динамическая структура, что подробно обсуждается в настоящей статье.

общей теории относительности, отличного от приближенного космологического времени моделей Фридмана-Робертсона-Уокера и вообще не имеющего никакого ясного контрагента в современной физике. Это фундаментальное время очень близко по сути абсолютному времени Ньютона, и основная идея Ли Смолина заключалась в том, что фундаментальные законы физики могут зависеть от такого фундаментального времени. Когда Смолин писал о зависимости объективного мира математики от времени, он тоже имел в виду именно это спекулятивное фундаментальное время. Ввиду очень высокой степени спекулятивности использованного им понятия времени, его мысль о возможной зависимости математики от фундаментального времени является просто не очень понятной. Неясно, что в точности может быть аргументом такой зависимости, так как о подходящем фундаментальном времени пока не известно ничего определенного[41]. Однако идее Ли Смолина можно придать более простой и ясный смысл. Надо вместо зависимости мира математических форм от спекулятивного фундаментального времени поставить вопрос о возможной его зависимости от пространственно-временной области, или даже точки, для которой данный платоновский мир определен (такой же вопрос можно поставить и в отношении фундаментальных законов физики). Пространственно-временные области и точки являются ясно определенными геометрическими объектами во всех современных областях физики, включая ОТО[42], и вопрос о зависимости чего бы то ни было от пространственно-временных координат является, во всяком случае, осмысленным. В частности, изобретение шахмат имело четкую пространственно-временную привязку, и появление игры может оказывать причинное влияние на внутреннюю часть светового конуса будущего, берущего начало в точке изобретения. Вопрос о том, существует ли «шахматная математика» только внутри конуса будущего точки пространства-времени, отвечающей событию изобретения шахмат, или вообще везде, является вполне осмысленным.

Можно заметить, что обсуждаемый Смолиным вопрос выглядит наиболее актуально для специального подмножества мира математических форм, которое отвечает математическим формулировкам реальных физических законов и другим математическим моделям, имеющим отношение к чему-то реально существующему в материальном мире. Можно ли говорить о существовании некоторого физического закона вне той пространственно-временной области, где он реально работает? Можно ли говорить о существовании законов атомной физики до того, как во Вселенной возник первый атом? Например, на стадии кварк-глюонной плазмы, вскоре после горячего Большого взрыва, когда никаких устойчивых атомов существовать не могло? Вопрос отнюдь не тривиален. Определенные физические постоянные, от которых зависят законы атомной физики, возникли после нескольких нарушений симметрии при охлаждении Вселенной. Но возможность нарушения симметрии «потенциально» существовала уже и на стадии кварк-глюонной плазмы и даже раньше, она была закодирована в фундаментальных законах физики, которые реально действовали в это время, и продолжают в «скрытой» форме действовать и сейчас (именно, в форме, когда фундаментальная симметрия этих законов скрыта спонтанным нарушением симметрии). В этом смысле законы атомной физики, как будто, существовали в виде некоторой потенции. Все они, в принципе, могут быть «вычислены», если стартовать с более общих законов физики периода кварк-глюонной плазмы, или еще более ранних. Не, думаю, однако, что договорившись о «потенциальном существовании», мы что-то на самом деле поняли. А существовали ли законы шахмат (в потенции?) в момент Большого взрыва? А математические законы рынка? Уже сейчас мы можем сформулировать альтернативу, которую будем обсуждать и дальше: 1) либо объективный мир математических форм весьма напоминает физическое поле, имея явную

41 То же самое можно сказать и о рассматриваемой Ли Смолиным зависимости фундаментальных законов от фундаментального времени.

42 Кроме квантовой гравитации, где, правда, рано говорить о каких-то законченных теориях. Наш анализ ограничен классическими представлениями о пространстве-времени.

пространственно-временную привязку, 2) либо он имеет абсолютное внепространственное-вневременное существование, но тогда мы должны допустить, что законы рынка вместе с правилами шахмат существуют уже в момент Большого взрыва. Пока может показаться, что первый вариант явно более предпочтителен, так как следствия второго варианта кажутся «абсурдными». Но ниже мы покажем, что и первый вариант ведет к не менее «абсурдным» следствиям.

5. Как существует мир математических форм? Физика математики.

В предыдущих разделах мы рассмотрели аргументы в пользу того, что объекты математики обладают вполне независимым собственным существованием до и независимого от того, были они кем-то выдуманы или открыты, или нет. По нашему мнению, эти аргументы очень весомы, и есть все основания считать, что мир математики объективно реален. Можно сказать, что мир математики образует семантический слой объективной реальности. Выше мы показали, что осмысленным является вопрос об однородности или статичности этого мира в смысле возможной его зависимости/независимости от пространственно-временных областей. Теперь мы затронем вопрос о том, как именно протекает это независимое объективное существование мира математики с физической точки зрения, от какой физики оно может зависеть, и какие характерные возникающие здесь проблемы трудно обойти. Как будет видно, этот вопрос снова вернет нас к вопросу о пространственной однородности мира математики.

Очень часто считается (более или менее явно), что математика является «продуктом чистого разума», миром «чистых платоновских форм», и не имеет никакой материальной (физической) основы. В частности, ни Роджер Пенроуз, ни даже Ли Смолин в упомянутых выше работах не рассматривают ничего похожего на вопрос о «материальном носителе» мира математических форм или вообще о каких-либо физических основах этого сорта объективной реальности. Однако внимательный анализ показывает, что представление о «чисто идеальной» природе математики является далеко не очевидным.

Подойдем к вопросу о связи мира математических форм с физической реальностью со следующей методологической установкой. Не будем пытаться рассматривать какие-либо спекулятивные концепции вроде попытки отгадать, какие известные или предполагаемые физические поля могут быть реальными носителями семантического слоя реальности (что, по-моему, абсолютно бесперспективно), или что-либо подобное. Напротив, постараемся вычленить те связи, которые представляются практически совершенно несомненными и неизбежными вне каких-либо спекуляций.

Математические доказательства или вычисления по своей сути являются *процессами преобразования информации*. Аксиомы или иные входные данные, имеющие недвусмысленное информационное содержание, посредством процесса доказательства или вычисления перерабатываются в результат – доказанную теорему или результат вычислений, также имеющий информационную природу. Точнее говоря, именно таким способом сформирован интерфейс математики с материальным миром. Ключевыми здесь являются понятие информации и понятие процесса, откуда немедленно вытекает связь мира математических форм с физической реальностью, причем связь двух различных типов.

Первый тип связи имеет отношение к природе информации. Существуют различные определения информации, но любое определение предполагает, что информация может быть каким-то образом зафиксирована, хотя бы временно: она может передаваться по каналу связи, быть записана для хранения и т. д. Понятие информации предполагает (хотя бы в принципе) существование физических носителей информации. По крайней мере с операциональной точки зрения бессмысленно говорить об информации, существующей самой по себе, вне всякой связи с ее носителями. Бессмысленно говорить о существовании доказательства какого-либо математического факта, если это доказательство принципиально не может быть каким-то образом зафиксировано и представлено для объективного анализа (в частном случае этим носителем могут быть и мозги математика или, например, память компьютера). Таким образом, математика через понятие информации неявно апеллирует к существованию физических объектов определенного типа – носителей информации. Это обстоятельство не вызывает никаких сомнений: вне представления о физических носителях информации понятие математического доказательства теряет смысл.

Второй тип связи имеет отношение к понятию процесса. Фактически, мы уже касались этого сорта связей, когда во втором разделе статьи обсуждали аналогию между математическими доказательствами и экспериментальными методиками. Любое доказательство или вычисление мыслится не только как мертвая информация, которая может быть зафиксирована на носителе, но и как причинный процесс, который может быть развернут в пространстве-времени. Подчеркнем, что имеется в виду причинный процесс в классическом, не квантовом, понимании – когда причина определяет следствие однозначно[43]. Это обстоятельство наиболее ярко подчеркнуто в представлении об абстрактной машине Тьюринга, как универсальном средстве реализации вычислений и доказательств, где центральным пунктом определения является последовательность причинно связанных шагов машины. Реальные работающие вычислительные машины являются лучшей тому наглядной и осязаемой иллюстрацией. Каждый последующий шаг любого вычисления или доказательства должен быть причинно связан с предыдущим (или несколькими предыдущими), и все это уложено в единую причинную цепочку, приводящую к результату[44]. Таким образом, понятие доказательства как процедуры, которая должна быть выполнена, явно апеллирует к понятию физической причинности, которое, в свою очередь, теснейшим образом связано с одномерностью времени и вообще с лоренцевой структурой пространтсвенно-временного континуума. В многомерном времени простой линейной причинности возникнуть не может, и, живи мы в многомерном времени, у нас, скорее всего, не могло бы возникнуть то понятие математического доказательства, которым мы пользуемся. Идея логического вывода, лежащая в основе представления о доказательстве, является абстракцией от физической причинности и одномерности времени, имеющих место в реальном мире, реально опирается на возможность причинных процессов при реализации вычислений, и вне представления о причинности теряет смысл. «Устройства», способные разворачивать доказательства как причинные процессы, будем называть ниже *вычислителями*. Частным случаем вычислителя являются, конечно, мозги математика. Таким образом, вместе с классической причинностью для осмысленного существования мира математических форм необходима принципиальная возможность существования физических устройств особого рода – вычислителей.

Понятия доказательства и вычисления и, тем самым, математика вообще – оказываются не независимыми от физики. Осмысленное существование математики апеллирует к причинной структуре пространства-времени и к существованию физических объектов особого рода – носителей информации и вычислителей.

Ни одна из упомянутых физических предпосылок существования мира математических

---

[43] Когда мы здесь говорим о квантовой причинности, имеется в виду причинность стандартной (Копенгагенской) интерпретации квантовой механики. В этом случае считается, что причина (начальное состояние системы) определяет следствие (результат эксперимента) лишь вероятностным способом. Но в многомировой (Эвереттовской) интерпретации все результаты квантового эксперимента сосуществуют одновременно, а сама теория строго причинным способом описывает связь корреляций, возникающих в конечном состоянии, от начального состояния. Это означает, фактически, возврат к классическому понятию причинности, но на новом уровне (осуществленная мечта Эйнштейна – Бог не играет в кости).

[44] Реально доказательство чаще имеет структуру дерева, содержащего несколько цепочек, ведущих от исходных посылок, сливающихся по пути, и сходящихся, наконец, к корню – результату всего процесса. Это несущественное усложнение не играет принципиальной роли. Машина Тьюринга, в частности, проходит ветви доказательства последовательно, одну за другой, выстраивая весь процесс в линейную цепочку. Параллельный компьютер может проходить ветви одновременно. Тезис Тьюринга-Черча говорит о том, что все такие способы эквивалентны.

форм не является тривиальной. Например, в теоретической физике время от времени появляются модели, содержащие многомерное время[45]. Немедленно возникает вопрос: а может ли существующая математика, основанная на одномерной линейной логике и причинности[46], быть адекватной для описания таких миров?

Тот факт, что физические носители информации и вычислители действительно могут существовать, тоже отнюдь не является тривиальным. Дело в том, что носитель информации обязан быть классическим (не квантовым) и качественно хорошо определенным объектом: только в этом случае и будет принципиально возможна воспроизводимая запись и считывание информации[47], фиксация хода и результатов доказательств или вычислений, что обязательно подразумевается в математике. Почти то же самое можно сказать и о вычислителях. Вычислители должны быть качественно хорошо определенными классическими устройствами или, как минимум, они должны проходить через последовательность классических состояний в процессе вычислений (подробнее см. ниже).

Под качественной определенностью классического объекта мы понимаем возможность существования в нем относительно стабильных классических неоднородностей, которые могут использоваться для записи информации или фиксации состояний. Однако не все объекты нашего мира являются классическими и качественно определенными в этом смысле. Более того, материальные объекты, вообще говоря, описываются только квантовой механикой, а существование классических объектов связано с тем, что в некоторых случаях в квантовой теории существует весьма нетривиальный классический предел квантового поведения. Таким образом, существование информации вообще, и такого важного аспекта математики, как доказательства и вычисления в частности, связаны с нетривиальным фактом существования классического сектора и качественно определенных классических объектов в квантовом физическом мире.

Заметим, что представление о неразрывной связи природы математики с классическими носителями информации и классическими вычислителями обладают определенной эвристической силой и заставляют несколько по-новому взглянуть на семантический слой реальности. Так, априори ниоткуда не следует, что *каждый* шаг математического доказательства должен быть зафиксирован на классическом носителе для того, чтобы сделать доказательство воспроизводимым. Достаточно, чтобы было классически (информационно) зафиксировано внешнее описание квантового процесса (по сути – экспериментальной процедуры), приводящего к переходу от одного классически фиксированного шага доказательства к следующему (или вообще от исходных посылок к результату). Промежуточные квантовые операции могут в принципе быть реализованы и без фиксации на каких-либо носителях с помощью некоторого идеального устройства – «квантового вычислителя» – квантового аналога машины Тьюринга или эквивалентного квантового алгоритмического автомата. Это порождает обобщение понятия доказательства (или вычисления) и приводит к представлению о квантово-классической математике. Квантово-классическая математики не может быть представлена «на бумаге», она может быть представлена только в работе «квантового вычислителя». Таким образом, в семантческом слое реальности помимо обычной математики должен существовать квантово-классический

---

[45] См. например: Yu. F. Pirogov. Symplectic vs pseudo-Euclidean space-time with extra dimensions. arXiv:hep-ph/0105112 (2001); George A.J. Sparling. Spacetime is spinorial; new dimensions are timelike. arXiv:gr-qc/0610068 (2006); Shun-Zhi Wang. Hexad Preons and Emergent Gravity in 3-dimensional Complex Spacetime. arXiv:1007.0067 [gr-qc] (2010)

[46] Линейной причинностью мы будем называть такую ситуацию, когда между двумя событиями либо нет никакой причинной связи, либо одно причинно предшествует другому. В многомерном времени, вообще говоря, линейной причинности нет.

[47] Для квантовых объектов копирование информации запрещено теоремой неклонирования состояния (no-cloning theorem): вообще говоря, невозможно создать копию квантового состояния, не разрушив исходное состояние. См.: W.K. Wootters and W.H. Zurek, A Single Quantum Cannot be Cloned, Nature, V.299 (1982), pp. 802–803; М.Б. Менский, Человек и квантовый мир. Странности квантового мира и тайна сознания. Фрязино: Век2, 2007, стр. 301-304.

сектор. Важный вывод, который можно сделать из этого квантово-классического обобщения мира математических форм, состоит в том, что невозможно настаивать на том, что семантический слой объективной реальности исчерпывается математикой, понимаемой обычным образом, или даже квантово-классической математикой, как обобщением обычной математики. Нельзя ведь исключить возможность и других расширений. Другое, дело, что нашему объективному познанию доступна пока только обычная математика, и можно уже задуматься над квантово-классической математикой.

Физические основания математики не исчерпываются связью с классическими носителями информации, вычислителями и с классической причинностью. Еще несколько связей можно получить, если внимательно рассмотреть, что представляет собой математика на содержательном уровне. На самом фундаментальном уровне математика *содержательно* представляет собой исследование структур на множествах с помощью аппарата доказательств, основанного на математической логике[48] (программа Бурбаки[49]). Таким образом, в основе математики лежат три фундаментальные сущности: множество, логика, доказательство. По поводу доказательств и их связи с физикой несколько слов уже было сказано выше.

Понятие множества тоже неразрывно связано с представлением о качественно определенном классическом объекте (вещи) в отличие от объекта квантового. Только о классическом объекте можно с определенностью утверждать, принадлежит ли он, или нет, некоторой совокупности, и понятие множества становится в общем случае осмысленным только для классических объектов. Для квантовых объектов (таких, как фотон) понятие принадлежности к множеству в общем случае не определено (для фотонов по двум фундаментальным причинам: во-первых из-за полной неразличимости фотонов с одинаковыми наборами квантовых чисел, во-вторых из-за того, что многие физические ситуации характеризуются дробным или вообще неопределенным числом фотонов). Поэтому,

[48] С формальной точки зрения математика может быть представлена также как «игра» с преобразованием текстов по определенным формальным правилам (как в программе Гильберта). Но этот подход основан на полном устранении понятия содержания из математики, и в данном случае такой подход нас не интересует. Имеется точка зрения, что существенной альтернативой теории множеств при построении фундамента математики может быть теория категорий. Однако, понятие категории (см.: Р. Голдблат. Топосы. Категорный анализ логики. М.: Мир, 1983) явно строится как определенная структура над множествами – так же, как и другие абстрактные математические теории вроде теории групп и т. д. Категория *C* определяется двумя базисными множествами, называемыми множеством *C*-элементов и множеством *C*-морфизмов (морфизмы часто называются просто стрелками); для морфизмов вводятся определенные аксиомы (имеющее отношение к закону композиции морфизмов и определяющее так называемые единичные морфизмы) и т. д., – все как в обычной аксиоматической теории. Правда, вместо «множеств» при аксиоматическом определении категории говорят о «совокупностях», что, как мне представляется, не меняет сути. Поэтому, на мой взгляд, теорию категорий можно рассматривать как одну из частных структур в теории множеств. Особенностью данной ситуации является, правда, то, что среди всевозможных категорий имеется так называемая «категория множеств» (категория **Set**), в которой множество элементов совпадает с классом всех множеств, а морфизмы являются отображениями множеств друг на друга в обычном смысле. Такая категория оказывается тождественной всей теории множеств. В этом смысле теорию категорий можно считать включающей теорию множеств как частный случай. В общем, в некотором (не совсем простом) смысле теория категорий и теория множеств включают друг друга. Фактически, они эквивалентны. Это не противоречит тому, что на языке категорий могут быть построены структуры, как будто бы обобщающие понятие множества (например, нечеткие множества). Но это похоже на то, как на евклидовой плоскости могут быть реализованы модели неевклидовой геометрии (модель Клейна и др.), или как в метатеориях на основе классической аристотелевой логики строятся модели неклассических логик (см. более подробно далее по тексту).

[49] Н. Бурбаки по этому поводу пишет: «…если прежде могли думать, что каждая отрасль математики зависит от специфических интуиций, дающих ей первичные понятия и истины, и потому для каждой отрасли необходим свой специфический формализованный язык, то сегодня мы знаем, что, логически говоря, возможно вывести почти всю современную математику из единого источника – Теории множеств. Таким образом, нам будет достаточно изложить принципы какого-то одного формализованного языка, рассказать, как сформулировать на этом языке Теорию множеств, а затем постепенно, по мере того, как наше внимание будет направляться на различные отрасли математики, показывать, как они включаются в Теорию множеств.» - Н.Бурбаки. Теория множеств. М.: Мир, 1965, стр. 25.

если бы вся реальность имела чисто квантовый характер, но не имела бы классического сектора, понятие множества не могло бы сформироваться. Таким образом, понятие множества, подобно понятию доказательства, связано с физическим делением реальности на квантовую и классическую реальность или, более точно, именно с существованием классического сектора в физическом мире.

То же самое можно сказать и о логике. Математика использует классическую (аристотелеву) логику[50], которая отнюдь не обязана быть ни единственно возможной, ни априорной, но сформировалась на основе макроскопической классической (не квантовой) каждодневной практики человека (эмпирическое происхождение логики отмечал еще В. И. Ленин в своих «Философских тетрадях»). «Квантовая» практика, в принципе, могла бы сформировать совершенно другую логику. Таким образом, в основе математической логики также лежит деление физической реальности на классическую и квантовую. В дополнение к этому классическая логика, будучи явно связанной с понятием доказательства и вычисления, является, фактически, также абстракцией от линейной причинности физического мира, как это уже было отмечено выше. То, что, понятие логического следствия, импликации, явно апеллирует к понятию причинности, особенно хорошо видно, если вспомнить машину Тьюринга как универсальный инструмент реализации логических выводов, работа которой имеет существенно причинный характер.

Статус понятий множества и логики как предельных обобщений физического понятия «классического мира» (в отличие от «квантового мира»), был понят давно. Возникла идея, что парадоксы квантовой механики связаны с неадекватным использованием классической логики и теории множеств в области, лежащей за пределами их границы применимости. Это привело к многочисленным попыткам введения «квантовых множеств», «квантовой логики» и даже «квантовой математики», которые восходят еще к Дж. фон Нейману и Дж. Биркгофу (1930-е годы)[51]. Эти попытки были основаны на предшествующем опыте, который показал, что геометрия мира, которая долгое время представлялась евклидовой и априорной, на самом деле такой не является, но имеет экспериментальный статус (в общей теории относительности). Особенно четко эту идею представил Хилари Патнэм[52]. По аналогии, понятия множества и логики, лежащие в основании математики, должны иметь

---

[50] Некоторые исследуемые в математике «неклассические» логики, связанные с обобщением понятия истинности (многозначные, нечеткие, модальные и т. д.) представляют собой некоторые модели в обычной аристотелевой логике, но не определяют полные логики в точном смысле этого слова. В обычной двузначной аристотелевой логике есть только два значения истинности, и вполне понятно, что, например, про определенный математический символ всегда можно сказать с определенностью, записан он на бумаге в данном месте, или нет. В последовательной, «настоящей» многозначной логике на вопрос о том, представлен ли данный математический символ в данном месте текста, должна быть обеспечена возможность дать ответ не только в форме «да-нет», а приписать присутствию символа произвольный стат. вес или модальность, как того требует расширенный набор истинностных значений. Т. е. сами математические тексты должны стать чем-то многозначным. Такие объекты люди помыслить, видимо, неспособны, и работать с ними невозможно. Поэтому и «настоящих» многозначных логик нет. В аристотелевой логике логический метаязык исследователя и логика исследуемой системы согласованы между собой. В различных многозначных логиках это невозможно обеспечить. «Квантовые» логики вообще не являются логиками, так как не поддерживают понятие дедукции (или, как минимум, с определением этого понятия есть большие проблемы). Они являются алгебрами специального вида (аналогами булевой алгебры). Впрочем, см. возражения: M. Pavicic, N. D. Megill. Is Quantum Logic a Logic? arXiv:0812.2698v1 [quant-ph] . Интуиционистские и конструктивные логики являются лишь подмножествами обычной аристотелевой логики, запрещая некоторые виды «сомнительных» рассуждений (как закон исключения третьего и некоторые другие), но ничего не добавляя.

[51] Birkhoff, G. von Neumann, J.: 1936, The logic of quantum mechanics,Annals of Mathematics V.37, 823–843. Современный обзор концепций квантовой логики см.: M.L. Dalla Chiara, R. Giuntini. Quantum Logic. arXiv:quant-ph/0101028v2

[52] H. Putnam. Is Logic Empirical? Boston Studies in the Philosophy of Science, vol. 5, eds. Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky (Dordrecht: D. Reidel, 1968), pp. 216-241. См. также: Guido Bacciagaluppi. Is Logic Empirical? in D. Gabbay, D. Lehmann and K. Engesser (eds), Handbook of Quantum Logic (Amsterdam: Elsevier, 2009), pp. 49-78 (also under http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00003380/)

экспериментальный статус. Точнее говоря, понятие множества и аристотелева математическая логика в предельно обобщенной форме представляют физику, соответствующую классическому сектору мира, и в общем случае не соответствуют более общему квантовому поведению. Именно, множество и логика отражают возможность деления материального мира на качественно определенные подсистемы – «локальные объекты», которая вовсе не следует из априорных соображений.

Однако программа «квантовой логики» не привела к какому-либо существенно новому пониманию квантовой механики. Постепенно стало ясно, что эта программа приводит только к одной из возможных эквивалентных формулировок квантовой теории, и обычная «классическая» математика остается вполне эффективной и в квантовой области. Почему математика, основанная на классических понятиях множества и логики, остается эффективной в квантовой области, остается загадкой. Этот факт не может не вызывать удивления. Эта загадка является некоторым уточнением вопроса о «непостижимой эффективности математики в естественных науках»[53]. То, что математика эффективна в макроскопическом классическом секторе физики, не вызывает столь глубокого удивления[54], так как математика через понятия множества и аристотелевой логики по построению является предельно обобщенным представлением классических свойств окружающей действительности и причинности. Теория множеств и математическая логика – не абстрактные математические понятия, а только предельно общие математические модели, апостериорным способом соответствующие совершенно реальной физике[55]. Теория множеств так же приблизительно описывает возможность выделения подсистем-объектов из окружающей действительности и объединение их в совокупности, как евклидова геометрия приблизительно соответствует реальной геометрии пространства. Насколько приближенным или точным является понятие причинности, абстрагированное в логике, неизвестно до сих пор (но сомнения в точности имеются).

Это наводит на мысль, что решение проблемы эффективности математики в квантовой физике можно попытаться искать в следующем направлении. Вся известная нам квантовая динамика, в принципе, представима через поведение классических приборов, как на то указывал Нильс Бор. С формальной точки зрения квантовая механика описывает поведение классических приборов в некоторых специальных экспериментальных ситуациях, и ничего более. Эти ситуации называются «приготовлениями квантовых систем» и «измерениями над квантовыми системами», но ничто не может нас заставить называть их именно так, если мы того не захотим. Однако поведение любых классических приборов принадлежит классическому сектору физики и органически связано с обычной «классической» математикой, как это было указано выше. Может быть, только поэтому при исследовании квантовой реальности мы не встречаемся с ситуацией, когда обыкновенная математика оказывается нерелевантной. То есть, математика эффективно работает при описании классического интерфейса к квантовой физике, но не квантовой физики «самой по себе». С этой точки зрения мы не можем исключить, что за «кулисами», которые представляются

[53] Е. Вигнер. Непостижимая эффективность математики в естественных науках. УФН, Т. 94, Вып. 3 (1968), с.535-546.

[54] Но удивление, все же, вызывает. Хороший пример приведен в цитированной выше статье Евгения Вигнера. Для изучения законов демографии часто удобно пользоваться гауссовым распределением вероятностей, значения которого выражаются через число π. Но какое отношение народонаселение может иметь к длине окружности?

[55] Конечно, понятия логики и множества не были получены явным применением каких-либо экспериментальных процедур. Эти понятия возникли как производные от человеческой интуиции, но сама интуиция отнюдь не является априорной – она была выработана в процессе биологической и, затем, социальной эволюции в целях адаптации к окружающей действительности и выживания в ней. В качестве таковой интуиция апостериорным образом отражает наиболее базовые отношения объектов, которые встречаются в практике, которая является существенно макроскопической и классической. То есть, в роли «экспериментальной процедуры» здесь выступает вся эволюция, которая просто методом отбора создает соответствие интуиции и реальности.

интерфейсом к классическим приборам, существует какая-то «скрытая» квантовая динамика, для которой «классическая» математика, основанная на понятиях множества и аристотелевой логике, не является адекватной. Здесь может быть царство «истиной» квантовой логики и квантовой математики. Однако существование такого «скрытого» сектора, по самому его определению, не имеет операционального смысла, так как наблюдаемость в обычном смысле связана только с классическими приборами. Поэтому в рамках обычной научной методологии этот скрытый сектор должен признаваться лежащим вне науки. Он остается столь же для нас недостижим, как Кантовская «вещь в себе».

Однако, насколько действительно необходимой является связь «наблюдаемости» квантового мира с «классическим интерфейсом»? Такая связь совершенно неустранима для науки, понимаемой обычным способом (см. *Методология космологии*), но она не является априорно единственно возможной. В частности, М. Б. Менский развивает квантовую теорию сознания[56] (или, лучше сказать, квантовую теорию объединения сознания и физической реальности), в которой наряду с обычным квантовым измерением с помощью классического прибора рассматривается еще один способ контакта с квантовым миром. Одной из основных функций сознания в этой концепции (Расширенная Концепция Эверетта, РКЭ) является выбор квантовой альтернативы в ситуациях, аналогичных квантовому измерению, в контексте многомировой интерпретации Эверетта (см. цитированную книгу М. Б. Менского для подробностей). В этом смысле отсутствие бодрствующего сознания (сон, медитация) означает прекращение выбора квантовых альтернатив в ветвящемся Эвереттовском мире. Хотя, насколько я понимаю, отсюда логически еще не следует с необходимостью, что сознание непременно входит тогда в «информационный» контакт со всеми квантовыми альтернативами одновременно, а не просто погружается «в себя», но в РКЭ предполагается, что это может быть именно так, и М. Б. Менский аргументирует эту идею многочисленными соображениями как эвристического, так и практического характера. Во время такого контакта сознание ведет себя как существенно квантовая система. Вход в контакт со многими альтернативами одновременно может влиять на работу основной функции сознания как селектора альтернативы в том смысле, что «ознакомившись» со всем многообразием квантовых альтернатив, сознание селектирует среди них наиболее предпочтительную для себя (ведь селекция – функция сознания). Этот выбор может и не рефлексироваться на сознательном уровне. Что здесь действительно важно, так это то, что никаким эмпирическим способом невозможно ни доказать, ни опровергнуть того, что такая селекция имела место. Это обстоятельство недвусмысленно продемонстрировано М. Б. Менским в работах, посвященных РКЭ.

Мне всегда казалось недостатком РКЭ то, что в этой концепции отсутствует математическая модель того, как информация из многих квантовых альтернатив попадает в сознание, анализируется там, и фиксируется предпочтительная альтернатива. С чисто формальной стороны, проблема здесь состоит в том, как описать эту селекцию без нарушения когерентности волновой функции мира. В концепции РКЭ есть, правда, понятие «посткоррекции»[57], описывающее благоприятный выбор альтернатив сознанием (а также и жизнью вообще), но это описание имеет феноменологический характер (напоминает проекционный постулат квантовой механики), не описывая «динамического» механизма анализа альтернатив квантовым сознанием без нарушения когерентности.

В свете упомянутого выше предложения о пути решения вопроса об эффективности математики в квантовой области можно понять, в чем, в принципе, могла бы заключаться причина отсутствия «динамической» математической модели анализа альтернатив. Как было указано выше, причиной эффективности «классической» математики в квантовом секторе может быть то, что математика описывает поведение классического интерфейса к квантовому сектору, а не квантовый сектор «как таковой». Но ситуация анализа квантовых альтернатив

[56] М.Б. Менский. Человек и квантовый мир. Фрязино: «Век2», 2007.
[57] M. B. Mensky. Postcorrection and mathematical model of life in Extended Everett's Concept. arXiv:0712.3609, 2007.

квантовым сознанием, описанная М. Б. Менским, не предполагает никакого классического интерфейса. Все происходящее происходит в чисто квантовой области и, как было отмечено выше, на классическом уровне ни доказать, ни опровергнуть того, что анализ альтернатив и «коррекция выбора» произошли, невозможно. Поэтому аргумент, что «классическая» математика эффективна в квантовой области из-за того, что она описывает, на самом деле, только классический интерфейс к квантовой области, в рассматриваемой ситуации не работает. Поэтому, в рамках этой логики, нет никаких оснований считать, что «классическая» математика и математические модели, которые строятся на ее основе, будут эффективны в этой чисто квантовой ситуации. Потому, быть может, и построить математическую модель анализа альтернатив в обычном смысле в принципе невозможно, оттого ее и нет. Может быть мы впервые столкнулись с миром «истинно квантовой» логики и квантовой математики, с миром, в котором обычная математика (и логика) утрачивает свою «непостижимую эффективность». С нашей внешней классической точки зрения эта ситуация вполне может восприниматься как нечто, не укладывающееся в рамки логики, что-то абсолютно иррациональное.

Однако, не впадаем ли мы в ересь? Напомним и подчеркнем еще раз, что представление о «наблюдаемости» вне контакта с классическими приборами находится за пределами обычно понимаемого научного метода. Это же можно сказать о значительной части концепции РКЭ М. Б. Менского и всего приведенного здесь в связи с этой концепцией анализа. Однако, по нашему мнению, рано было бы говорить, что все это находится вообще вне науки. Стандартным образом понимаемый научный метод оказывается слишком тесным в современных исследованиях во многих случаях. Этот вывод следует, прежде всего, из анализа методологии современной космологии. В рамках строго и догматически понимаемого научного метода современная космология работать не может. В частности, там обязательно приходится иметь дело с операционально неопределимыми (т. е. ненаблюдаемыми) вероятностями и другими объектами, не имеющими ясного операционального смысла. Мы подробно аргументировали это в *Методологии космологии*. Это приводит к представлению о существовании границы применимости стандартной научной методологии, основанной на строгом принципе наблюдаемости, и констатацией того, что выход за эти границы уже произошел, и, более того, привел к чрезвычайно впечатляющим результатам вроде предсказания анизотропии космологического микроволнового фона. Приходится с чрезвычайной, конечно, осторожностью, и только по мере крайней необходимости прощупывать возможности выхода за эти границы. Концепция М. Б. Менского с этой точки зрения представляет собой очень интересный «пробный камень».

Резюмируем. Все три фундаментальные сущности, лежащие в основе математики — множество, логика, доказательство — неразрывно связаны с возможностью выделения в физической реальности классического сектора и классических качественно определенных объектов. Помимо этого, логика и понятие доказательства прямо связаны с физической причинной структурой нашего мира. Возможность существования классического сектора и линейная причинность есть физическая основа существования математики.

6. «Где» существует математика?

Что же мы получили? Никакого материального носителя семантического слоя реальности, в котором существует математика, в буквальном смысле, мы не обнаружили, но нашли материальные связи иного порядка. Объективно существующий мир математических форм для нас, мыслящих существ и наблюдателей, не может проявить себя никак иначе, кроме как будучи кодированным классической информацией на некоторых материальных носителях, причем предполагается, что математические доказательства, записанные на носителях, могут мыслится как программы, кодирующие реальные причинные процессы, выполняемые классическими же вычислителями.

Вряд ли существованию мира математики можно было бы придать хоть какой-то смысл, если бы физические носители информации и вычислители принципиально отсутствовали. Именно в этом[58], с чисто операциональной точки зрения, заключается связь мира математики с физической реальностью. Здесь явно напрашивается аналогия. Роль классических носителей информации и вычислителей в отношении мира математики весьма напоминает роль классического прибора в отношении квантовых объектов. Действительно, структура мира математики может быть проявлена для нас только будучи представленной на классических носителях информации и процессами доказательств, реализуемых классическими вычислителями; структура квантового мира может быть выявлена только будучи представленной показаниями классических приборов[59]. Если продолжить эту аналогию, то можно выстроить такую цепочку заключений. В квантовой теории работает принцип наблюдаемости: что ненаблюдаемо, то и не существует объективно. Этот принцип показал свою исключительную плодотворность в понимании сути квантовой теории: поскольку точные значения импульса и координаты частицы одновременно не могут быть измерены, то они одновременно просто не существуют, и т. д. В отсутствие классических материальных носителей информации и вычислителей идеальный мир математических форм утратил бы контакт с материальным миром. Он стал бы принципиально ненаблюдаемым. Это как будто бы, и по аналогии с опытом квантовой теории, должно быть эквивалентно тому, что мир математики в этом случае просто не существует, подобно тому, как в квантовой теории для частицы не существуют одновременно точные значения координаты и импульса. Однако поспешных выводов делать не следует.

Квантовые объекты обыкновенной квантовой механики являются объектами «лабораторными» и, более того, в большинстве случаев микроскопическими (за исключением некоторых очень специальных макроскопических объектов вроде токов в сверхпроводниках, скореллированных пар частиц с большими базами, и некоторых других). Для таких объектов простой и ясный смысл имеют понятие наблюдаемости и понятие воспроизводимости измерений[60]. Но мир математики – это нечто совсем иное. Это не объект лабораторного исследования. Как подробно аргументировалось в *Методологии космологии*, наблюдаемость и воспроизводимость наблюдений в космологии (вообще говоря), где Вселенная тоже не является лабораторным объектом, утрачивает свой простой смысл, и связь наблюдаемости с существованием объекта может становиться существенно более сложной и опосредованной (мы уже упоминали выше это обстоятельство в связи с концепцией М. Б. Менского). Из-за этого существованию некоторых прямо не наблюдаемых объектов (в *Методологии космологии* упоминались «другие вселенные» Мультиверса инфляционной космологии и операционально неопределимые космологические вероятности) можно и нужно придавать определенный смысл. Между миром математических форм и космологией может существовать в этом смысле глубокая аналогия. Она может заключаться в том, что и в отсутствии материальных носителей информации и вычислителей остается возможность «существования» мира математических форм в каком-то специальном («высшем») смысле, подобно тому, как приходится допускать существование прямо не наблюдаемых и операционально неопределимых объектов космологии. Мы, однако, пока не можем сказать ничего определенного по поводу того, что именно это за «высший» смысл. Попробуем поэтому для начала придерживаться более прямолинейной точки зрения, согласно которой отсутствие операционально определенной связи мира математики с физической реальностью в гипотетическом случае отсутствия материальных носителей информации и вычислителей должно было бы означать просто отсутствие самого мира математики.

[58] Точнее, как минимум в этом. Просто эта связь выглядит совершенно несомненной и необходимой, в то время как нельзя исключить и существование других связей, которые пока ускользнули от анализа.

[59] Можно сказать, что мир математических форм – это та часть семантического слоя реальности, которая допускает отображение в материальный мир в форме науки – математики.

[60] Напомним, что наблюдаемость и воспроизводимость в квантовой области ясный смысл имеют только для ансамблей.

Такой подход немедленно приводит к следующему вопросу. Существование классического сектора и классических качественно определенных объектов не является обязательным атрибутом Вселенной. Это обстоятельство следует из современных космологических представлений (см. недавние обзоры и монографии[61]), причем по крайней мере по двум разным причинам. Во-первых, на самых ранних стадиях развития нашей собственной Вселенной условия были таковы, что ни носители информации, ни, тем более, вычислители, существовать не могли: либо классического сектора реальности еще не существовало – существенно всё пребывало в квантовом режиме, либо мир пребывал в состоянии вакуума (на стадии инфляции в инфляционной космологии). Во-вторых, в рамках представлений инфляционной космологии и в рамках многомировой интерпретации квантовой космологии (см. детали в цитированных выше обзорах и книгах по космологии, а также в наших статьях[62]) возникает представление о многих вселенных с различными свойствами – о Мультиверсе. В рамках этих представлений локальные вселенные в принципе могут обладать различной физикой, могут существовать и такие вселенные, в которых классический сектор с нужными свойствами не образуется на протяжении всей истории ее существования, или, например, время оказывается многомерным, исключая линейную причинность. Релевантна ли такому «локальному» миру математика и можно ли его охарактеризовать информационно, несмотря на то, что математика и информация не могут быть определены «внутри» такой вселенной из-за принципиального отсутствия носителей информации, вычислителей и т. д.? Релевантна ли математика ранним стадиям эволюции нашей собственной Вселенной? Оставаясь в рамках той логики, в рамках которой мы договорились пока работать (ненаблюдаемо – не существует) мы должны согласиться, что не релевантна. Как тогда следует расценивать наши действия, когда мы «миры без математики» пытаемся рассматривать с использованием математических моделей? Или достаточно иметь необходимые физические предпосылки существования математики хотя бы в одной какой-нибудь области пространства-времени Мультиверса для того, чтобы она в каком-то смысле существовала везде? Почему мы так должны думать?

Важно отметить, что этот сорт вопросов очень близок тому кругу проблем, который обсуждался в разделе 4 в связи с возможной зависимостью мира математических форм от пространственно-временной области, для которой он определен (на примере шахмат Ли Смолина). Там вопрос о структуре математической реальности ставился в зависимость от существования некоторых материальных объектов (например, атомов – чтобы существовали законы атомной физики) или некоторых событий (изобретение шахмат – чтобы существовала шахматная математика) в реальном мире. Когда мы рассматриваем существование классического сектора и классических носителей информации как предпосылку существования математики вообще, мы, по существу, ставим тот же вопрос о зависимости математической реальности от пространственно-временной области, но в предельно жесткой форме: рассматриваются такие физические условия, которые могут ограничить не только существование отдельных структур в математической реальности (вроде математики шахмат), но осмысленное существование мира математической реальности как таковой. Мы возвращаемся к уже упомянутой выше альтернативе, но в усиленной форме: 1) либо мы должны считать, что мир математических форм имеет вневременную и внепространственную природу – тогда, грубо говоря, законы рынка (и шахмат) в мире математических форм

[61] А.Д. Линде. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990; A. Linde. Inflationary Cosmology. arXiv:0705.0164 [hep-th], 2007; Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков. Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва. М.: Издательство ЛКИ, 2008; Те же. Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория. М.: КРАСАНД, 2010; В.Н. Лукаш, Е.В. Михеева. Физическая космология. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

62 А.Д. Панов. Методологические проблемы космологии и квантовой гравитации. В кн.: Современная космология: философские горизонты. Под. ред. В.В. Казютинского. М.: «Канон+» РООИ «Реабилитация», 2011. С. 185-215; Он же. Там же. Вероятностная интерпретация антропного принципа и Мультиверс. С. 270-294

существуют уже в момент горячего Большого взрыва и даже раньше, 2) либо мы должны допустить, что мир математики находится в зависимости от материального мира, тогда следует допустить существование областей пространства-времени, для которых математика вообще не релевантна. Если мы не хотим верить в то, что законы шахмат существуют уже в момент Большого взрыва, так как на этом этапе невозможно говорить о материальных объектах, которые описываются этими законами, то *следуя той же логике и в точности по той же причине* мы должны допустить существование областей без математики вообще по причине отсутствия других материальных объектов — потенциальных носителей информации или вычислителей. Мы пока не намерены настаивать на определенном выборе одной из возможностей, но если мы намерены придерживаться логики вообще, то, как нам представляется, надо признать, что иного выбора нет.

В действительности ситуация даже еще сложнее. Мы не упомянули еще два важных обстоятельства.

Во-первых, если мы хотим твердо следовать логике «ненаблюдаемо – не существует», то нужно учесть, что даже в случае существования физических носителей информации, в пределах любого горизонта событий (вроде видимой части нашей Вселенной) может быть представлен хоть и весьма большой, но принципиально конечный объем информации[63]. В этом случае математические объекты, которые для своего представления требуют объема информации большего, чем может быть представлено внутри данного горизонта, должны быть признаны несуществующими внутри этого горизонта, так как принципиально не могут быть определены операционально. Эта ситуация кажется совершенно неудовлетворительной, так как в математике (даже понятой финитно-конструктивно) определенно подразумевается возможность существования объектов сколь угодно высокой сложности, требующих для представления сколь угодно больших объемов информации.

Второе еще не упомянутое обстоятельство связано со связью математики и культуры. Принципиальная возможность существования носителей информации и вычислителей, способных воспроизводить причинные цепочки логических выводов, является необходимым условием возможности контакта мира математических форм с материальным миром, но не является достаточным условием. Сами по себе пассивные носители информации не станут вдруг представлять доказательства и прочие математические формы, а вычислителям тогда нечего будет воспроизводить. Для того, чтобы структуры мира математических форм переносились на носители информации, должен существовать посредник, который бы организовал процесс отображения математических форм на носители. Как известно, этим посредником являются субъекты познания, которые функционируют в контексте культуры. В этом смысле роль культуры вполне аналогична роли носителей информации и вычислителей. Культура вместе с носителями информации и вычислителями играют роль того «устройства», которое отображает содержимое идеального мира математических форм в реальном мире, подобно тому, как классический прибор проявляет структуру квантового мира (см. выше). При этом культура оказывается таким же необходимым компонентом, как и все прочие физические предпосылки математики. В этом смысле культура является равноправной «деталью» этого «устройства». Культура организует канал связи, по которому информация из идеального мира математики перекачивается и фиксируется на носителях. Неверно было бы сказать, что объективный мир математики существует в культуре. Мир математики существует объективно сам по себе, а культура, по крайней мере с формальной точки зрения, играет роль канала связи, передающего данные из мира математики на носители информации (в сознание людей в том числе). Если полученные математические «тексты» сами считать элементами культуры, то можно сказать, что культура отображает в себе в виде некоторых информационных паттернов фрагменты идеального мира математических форм. В качестве

[63] М.И. Гуревич. Законы информатики – основа исследований и проектирования сложных систем связи и управления. Методическое пособие. – М.: ЦООНТИ «Экос», 1989; 3. L. Seth. Computational capacity of the universe. arXiv:quant-ph/0110141 , 2001.

спекуляции можно упомянуть о возможности, что мир математических форм – это всего лишь та часть объективно существующего семантического слоя реальности, который способна в себе отразить культура, но семантический слой реальности не обязан исчерпываться только этим. Конечно, культура не только передает фрагменты мира математики на носители, но и делает это для каких-то своих внутренних нужд, у нее есть цели, но это уже не имеет прямого отношения к объективной природе математики, в которой никакие цели не прописаны. В качестве канала связи можно представить себе и что-то совсем другое, например устройство вроде автономного компьютера, которое бы занималось такой перекачкой чисто механически (например, доказывая одну теорему за другой в порядке их Гёделевской нумерации в какой-нибудь формальной системе), без всякой цели. Ниже мы упомянем еще одну очень важную разновидность «канала связи».

Связь математики с культурой ставит вопрос об областях пространства-времени, для которых существование математики является осмысленным, еще более остро. Так как для связи идеального мира математики с материальной действительностью (для «наблюдаемости» математики) нужна не только принципиальная возможность существования носителей информации и вычислителей, но и культура – канал связи или другое подобное «устройство», то, следуя все той же логике (ненаблюдаемо – не существует), мир математики может существовать только в областях, где есть такие «каналы связи». Означает ли это, что миры, существующие вне причинной связи с такими областями, не могут рассматриваться в рамках математических моделей? Как нам представляется, это начинает приближать состояние дел к абсурду (хотя мы далеки от мысли, что абсурдность такого результата действительно доказана). Что мы делаем, когда пытаемся строить что-то вроде математической модели Мультиверса как целого? Ведь не обязательно для всех областей Мультиверса в пределах их причинного горизонта найдется культура – канал связи, способная сделать идеальный мир математических форм проявленным. По крайней мере модель Мультиверса определенно не исключает такую возможность.

Анализ, представленный выше, склоняет нас к мысли, что для мира математических форм статическая вневременная и внепространственная мода существования выгладит несколько более предпочтительной, чем какая-либо зависимость от пространства-времени и обыкновенной материи, в духе предположения Ли Смолина. Если мы признаем за миром математики внерменное-внепространственное существование, то, значит, прямолинейный аргумент типа «ненаблюдаемо – не существует», не работает. Это не должно удивлять, так как, повторим, похожая ситуация имеет место в космологии (см. *Методология космологии*). Но тогда – если математические законы рынка существуют сейчас, то они существовали и в момент Большого взрыва! И шахматы тоже не были выдуманы. Правила игры были только выбраны из множества всех возможных правил математических игр, которое объективно существует в семантическом слое реальности само по себе, хоть мы и не знаем, какие еще замечательные игры там представлены. Такова логика, здесь нет никакого произвола. От парадоксальности ситуации не удается уйти.

Последний вопрос, который хотелось бы обсудить, связан с идеей, что физика выводима из чистой информатики, или, в несколько иной редакции, что информация первична, а физика вторична. 'It from bit' – от Джона Арчибальда Уилера, или ‘вначале был логос’ – от Иоанна. Эта идея столь же глубока, сколь и отношение к ней в физическом сообществе неоднозначно. Она предстает в самых разнообразных обличиях и имеет чрезвычайно обширную литературу, которая заслуживает отдельного обзора. Мы, однако, мы не будем пытаться здесь его дать[64], это увело бы слишком далеко от основной темы статьи. Отметим, что в нашей стране мысль о первичности информации последовательно отстаивает И.М. Гуревич[65] и очень к этому близка концепция семантического поля В. В. Налимова[66].

[64] Кратктий, но современный и регулярно обновляемый обзор этого направления можно найти в Википедии по адресу http://en.wikipedia.org/wiki/Digital_physics.

[65] И.М. Гуревич. Информационные характеристики физических систем. М.: 2009

Упомянем также две самые свежие статьи на эту тему из электронного архива препринтов[67], где можно найти и обзор. Тема представляется настолько актуальной, что виртуальный Институт Фундаментальных Исследований (FQXi, Foundational Questions Institute, http://fqxi.org/), объединяющий многих ведущих физиков с мировыми именами, в 2010-2011 гг. объявил конкурс научных работ на тему: «Является ли реальность цифровой, или аналоговой?»

Здесь мы остановимся только на одной стороне вопроса о первичности информации либо физики. Не противоречит ли идея, что информация первична, а физика вторична, тому, что информация требует наличия физических носителей (имеющих классическую природу), чтобы получить осмысленное существование в материальном мире? Казалось бы, чтобы говорить о возможности существования информации надо *сначала* иметь физические носители, устойчивыми неоднородностями которых можно кодировать информацию. Информация может быть только вторичной по отношению к физике. Однако, столь прямолинейное заключение было бы слишком поспешным. Действительно, мир математики заведомо имеет информационную природу (вычисления по сути есть процессы преобразования информации), но, как мы видели, попытка связать его существование с фактическим наличием/отсутствием физических носителей информации приводит к трудноразрешимым парадоксам. Какая-то форма статичного, внепространственного и вневременного существования мира математических форм, в том числе в отрыве от существования реальных физических носителей информации, кажется более предпочтительной (хотя ведет к своим трудностям). Таким образом, хотя информация, вне всяких сомнений, первична по отношению к миру математики, очень возможно, что существование носителей информации не требуется для объективного существования математической реальности. Совершенно аналогично и по этой же причине нельзя исключить первичность информации по отношению к физике. Как минимум, мысль о первичности информации не выглядит абсурдной.

Отсюда, конечно, не следует, что информация действительно *является* первичной по отношению к физике в том смысле, что всю физику можно однозначно вывести из каких-то математических структур или информационных соображений чисто логическим путем. Действительным фактом является лишь следующее. Реальные физические законы действительно имеют математическую природу и, следовательно, имеют свои идеальные прообразы в объективно существующем мире математических форм. Можно сказать, что «явление» соответствующих математических структур в виде физических законов материального мира *весьма напоминает* (и не более того, мы не делаем более сильных утверждений) разновидность канала связи между идеальным миром математики и материальным миром подобно тому, как таким каналом связи является культура (хотя, конечно, природа этих каналов связи совершенно различна). Заведомо не все, что имеет место в мире математических форм, может иметь представление в структурах материального мира в виде физического закона или физической величины. Поэтому такой «канал связи» (если уж обсуждать эту концепцию) заведомо обладает ограниченной пропускной способностью. Например, разрывная в каждой точке функция Дирихле не может прямо соответствовать никакой связи между физическими величинами, поскольку физические величины не могут представляться вещественными числами с актуально бесконечной точностью[68]. Таким образом, канал «явления законов физики» определенно способен

[66] В.В. Налимов. Спонтанность сознания: Вероятностная теория смыслов и смысловая архитектоника личности. М.: Изд-во «Прометей», МГПИ им. Ленина, 1989; В поисках иных смыслов. М.: Издательская группа «Погресс», 1993.

67 J.-W. Lee. Physics from information. arXiv:1011.1657v1 [hep-th].; G. M. D'Ariano. Physics as quantum information processing. arXiv:1012.2597v1 [quant-ph]б, 2010. Не могу сказать, чтобы эти статьи меня в чем-нибудь убедили.

[68] Однако неверно было бы сказать, что функция Дирихле вообще не имеет никакого образа в физической действительности. Она представляется, например, текстом в учебнике по анализу.

проводить некоторую селекцию математических объектов как потенциальных законов физики, но большее утверждать трудно. Является ли ограничения пропускной способности этого канала связи настолько сильными, что они способны пропустить один-единственный вариант согласованной физики, и, тем самым, вся физика однозначно выводима из математики? Ответа на этот вопрос нет, но, на наш взгляд, важно уже то, что вопрос можно сформулировать в такой форме.

Несомненным является то, что хотя бы один такой согласованный набор, а именно, набор законов, представляющих нашу собственную Вселенную, действительно был пропущен через канал связи «явления физических законов». Следовательно, этот набор существует в идеальном мире математических форм, хотя неизвестно, является ли этот набор в своем роде единственным. И не видно никаких оснований для такого предположения.

Резюмируем. Объективная реальность распадается (как минимум) на материальный мир, который в современной науке представляется Вселенной в широком смысле слова (может включать или не включать Мультиверс и т. д. – в зависимости от космологических моделей и уровня анализа), и объективный семантический слой реальности, включающий в себя (как минимум) мир математических форм. Объективная реальность не тождественна материальной Вселенной, это нечто большее. Между миром математических форм и материальной Вселенной имеются нетривиальные связи. С одной стороны, мир математических форм содержит в себе некоторое подмножество, являющееся прообразом Вселенной в виде набора согласованных физических законов, которые ее описывают. Отношение этого прообраза к материальной Вселенной напоминает работу канала связи «явления физических законов», связывающего идеальный мир математики с материальным миром. С другой стороны, базисные ингредиенты мира математики, такие, как понятие множества и логического вывода, сами являются абстракциями или моделями определенных физических аспектов Вселенной, а именно, моделями качественной определенности классического сектора физики и классической причинности. В этом смысле существование физического классического сектора и причинности являются предпосылками осмысленности мира математических форм. Впрочем, не исключено (это является спекуляцией), что привычные нам понятия множества и логического вывода выделены из более широкого слоя объективной семантической реальности только нашей способностью взаимодействовать с семантическим слоем реальности и отображать его в фигурах культуры, а сам этот слой (в каком-то неопределенном пока смысле) может содержать и области, не связанные с этими понятиями, и для нас недоступные.

На данный труд меня в очень существенной степени вдохновили плодотворные идеи и постоянная поддержка многих моих друзей и коллег. Особенно я благодарен В. А. Анисимову, А.В. Болдачеву, Л. М. Гиндилису, И. М. Гуревичу, В. В Казютинскому и М. Б. Менскому, каждый из которых внес что-то существенно свое. Я благодарен также всем участником круглого стола «Космология и философия» в ИФРАН за обсуждение этой работы.

Работа поддержана грантом РГНФ №...