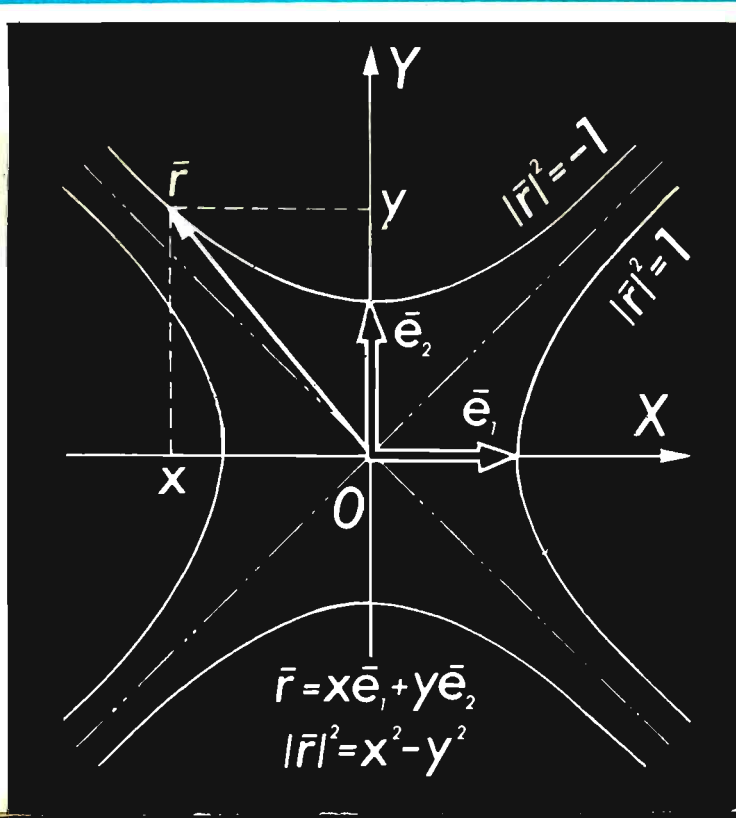


А. А. САЗАНОВ

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ МИР МИНКОВСКОГО



ББК 22.151.2
С14
УДК 514.764.82

Сазанов А. А. **Четырехмерный мир Минковского.**— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.— (Пробл. науки и техн. прогресса).— 224 с.— ISBN 5-02-013734-0

В широкодоступной форме развито понятие псевдоевклидова пространства, подробно рассмотрены его метрические свойства, показана возможность объяснить оба постулата Эйнштейна и все эффекты специальной теории относительности геометрическими соотношениями между мировыми линиями.

Для студентов физико-математических и технических специальностей вузов, научных работников, инженеров и всех интересующихся теорией относительности.

Ил. 34. Библиогр. 31 назв.

Сазанов Анатолий Анатольевич

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ МИР МИНКОВСКОГО

Серия «Проблемы науки и технического прогресса»

Редактор А. Ф. Липко. Художественный редактор Т. И. Кольченко.

Технический редактор С. Я. Шкляр.

Корректоры Т. С. Вейсберг, М. Л. Медведевская.

ИБ № 32619

Сдано в набор 28.10.87. Подписано к печати 12.04.88. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 11,76. Усл. кр.-отт. 11,97. Уч.-изд. л. 11,76. Тираж 17 000 экз. Заказ № 1163. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства «Наука»
630077 Новосибирск 77, Станиславского, 25

С 1702040000—105 59-88
053(02)-88

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1988

ISBN 5-02-013734-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. «Царский путь в геометрию»	7
§ 1. «Пусть не входит не знающий геометрии»	7
§ 2. Геометрические векторы и линейные операции над ними	10
§ 3. Отношения линейной зависимости и линейной независимости векторов. Размерность и базис пространства	15
§ 4. Абстрактное линейное пространство	24
§ 5. Линейные свойства наблюдаемого пространства	31
§ 6. Метрические свойства наблюдаемого пространства	35
Глава 2. Псевдоевклидова плоскость	45
§ 7. Повесть о числах, которые «в действительности не существуют»	45
§ 8. Линейные пространства комплексных чисел	57
§ 9. Двумерное псевдоевклидово пространство	58
§ 10. Геометрическая интерпретация множества комплексных чисел	61
§ 11. Измерение длин в псевдоевклидовой плоскости	70
§ 12. Отношение перпендикулярности прямых в псевдоевклидовой плоскости	76
§ 13. Измерение углов в псевдоевклидовой плоскости	80
§ 14. Преобразование координат в псевдоевклидовой плоскости	93
Глава 3. Геометрическое содержание специальной теории относительности	99
§ 15. Преобразование Лоренца	99
§ 16. О чем говорит сравнение преобразования Лоренца с преобразованием координат в псевдоевклидовой плоскости	105
§ 17. Мировые линии	120
§ 18. Явление распространения света	126
§ 19. Вектор массы	138
§ 20. Одновременность относительная и абсолютная	163

Глава 4. Трехмерное псевдоевклидово пространство . . .	175
§ 21. Строение трехмерного псевдоевклидова пространства	175
§ 22. Объяснение эффекта Комптона	182
Глава 5. Четырехмерный мир Минковского	187
§ 23. Гиперплоскости	187
§ 24. Изотропный гиперконус	193
§ 25. Наблюдаемое пространство	197
Приложение. Метрические свойства изотропной плоскости	216
Список литературы	223

ПРЕДИСЛОВИЕ

80 лет назад Герман Минковский предложил геометрическую интерпретацию специальной теории относительности. В наши дни знакомство с теорией относительности стало необходимым элементом общего образования, однако преподавание и понимание этой теории до сих пор затруднено тем, что ее математическое описание находится в противоречии с теми представлениями о пространстве и времени, которые базируются непосредственно на чувственных восприятиях и закрепляются в процессе изучения классической физики. Геометрия мира Минковского остается для неспециалистов труднодоступной абстракцией. Между тем к математическим знаниям, даваемым теперь средней школой и первым курсом вуза, надо добавить не много, чтобы развить представление о псевдоевклидовом пространстве.

Прежде всего требуется понятие абстрактного линейного пространства и его разновидности — евклидова пространства, умение различать линейные и метрические свойства пространства. Эти понятия являются исходными для построения геометрической теории. Без достаточно свободного владения ими и связанным с ними алгебраическим аппаратом нельзя преодолеть привязанность к привычной наглядности образов и проникнуть в мир форм, скрытых от непосредственного зрительного восприятия. Поэтому первая глава предлагаемой книги посвящена изложению необходимых сведений из линейной алгебры.

Другой барьер на пути к пониманию мира Минковского связан с комплексными числами. Поскольку они исключены из школьной программы, этот пробел восполняется во второй главе. Важно не только дать понятие комплексного числа, но и развить отношение к нему как к искусственной выдумке математиков, которая, обладая

логическими достоинствами, всё-таки не имеет оснований в реальном мире. Выясняется связь комплексных чисел с псевдоевклидовой плоскостью, подробно рассматриваются свойства псевдоевклидовой плоскости.

В третьей главе излагается геометрическое истолкование специальной теории относительности в рамках двумерного псевдоевклидова пространства. Минковский делает акцент на том, что за относительностью промежутков времени, расстояний и массы кроется инвариантность определенных характеристик материального мира в псевдоевклидовом пространстве. Он говорит: «термин „постулат относительности“ кажется мне слишком бледным... мне хотелось бы этому утверждению скорее дать название: *постулат абсолютного мира* (или кратко: *мировой постулат*)» [5]. Из выдвинутой Минковским модели мира могут быть получены в качестве следствий не только все релятивистские эффекты, но и оба постулата Эйнштейна. Таким образом, смещаются вглубь постулируемые основания теории: вместо утверждений, которые, будучи истинными, выглядят парадоксально на фоне классической картины мира, предложена новая картина мира. Она логически цельна, и выводы из нее прекрасно согласуются с надежно установленными экспериментальными фактами.

В четвертой и пятой главах рассматриваются трехмерное и четырехмерное пространства с псевдоевклидовыми метрическими свойствами. Показано, что мир, состоящий из мировых линий в четырехмерном пространстве Минковского, должен восприниматься в виде мира материальных точек, погруженных в трехмерное пространство.

Эту книгу я посвящаю светлой памяти моих родителей Анатолия Николаевича и Зинаиды Яковлевны Сазановых. Интерес к философским вопросам естествознания был для нас с отцом главным стержнем общения, и наши многолетние дискуссии стимулировали выработку по возможности ясного представления о том, как может быть устроен мир, описываемый теорией относительности.

А. Сазанов

«... историческое развитие всех наук только через множество перекрещивающихся и окольных путей приводит к их действительной исходной точке. В отличие от других архитекторов, паука... возводит отдельные жилые этажи здания, прежде чем она заложила его фундамент.»

К. Маркс [1]

§ 1. «Пусть не входит не знающий геометрии»

Древнегреческий философ Платон начертал над входом в свою школу, называвшуюся Академией: «Пусть не входит не знающий геометрии». Девятнадцать веков спустя Николай Коперник взял эти слова эпитафией к книге «О вращении небесных сфер». Предложенная Коперником картина мира резко противоречила внешней очевидности, мнениям авторитетов и господствующим религиозным догматам. Что же могло в то время склонить людей к новому взгляду на мир? Только то, что математические выводы из системы Коперника наилучшим образом согласуются с наблюдаемыми движениями небесных светил. Но чтобы понять этот довод и оценить его значительность, нужно знать геометрию и дать себе труд внимательно проследить аргументацию автора.

Открытиями Коперника, Галилея, Кеплера, Ньютона заложен фундамент стройного естественнонаучного мировоззрения, которое позволило глубоко проникнуть в сущность вещей. Но на определенном этапе развития физической теории и точного эксперимента стали обнаруживаться расхождения между ними, свидетельствующие о наличии принципиальных недостатков в исходных теоретических предположениях. Первоначально осознание этих недостатков и внесение поправок в теорию выразилось в

постулатах, обобщающих новые экспериментальные факты. Из постулатов Эйнштейна развилась теория относительности, из постулатов Бора — квантовая теория — два главных направления революции в физике XX в. Эта научная революция, подобно коперниканской, внесла радикальные изменения в наши представления об устройстве мира. Цель настоящей книги — рассмотреть те аспекты картины мира, которые могут быть выведены из специальной теории относительности.

Теория относительности возникла как разрешение крупных трудностей в понимании явления распространения света. Имевшиеся теоретические представления не могли примирить друг с другом некоторые надежно установленные экспериментальные факты (прежде всего явление абберации света и отсутствие «эфирного ветра», выявленное экспериментом Майкельсона — Морли) [6]. Альберт Эйнштейн постулировал в качестве исходных истина такие утверждения, которые противоречили принципам классической физики, но не противоречили экспериментальным данным, и стал выяснять, какие поправки к классическим воззрениям вытекают логически из его постулатов. В первоначальной формулировке постулаты Эйнштейна гласят:

«1. Законы, по которым изменяются состояния систем, не зависят от того, к которой из двух координатных систем, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, эти изменения состояния относятся.

2. Каждый луч света движется в „покоящейся“ системе координат с определенной скоростью V , независимо от того, испускается ли этот луч света покоящимся или движущимся телом» [7].

Из этих постулатов Эйнштейн сделал вывод, что длительность промежутка времени между двумя событиями и величина расстояния между двумя точками пространства должны быть разными в разных инерциальных системах координат, движущихся относительно друг друга. Парадоксальный вывод о непостоянстве пространства и времени (а вслед за ними и массы), считавшихся в классической физике фундаментальными абсолютными характеристиками мира, явился самой яркой чертой новой теории, что отразилось в закрепившемся за пей названием — теория относительности. До самого конца XIX в. в науке сохранялось убеждение в том, что мировое пространство в своей сущности таково, каким мы его воспринимаем посредством наших органов чувств. Самые характерные

черты чувственно воспринимаемого пространства заключаются в том, что оно имеет три измерения и описывается геометрической теорией Евклида. По современной терминологии оно так и называется: трехмерное собственно евклидово пространство. Но если мировое пространство действительно таково, то расстояния между его точками (размеры и формы тел) должны быть инвариантными, не зависящими от выбора системы отсчета. Герман Минковский понял, что чувственно воспринимаемое пространство — это только внешняя видимость, форма проявления иных геометрических свойств реального мирового пространства. «Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность», — так начал Минковский свой доклад на 80-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Кельне 21 сентября 1908 г. [5].

Как во времена Коперника трудно было принять вопреки внешней очевидности гелиоцентрическую систему мира, так в наше время нелегко понять и представить себе мир в пространстве, отличном от чувственно воспринимаемого. Для преодоления этого затруднения тоже необходимы познания из области геометрии, но более глубокие. Поныне сохраняет силу пророческая мысль Платона о том, что без геометрии нельзя постигнуть устройство мироздания: «Пусть не входит не знающий геометрии!» Но было бы неправильно думать, что понимание геометрии мира Минковского доступно только специалистам с высшим физико-математическим образованием. Существует легенда, будто властитель Египта Птолемей попросил Евклида изложить геометрию покороче и поскорей, на что Евклид ответил: «В геометрию нет царского пути». В наши дни расширение и дифференциация научных знаний сопровождается обобщениями, вскрытием немногих глубочайших понятий и связей между ними, позволяющих строить точное и лаконичное изложение теории. Развитие геометрии в этом направлении идет по пути ее алгебраизации. Видный современный французский математик Густав Шоке пишет: «...сегодня мы владем простым „царским путем“ в геометрию, ведущим через понятия „векторного пространства“ и „скалярного произведения“ ...Евклид положил в основу своей геомет-

рии на плоскости признаки равенства треугольников. Двадцать три века спустя математики определяют плоскость как аффинное пространство размерности 2 с заданным в нем скалярным произведением» [8]. Глубина аксиоматических построений, используемых в линейной алгебре (которая, по мнению другого авторитетного французского математика Жана Дьедонне, и есть элементарная геометрия), позволяет не только упростить изложенные известные геометрические истины, но и открывает новые возможности геометрических представлений. Если мы сможем выразить в немногих математических понятиях и соотношениях все существенные свойства чувственно воспринимаемого пространства, то поймем, как оно устроено, или, грубо говоря, каковы его основные «исходные компоненты». Тогда станет видно, как эти «компоненты» могут сочетаться в иных комбинациях, образуя иные типы пространств.

§ 2. Геометрические векторы и линейные операции над ними

Для математического описания пространства удобно пользоваться векторами. Этот объект достаточно прост и нагляден в чувственно воспринимаемом пространстве (где его называют геометрическим вектором) и вместе

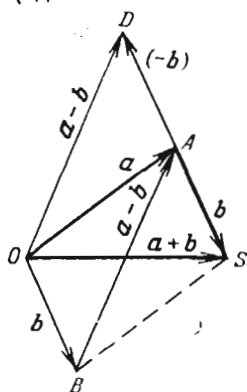


Рис. 1

с тем пригоден для далеко идущих обобщений. *Геометрическим вектором* называется направленный отрезок, т. е. отрезок прямой, для которого указано, какая из его граничных точек является началом и какая концом [9].

Слово *вектор* происходит от латинского глагола *vehere* — перевозить, перемещать. Английское слово *vehicle* того же корня обозначает любое перевозочное средство от телеги до космического корабля (*space vehicle*) [10]. Геометрический вектор указывает прямолинейный переход из одной точки пространства в другую. Из такого представления естественно вытекает определение операции сложения векторов (рис. 1). Если выполнить переход из точки O в точку A , выражаемый вектором $\mathbf{a} = \overline{OA}$, а затем добавить к нему переход из точки

А в точку S , выражаемый вектором $\mathbf{b} = \overline{AS}$, то результат двух переходов будет таким же, как прямолинейный переход из точки O в точку S , выражаемый вектором $\mathbf{s} = \overline{OS}$. Поэтому вектор \mathbf{s} называют *суммой* векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} и записывают операцию сложения векторов в виде алгебраического выражения

$$\begin{aligned}\overline{OA} + \overline{AS} &= \overline{OS}, \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{s}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Такой способ построения суммы векторов называют *правилем треугольника*.

Два вектора считаются *равными*, если посредством параллельного переноса можно совместить точки их начала и конца соответственно. При таком определении равенства векторов становится безразлично, в какой точке приложен вектор (какова точка его начала), и возникает понятие *свободного* вектора. Свободный вектор не имеет определенной точки начала, и мы имеем право представлять его приложенным в любой точке пространства по своему желанию. Совмещая на рис. 1 начало свободного вектора \mathbf{b} с началом вектора \mathbf{a} , построим параллелограмм $OASB$, для которого суммарный вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overline{OS}$ является диагональю, исходящей из общего начала складываемых векторов. Такой способ построения суммы векторов называется *правилом параллелограмма*.

Оба правила (треугольника и параллелограмма) выявляют важное свойство суммарного вектора — он лежит в одной плоскости с векторами-слагаемыми. Пользуясь латинским термином, говорят, что складываемые векторы и суммарный вектор *компланарны* («соплоскостны»). Для свободных векторов понятие компланарности расширяется: компланарные векторы могут и не лежать в одной плоскости, но существует плоскость, которой параллельны все они и в которую при желании их можно привести посредством параллельного переноса.

Частным случаем перехода из одной точки пространства в другую является отсутствие перехода. Тогда точка конца геометрического вектора совпадает с точкой его начала. Такой вектор называют *нулевым* и обозначают символом \mathbf{o} . Очевидно соотношение

$$\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a},\tag{1.2}$$

которое служит алгебраическим определением нулевого вектора. Нулевой вектор не имеет определенного направ-

ления в пространстве, и это позволяет приписывать ему любое направление, т. е. считать его параллельным любому другому вектору.

Особо следует отметить векторы, которые посредством параллельного переноса можно привести к совмещению обеих граничных точек, но не начала с началом и конца с концом, а начала одного с концом другого. Например, на рис. 1 вектор \overline{BO} равен вектору \overline{SA} , но не равен вектору $\overline{AS} = \mathbf{b}$. Вектор (переход) \overline{SA} противоположен вектору (переходу) \overline{AS} , и сумма их есть нулевой вектор:

$$\overline{AS} + \overline{BO} = \overline{AS} + \overline{SA} = \overline{AA} = \mathbf{o}.$$

Вектор, противоположный вектору \mathbf{b} , обозначим символом $(-\mathbf{b})$. Соотношение

$$\mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{o} \quad (1.3)$$

служит алгебраическим определением противоположного вектора. Очевидно, что для каждого геометрического вектора найдется противоположный ему вектор, удовлетворяющий соотношению типа (1.3). Нулевой вектор совпадает со своим противоположным.

Разностью векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется сумма вектора \mathbf{a} и вектора $(-\mathbf{b})$, противоположного вектору \mathbf{b} :

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}). \quad (1.4)$$

Вектор разности $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ является второй диагональю параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} (см. рис. 1).

Исходя из определения операции сложения геометрических векторов, легко показать, что она обладает переместительным (коммутативным) и сочетательным (ассоциативным) свойствами. Таким образом, мы уже познакомились с четырьмя свойствами операции сложения векторов:

1°. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ — коммутативность.

2°. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ — ассоциативность.

3°. $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}$ — определение нулевого вектора.

4°. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$ — определение противоположного вектора.

Сложение векторов — одна из линейных операций над векторами. Второй линейной операцией является умножение вектора на число.

Произведением геометрического вектора \mathbf{a} на вещественное число λ называется вектор

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}, \quad (1.5)$$

параллельный вектору \mathbf{a} и направленный в одну сторону с \mathbf{a} при $\lambda > 0$ и противоположно \mathbf{a} при $\lambda < 0$, причем абсолютная величина числа λ показывает, сколько раз отрезок \mathbf{a} укладывается на отрезке \mathbf{b} (рис. 2). Произведение вектора \mathbf{a} на число нуль есть нулевой вектор:

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}.$$

Любые параллельные векторы можно расположить с помощью параллельного переноса на одной прямой линии. Тогда они станут «солинейными», или, говоря по-латыни, *коллинеарными*. Поскольку свободные векторы не имеют определенной точки приложения, понятия коллинеарности и параллельности для них равнозначны. Если два вектора коллинеарны, то по крайней мере один из них может быть представлен в виде произведения другого вектора на вещественное число. Поэтому соотношение типа (1.5) является алгебраическим выражением коллинеарности векторов.

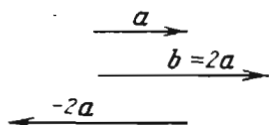


Рис. 2

Если в множестве всех параллельных друг другу и направленных в одну сторону векторов выбрать какой-нибудь *ненулевой* вектор \mathbf{a}° в качестве единицы измерения, то любой вектор \mathbf{a} из этого множества можно представить в виде произведения единичного вектора \mathbf{a}° на неотрицательное вещественное число, которое мы обозначим символом $|\mathbf{a}|$:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{a}^\circ. \quad (1.6)$$

Число $|\mathbf{a}| \geq 0$ имеет смысл длины вектора \mathbf{a} по отношению к вектору \mathbf{a}° . Число $|\mathbf{a}|$ называют также *модулем* вектора \mathbf{a} , а единичный вектор \mathbf{a}° — *ортом*. Представление (1.6) вектора в виде произведения его орта на модуль широко применяется в алгебраических и геометрических рассуждениях. Орт вектора \mathbf{a} находят по формуле

$$\mathbf{a}^\circ = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{a}. \quad (1.7)$$

Нулевой вектор \mathbf{o} не имеет определенного направления, и формула (1.7) к нему неприменима, так как $|\mathbf{o}| = 0$.

Свободный вектор полностью определяется своим направлением (ортом) и модулем. Для того чтобы два свободных вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} были равны друг другу, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые направления ($\mathbf{a}^\circ = \mathbf{b}^\circ$) и модули ($|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$).

Для операции умножения вектора на вещественное число очевидна справедливость соотношений:

$$5^\circ. 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

6°. $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$ — ассоциативность умножения на число, где λ и μ — любые вещественные числа.

Заметим, что вычитание векторов не считается самостоятельной операцией, поскольку оно может быть сведено к умножению вектора на число и сложению векторов. Таким образом, линейных операций над векторами только две. Они связаны друг с другом распределительными законами:

7°. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ — дистрибутивность умножения относительно суммы чисел.

8°. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ — дистрибутивность умножения относительно суммы векторов.

Соотношения 1°—8° представляют минимальный перечень свойств линейных операций над векторами. Этот набор свойств кладется в основу широкого алгебраического обобщения — понятия линейного (или векторного) пространства. Из свойств 1°—8° может быть получен ряд следствий, широко используемых в преобразованиях алгебраических выражений. В применении к таким конкретным объектам, как геометрические векторы, эти следствия достаточно очевидны, так что можно ограничиться только указанием на них:

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o} \quad (1.8)$$

— произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор;

$$(-1)\mathbf{a} = (-\mathbf{a}) \quad (1.9)$$

— произведение любого вектора \mathbf{a} на число -1 есть вектор, противоположный вектору \mathbf{a} ;

$$\lambda \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o} \quad (1.10)$$

— произведение нулевого вектора на любое число λ есть нулевой вектор.

**§ 3. Отношения линейной зависимости и линейной независимости векторов.
Размерность и базис пространства**

С помощью линейных операций формируются понятия линейной зависимости и независимости векторов, имеющие глубокий алгебраический и геометрический смысл. Рассмотрим произвольную комбинацию линейных операций, выполняемых над одним вектором, например

$$\{(5\alpha + \alpha)\beta - \gamma\}\delta + \varepsilon(2\alpha),$$

где буквы греческого алфавита обозначают вещественные числа. Это выражение можно упростить, пользуясь свойствами линейных операций. Так, согласно свойству 7°, имеем

$$5\alpha + \alpha = (5 + \alpha)\alpha,$$

а на основании свойства 6° получим

$$\{(5 + \alpha)\alpha\}\beta = \{\beta(5 + \alpha)\}\alpha.$$

Далее, пользуясь свойствами 8°, 6°, 2°, 1°, 7°, завершим преобразования:

$$\begin{aligned} & \{(\beta(5 + \alpha))\alpha - \gamma\}\delta + \varepsilon(2\alpha) \stackrel{8^\circ, 6^\circ}{=} \\ & \stackrel{8^\circ, 6^\circ}{=} \{(\delta\beta(5 + \alpha))\alpha - (\delta\gamma)\alpha\} + (2\varepsilon)\alpha \stackrel{2^\circ, 1^\circ}{=} \\ & \stackrel{2^\circ, 1^\circ}{=} \{\delta\beta(5 + \alpha)\}\alpha + \{(2\varepsilon)\alpha - (\delta\gamma)\alpha\} \stackrel{7^\circ}{=} \\ & \stackrel{7^\circ}{=} \{\delta\beta(5 + \alpha) + (2\varepsilon - \delta\gamma)\}\alpha = \lambda\alpha. \end{aligned}$$

Последнее выражение в фигурных скобках состоит только из чисел и сводится к одному вещественному числу λ . Легко понять, почему *любая* комбинация линейных операций над одним вектором α неизбежно сведется к выражению вида $\lambda\alpha$. Ведь произведения вектора α на любые вещественные числа будут векторами, коллинеарными α , и сумма таких векторов тоже коллинеарна α . Выражение $\lambda\alpha$ называют *линейной комбинацией* вектора α , поскольку оно способно олицетворять любую комбинацию линейных операций над вектором α .

Если мы условимся откладывать *ненулевой* вектор $\alpha = \overline{OA}$ и все его линейные комбинации $\lambda\alpha$ от одной и той же точки O , то при изменении числового множителя λ от $-\infty$ до $+\infty$ конец вектора $\lambda\alpha = \overline{OM}$ добывает во всех точках бесконечной прямой, проходящей через точку O

параллельно вектору \mathbf{a} (рис. 3). Таким образом, на алгебраическую формулу $\overline{OM} = \lambda \mathbf{a}$ можно смотреть как на уравнение прямой OM .

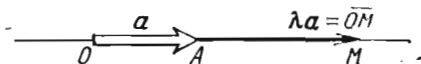


Рис. 3

При более широком взгляде, когда все рассматриваемые векторы считаются свободными, выражение $\lambda \mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$) служит представителем бесконечного множества параллельных векторов, приложенных в любых точках пространства. О любых двух векторах этого множества можно сказать, что они линейно зависимы, так как по крайней мере один из них является линейной комбинацией другого. Оговорка «по крайней мере» делается на тот случай, если один из взятых векторов — нулевой. Действительно, нулевой вектор \mathbf{o} является линейной комбинацией любого вектора \mathbf{a} (см. (1.8)):

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o},$$

но если вектор \mathbf{a} — ненулевой ($\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$), то он не может быть линейной комбинацией $\lambda \mathbf{o}$ нулевого вектора ни при каком значении λ (см. (1.10)).

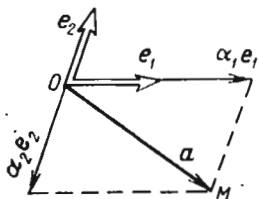


Рис. 4

Теперь рассмотрим *непараллельные* векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . На рис. 4 их начала совмещены в точке O . Линейная зависимость $\mathbf{e}_2 = \lambda \mathbf{e}_1$ или $\mathbf{e}_1 = \mu \mathbf{e}_2$ между этими векторами невозможна ни при каких значениях числовых коэффициентов λ и μ . Действительно, условие непараллельности означает, что оба вектора \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 —

ненулевые (нулевой вектор параллелен любому вектору). Поэтому

$$\text{при } \lambda = 0 \text{ имеем } \lambda \mathbf{e}_1 = 0 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{o} \neq \mathbf{e}_2,$$

$$\text{при } \mu = 0 \text{ имеем } \mu \mathbf{e}_2 = 0 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{o} \neq \mathbf{e}_1.$$

При всех же других значениях λ и μ вектор $\lambda \mathbf{e}_1 \neq \mathbf{o}$ будет параллельным \mathbf{e}_1 и не сможет быть равным \mathbf{e}_2 , а вектор $\mu \mathbf{e}_2 \neq \mathbf{o}$ будет параллельным \mathbf{e}_2 и не сможет быть равным \mathbf{e}_1 . Поскольку нет никакой возможности выразить изображенные на рис. 4 векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 друг через друга с помощью линейных операций, говорят, что эти два век-

тора линейно независимы, или что они образуют *линейно независимую* систему векторов.

Произвольная комбинация линейных операций над двумя векторами e_1 и e_2 может быть сведена к выражению

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

в котором α_1 и α_2 — некоторые вещественные числа. Это в каждом случае нетрудно показать посредством формальных преобразований с использованием свойств 1° — 8° линейных операций и следствий из них. Выражение $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ называется *линейной комбинацией* векторов e_1 и e_2 . Оно при любых значениях коэффициентов α_1 и α_2 представляет собой вектор a , *компланарный* векторам e_1 и e_2 . Действительно, вектор $\alpha_1 e_1$ коллинеарен вектору e_1 , а вектор $\alpha_2 e_2$ коллинеарен вектору e_2 . По свойству суммы векторов, вектор

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = a \quad (1.11)$$

компланарен векторам $\alpha_1 e_1$ и $\alpha_2 e_2$, а значит, и векторам e_1 , e_2 .

Если мы условимся откладывать все линейные комбинации вида (1.11) от одной и той же точки O (см. рис. 4), то при изменении значений коэффициентов α_1 и α_2 независимо друг от друга от $-\infty$ до $+\infty$ конец вектора $a = \overline{OM}$ побывает во всех точках плоскости, проходящей через точку O параллельно линейно независимым векторам e_1 и e_2 (*направляющим* векторам плоскости). Таким образом, на соотношение (1.11) можно смотреть как на уравнение плоскости O, e_1, e_2 .

При более широком взгляде, когда все рассматриваемые векторы считаются свободными, линейная комбинация (1.11) служит представителем бесконечного множества векторов, приложенных в любых точках пространства и параллельных плоскости O, e_1, e_2 . Произвольная пара векторов, взятых из этого множества, может оказаться как линейно зависимой (векторы коллинеарны), так и линейно независимой (векторы неколлинеарны). Но среди любых *трех* векторов из множества линейных комбинаций (1.11) *по крайней мере один* может быть выражен через два других с помощью линейных операций. Про такую систему трех векторов говорят, что она линейно зависима. Докажем, что любые три компланарных вектора a, b, c линейно зависимы.

Пользуясь компланарностью векторов, поместим их в одной плоскости. Сначала предположим, что среди векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} нет нулевых и взаимно параллельных. Тогда, проводя прямые, параллельные этим векторам, можно построить треугольник ABC произвольного размера

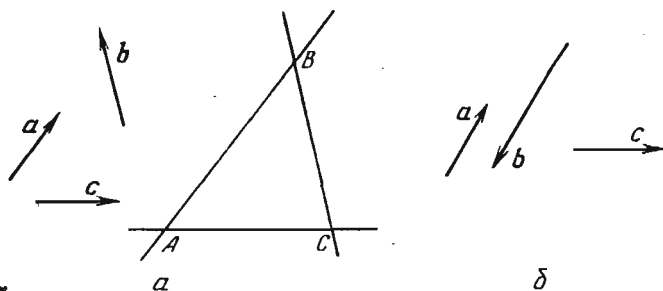


Рис. 5

(рис. 5, а). Запишем условия коллинеарности сторон треугольника соответствующим векторам:

$$\overline{AB} = \lambda_1 \mathbf{a}, \quad \overline{BC} = \lambda_2 \mathbf{b}, \quad \overline{CA} = \lambda_3 \mathbf{c}.$$

Все коэффициенты λ_1 , λ_2 , λ_3 отличны от нуля, поскольку в треугольнике нет сторон нулевой длины. Для сторон треугольника справедливо соотношение

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AA} = \mathbf{0},$$

или

$$\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (1.12)$$

Из уравнения (1.12) можно получить выражение каждого вектора через два других с помощью линейных операций. Например,

$$\mathbf{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{b} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \mathbf{c}$$

(деление на λ_1 возможно, так как $\lambda_1 \neq 0$). Но это и означает, что между векторами \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} имеется линейная зависимость. Далее рассмотрим случай, когда все три вектора ненулевые, но среди них имеются по крайней мере два параллельных, например \mathbf{a} и \mathbf{b} (рис. 5, б). Коллинеарность векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} выражается соотношением типа (1.5):

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}.$$

Его можно записать в форме

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mathbf{o} = \lambda \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{c} \quad (1.13)$$

(пользуясь свойством 3° линейных операций и следствием (1.8) из свойств), а это и есть выражение вектора \mathbf{b} в виде линейной комбинации векторов \mathbf{a} и \mathbf{c} , доказывающее линейную зависимость системы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Переходя от (1.13) к записи, аналогичной (1.12), обратим внимание на то, что именно отличие от нуля коэффициента при векторе \mathbf{b} в этом уравнении позволяет представить вектор \mathbf{b} в виде линейной комбинации других векторов.

Наконец, рассмотрим случай, когда хотя бы один из трех векторов нулевой, например $\mathbf{c} = \mathbf{o}$. Нулевой вектор всегда можно представить в виде линейной комбинации других векторов:

$$0 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o} = \mathbf{c}, \quad (1.14)$$

из чего следует, что система, содержащая нулевой вектор, необходимо является линейно зависимой. Линейная комбинация, в которой все без исключения коэффициенты равны нулю, называется *тривиальной*. Из (1.14) следует соотношение

$$0 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b} + 1 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{o}$$

такого же типа, как (1.12). И здесь существенно, что коэффициент при векторе \mathbf{c} отличен от нуля (хотя сам вектор \mathbf{c} — нулевой). Рассмотренных трех случаев достаточно для обоснования того утверждения, что любые три компланарных вектора линейно зависимы.

Попутно мы познакомились с лаконичной и емкой формой выражения линейной зависимости векторов. Из векторов данной системы составляется линейная комбинация, *равная нулевому вектору* (см. (1.12)). Если есть возможность построить такую комбинацию *нетривиальной*, т. е. так, чтобы хоть один коэффициент в комбинации отличался от нуля, то вектор, при котором стоит этот коэффициент, выражается из уравнения типа (1.12) линейно через остальные векторы системы. Условие нетривиальности линейной комбинации (1.12) можно записать в общей форме, не указывая конкретно, какие именно коэффициенты отличны от нуля:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0. \quad (1.15)$$

Совместимость соотношения (1.12) с условием нетривиальности (1.15) означает, что система векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} линейно зависима. Выполнение соотношения (1.12) всегда может быть обеспечено, какими бы ни были векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . На худой конец, можно построить тривиальную линейную комбинацию

$$0 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b} + 0 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{o},$$

которая необходимо равна нулевому вектору. Но из тривиальной линейной комбинации нельзя получить выражение одного вектора системы через другие, так как нельзя делить на нуль. И если векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} таковы, что для них равенство (1.12) может выполняться только в тривиальном случае (условие (1.15) несовместимо с (1.12)), то в принципе исключена возможность представить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных. Такая система векторов называется *линейно независимой*. Три линейно независимых вектора не лежат в одной плоскости и не могут быть сведены в одну плоскость посредством параллельного переноса. Они некопланарны.

Различение линейной зависимости и линейной независимости векторов с помощью соотношений типа (1.12) и (1.15) легко распространяется на системы с любым числом векторов, и не только в сторону увеличения, но и в сторону уменьшения. Наименьшая система состоит из одного-единственного вектора. К ней неприменимо представление о линейной зависимости и независимости, введенное в начале этого параграфа, поскольку в системе нет «остальных» векторов. Однако и для одного вектора имеют смысл рассуждения об обращении в нуль его линейной комбинации. Если линейная комбинация вектора \mathbf{a} может быть обращена в нулевой вектор нетривиальным образом:

$$\lambda \mathbf{a} = \mathbf{o}, \quad \lambda^2 \neq 0,$$

то уместно назвать такой вектор линейно зависимым. Два последних соотношения совместимы только для нулевого вектора. Значит, нулевой вектор представляет линейно зависимую систему, состоящую из одного вектора. Если же линейная комбинация $\lambda \mathbf{a}$ может обратиться в нулевой вектор только тривиальным образом:

$$\lambda \mathbf{a} = \mathbf{o} \text{ только при } \lambda = 0,$$

то $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ (см. (1.10)). Значит, любой ненулевой вектор представляет сам по себе линейно независимую систему.

Форма записи условий линейной зависимости векторов с помощью соотношений (1.12) и (1.15) оказала влияние на само содержание этого понятия, открыв возможность его расширения. В линейной алгебре приняты следующие определения отношений линейной зависимости и независимости векторов.

Система векторов a_1, a_2, \dots, a_k называется *линейно зависимой*, если из этих векторов может быть построена линейная комбинация, равная нулевому вектору:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = 0 \quad (1.16)$$

при соблюдении условия нетривиальности

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_k^2 \neq 0. \quad (1.17)$$

Система векторов a_1, a_2, \dots, a_k называется *линейно независимой*, если из этих векторов нельзя построить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору.

Иначе говоря, из линейно независимых векторов можно построить линейную комбинацию (1.16) только тривиальным образом, а из линейно зависимых — и тривиально, и нетривиально.

Теперь мы можем подметить замечательную связь между размерностью пространства и наибольшим числом линейно независимых векторов в нем. Выше было рассмотрено множество векторов, параллельных *ненулевому вектору* a . Обозначим это множество символом R^1 . Частным случаем множества R^1 является прямая линия (см. рис. 3). Так как любые два вектора множества R^1 линейно зависимы, наибольшая линейно независимая система в этом множестве содержит менее двух векторов. Вместе с тем в нем найдется линейно независимая система, состоящая из одного вектора, — любой ненулевой вектор. Таким образом, наибольшее число линейно независимых векторов в множестве R^1 равно одному. Вот в чем заключается точный математический смысл того хорошо всем знакомого представления, что прямая линия — одномерное пространство.

Множество всех векторов, лежащих в одной плоскости, или, в более широком смысле, параллельных одной плоскости, представляет двумерное пространство R^2 . Так как любые три вектора этого множества линейно зависимы, то наибольшая линейно независимая система, какая может быть найдена в нем, содержит менее трех векто-

ров. Вместе с тем в R^2 найдется линейно независимая система, состоящая из двух векторов, — любая пара непараллельных друг другу векторов. Значит, наибольшее число линейно независимых векторов в двумерном пространстве равно двум.

Одномерные и двумерные пространства вычлняются из всего чувственно воспринимаемого пространства путем наложения ограничений на выбираемые векторы. В одномерное пространство R^1 попадают все векторы, коллинеарные заданному ненулевому (линейно независимому) вектору e_1 :

$$R^1 = \{a: a = \alpha_1 e_1, -\infty < \alpha_1 < \infty, e_1 \neq 0\}.$$

В двумерное пространство R^2 попадают все векторы, компланарные двум заданным линейно независимым векторам e_1 и e_2 :

$$R^2 = \{a: a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \alpha_1, \alpha_2 \in]-\infty; \infty[, \\ \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \text{ только при } \lambda_1 = \lambda_2 = 0\}.$$

Если снять эти ограничения, то в чувственно воспринимаемом пространстве можно выбрать три некопланарных (линейно независимых) вектора e_1, e_2, e_3 . Рассмотрим множество всех векторов, являющихся линейными комбинациями этих трех:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = a. \quad (1.18)$$

Для наглядности будем считать, что векторы e_1, e_2, e_3 и все их линейные комбинации (1.18) приложены в одной точке O (рис. 6). Тогда при изменении коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ от $-\infty$ до $+\infty$ независимо друг от друга конец вектора $a = \overline{OM}$ побывает во всех точках чувственно воспринимаемого пространства.

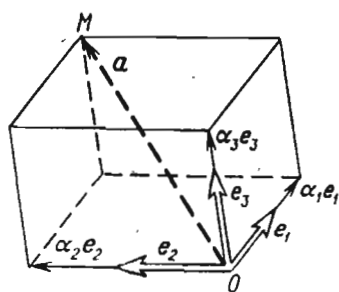


Рис. 6

Какой бы вектор b мы ни взяли в этом пространстве, можно путем параллельного переноса совместить его начало с точкой O , в результате

чего вектор b совпадет с одним из векторов (1.18). Значит, всякий вектор чувственно воспринимаемого пространства является линейной комбинацией векторов e_1, e_2, e_3 , образующих линейно независимую систему. Отсю-

да можно прийти к заключению, что любые четыре вектора чувственно воспринимаемого пространства линейно зависимы, а наибольшая линейно независимая система, какая найдется в этом пространстве, содержит три вектора. Вот в чем коренится глубокий смысл нашего представления о трехмерности чувственно воспринимаемого пространства.

Итак, в результате исследования отношений линейной зависимости и независимости геометрических векторов мы приходим к математическому определению размерности пространства: *размерностью пространства называется наибольшее число линейно независимых векторов в нем.* Попутно мы обнаруживаем, что наибольшая линейно независимая система векторов пространства выступает в роли основы, или, как принято говорить, в роли *базиса* этого пространства. Действительно, любой вектор данного пространства можно выразить с помощью линейных операций через векторы базиса, а все пространство описать как множество всевозможных линейных комбинаций базисных векторов. На рис. 6 изображен базис e_1, e_2, e_3 трехмерного пространства. На рис. 4 в роли базиса плоскости выступают векторы e_1, e_2 . На рис. 3 базисом прямой является вектор $a \neq 0$. *Число векторов в базисе равно размерности пространства.* Изменить число векторов в базисе (основе пространства) — значит изменить все пространство. Например, исключив из базиса e_1, e_2, e_3 вектор e_3 (см. рис. 6), мы выделим из трехмерного пространства пространство двумерное, так как все векторы, являющиеся линейными комбинациями вида $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, необходимо будут параллельны плоскости с направляющими векторами e_1, e_2 .

Отметим две важнейшие черты базиса:

- 1) базис есть линейно независимая система векторов;
- 2) *каждый* вектор пространства является линейной комбинацией векторов базиса этого пространства.

Система векторов, не удовлетворяющая хотя бы одному из указанных требований, не может быть базисом пространства. Представление вектора в виде линейной комбинации базисных векторов принято называть также *разложением вектора по базису*, а числовые коэффициенты комбинации — *координатами* вектора относительно базиса. Например, в разложении (1.18) числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ являются координатами вектора a относительно базиса e_1, e_2, e_3 .

§ 4. Абстрактное линейное пространство

Знаменитый математик Анри Пуанкаре, внесший значительный вклад в разработку идей теории относительности, сказал, что «математика есть искусство пазывать разные вещи одним и тем же именем» [11]. В этом секрет широкой применимости математических истин к многообразным явлениям природы. Сейчас нас будет интересовать то обстоятельство, что существуют множества, которые состоят из элементов, не похожих на геометрические векторы, но в своем строении имеют много общего с чувственно воспринимаемым пространством.

Рассмотрим для примера множество $\{P_n(t)\}$ всех многочленов от одной переменной t степени *не выше* n . Отдельные элементы этого множества — многочлены

$$A_n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n, \\ B_{n-1} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_{n-1} t^{n-1}$$

можно складывать друг с другом, получая в результате элемент того же множества:

$$A_n + B_{n-1} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1})t^{n-1} + \\ + (a_n + 0)t^n = c_0 + c_1 t + \dots + c_{n-1} t^{n-1} + c_n t^n = C_n \in \{P_n(t)\}.$$

Сумма многочленов обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, подобно свойствам 1° и 2° линейных операций над векторами (см. § 2). В множество $\{P_n(t)\}$ имеется многочлен, играющий роль нулевого элемента множества:

$$O_n(t) = 0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots + 0 \cdot t^n.$$

Сумма его с любым многочленом $A_n(t)$ равна $A_n(t)$:

$$A_n(t) + O_n(t) = A_n(t)$$

(см. свойство 3° линейных операций над векторами). Для каждого многочлена $A_n(t)$ найдется в множестве $\{P_n(t)\}$ противоположный элемент — многочлен

$$(-A_n(t)) = -a_0 - a_1 t - a_2 t^2 - \dots - a_n t^n,$$

удовлетворяющий соотношению

$$A_n(t) + (-A_n(t)) = O_n(t)$$

(см. свойство 4° линейных операций над векторами).

Произведение многочлена на любое вещественное число λ есть многочлен той же степени:

$$\lambda \cdot A_n(t) = \lambda a_0 + (\lambda a_1)t + (\lambda a_2)t^2 + \dots + (\lambda a_n)t^n,$$

т. е. тоже элемент множества $\{P_n(t)\}$. Нетрудно показать, что операция умножения многочлена на число обладает свойствами, аналогичными свойствам 5° — 8° линейных операций над векторами.

Другой пример — множество вещественных чисел. Для элементов этого множества также определены операции сложения и умножения на вещественное число, обладающие свойствами 1° — 8° линейных операций. В следующей главе будет рассмотрено множество комплексных чисел. Их можно складывать и умножать на вещественные числа, получая в результате комплексные числа, и эти операции обладают такими же свойствами, как линейные операции над геометрическими векторами.

Можно продолжить перечень подобных примеров, но и сказанного достаточно, чтобы увидеть, что среди всевозможных множеств, различающихся природой своих элементов, специальный интерес представляют такие множества, над элементами которых можно выполнять операции, сходные с операциями над геометрическими векторами. Сходство заключается не в конкретном характере операций — именно этим они могут разительно различаться, а в алгебраических свойствах операций. Во-первых, речь идет о двух операциях: первая каждой паре элементов множества ставит в соответствие элемент того же множества, вторая каждому элементу множества и любому вещественному числу ставит в соответствие элемент того же множества. Во-вторых, эти операции должны удовлетворять таким же требованиям, как свойства 1° — 8° линейных операций над геометрическими векторами. Набор свойств 1° — 8° выступает в роли определения абстрактных линейных операций. Нужно обобщающее название для множеств такого типа, как требуется общее название «дерево» для многочисленных видов растений (ель, пальма, береза, дуб и т. д.). Если бы это название предстояло придумывать теперь, то можно было бы предложить термин «линейное множество». В нем достаточно четко выражен тот факт, что речь идет об абстрактном объекте (понятие множества — продукт широкого математического абстрагирования), и содержится указание на существенный общий признак таких множеств — возможность выполнять над их элементами ли-

нейные операции. С алгебраической точки зрения множество направленных отрезков, или геометрическое пространство, не имеет глубоких преимуществ перед другими линейными множествами. Но оно было изучено раньше других множеств этого типа, причем познание свойств геометрического пространства особенно важно. Это оставило отпечаток на терминологии алгебраических понятий. Укоренился обычай называть абстрактное линейное множество *линейным пространством*, а его элементы — *векторами* (в абстрактном смысле). Геометрические ассоциации, связанные с этими терминами, не вводят в заблуждение математиков, однако создают некоторое неудобство для учащихся. Внимательный педагог не упустит случая подчеркнуть, что в абстрактном понятии линейного пространства и его элементов — абстрактных векторов — нет ничего геометрического. В частности, множество многочленов степени не выше n подходит под определение линейного пространства, и отдельно взятый многочлен — элемент этого множества — может быть назван вектором в абстрактном смысле. Приведем здесь полное определение линейного пространства (см. [12]).

Множество R элементов любой природы называется линейным пространством, если выполнены следующие три требования:

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам a и b множества R ставится в соответствие определенный элемент c , принадлежащий этому же множеству. Такое правило принято называть операцией сложения элементов множества R и записывать в виде

$$a + b = c.$$

II. Имеется правило, посредством которого любому элементу a множества R и любому вещественному числу λ ставится в соответствие определенный элемент u , принадлежащий множеству R . Это правило принято называть операцией умножения элемента множества R на число λ и записывать в виде

$$\lambda a = u, \text{ или } a\lambda = u.$$

III. Указанные два правила (две операции) подчинены следующей совокупности требований, называемых аксиомами линейного пространства (здесь a, b, c — элементы множества R , а λ, μ — вещественные числа):

$$1^\circ. a + b = b + a.$$

$$2^\circ. (a + b) + c = a + (b + c).$$

3°. В множестве R существует нулевой элемент o такой, что $a + o = a$ для любого элемента a из R .

4°. Для каждого элемента a из множества R существует в этом множестве противоположный элемент $(-a)$ такой, что $a + (-a) = o$.

5°. $1 \cdot a = a$ для любого элемента a множества R .

6°. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$.

7°. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$.

8°. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

Чтобы не смешивать векторы с числами, удобно обозначать числа греческими буквами, а абстрактные векторы — латинскими буквами. Вместо термина «линейное пространство» употребляются также термины «аффинное пространство» и «векторное пространство». Мы позволим себе в этой книге употреблять иногда термин «линейное множество» как синоним линейного пространства.

Из аксиом 1°—8° логически вытекают следствия:

1) в любом линейном множестве R имеется один и только один нулевой элемент;

2) для каждого элемента $a \in R$ найдется в R один и только один противоположный элемент $(-a)$, что позволяет однозначно определить разность элементов

$$a - b = a + (-b);$$

3) элементом, противоположным нулевому, является сам нулевой элемент;

4) произведение любого элемента $a \in R$ на число 0 есть нулевой элемент:

$$0 \cdot a = o;$$

5) произведение любого элемента $a \in R$ на число (-1) есть элемент, противоположный a : $(-1)a = (-a)$;

6) произведение нулевого элемента $o \in R$ на любое число λ есть нулевой элемент: $\lambda \cdot o = o$.

Мы не станем приводить доказательство этих следствий.

Пользуясь аксиомами 1°—8° и следствиями из них, можно показать, что любая комбинация линейных операций над элементами a_1, a_2, \dots, a_k линейного множества R сводится к выражению

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — вещественные числа. Поскольку над элементами линейного множества R можно выполнять линейные операции, в нем определены отношения линейной зависимости и независимости элементов.

Если из элементов a_1, a_2, \dots, a_k линейного множества R можно построить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевому элементу $o \in R$, т. е. если могут быть совместно выполнены условия

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = o, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_k^2 \neq 0, \quad (1.19)$$

то система элементов a_1, a_2, \dots, a_k называется *линейно зависимой*. Система элементов a_1, a_2, \dots, a_k линейного множества R называется *линейно независимой*, если для них соотношения (1.19) несовместимы.

Наибольшее число линейно независимых элементов, которые можно найти в линейном множестве R , называется размерностью этого множества. Мы затрудняемся представить себе наглядно геометрическое пространство с числом измерений больше трех и можем сомневаться в том, что такое пространство существует в природе. Но на размерность абстрактного линейного множества не накладываются ограничения физического и геометрического характера. Нетрудно привести примеры линейных множеств любой размерности. Например, в множестве $\{P_n(t)\}$ многочленов степени не выше n найдется система $n+1$ многочленов

$$M_0(t) = t^0 = 1, \quad M_1(t) = t, \quad M_2(t) = t^2, \quad \dots, \quad M_n(t) = t^n,$$

из которых нельзя построить *нетривиальную* линейную комбинацию, равную нулевому многочлену. Значит, размерность множества $\{P_n(t)\}$ не меньше, чем $n+1$. Существуют даже такие линейные множества, в которых число линейно независимых элементов бесконечно велико. Примером бесконечномерного множества является множество функций одной переменной, определенных и непрерывных на заданном отрезке.

Если размерность линейного множества конечна, то имеется возможность представить любой элемент множества в виде линейной комбинации конечного числа линейно независимых элементов этого множества. Пусть R^n — n -мерное линейное множество. Это значит, что в нем найдется линейно независимая система, состоящая из n элементов e_1, e_2, \dots, e_n . Добавив к ней любой элемент $a \in R^n$, необходимо получим линейно зависимую систему, для которой, по определению, справедливы соотношения

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + \lambda_{n+1} a = o, \quad \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 + \lambda_{n+1}^2 \neq 0. \quad (1.20)$$

В линейной комбинации (1.20) коэффициент λ_{n+1} не может быть равен нулю. Действительно, при $\lambda_{n+1} = 0$ из (1.20) следовало бы

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0, \quad \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 \neq 0,$$

и это означало бы, что система элементов e_1, e_2, \dots, e_n линейно зависима, в противоречии с условием. Поскольку $\lambda_{n+1} \neq 0$, существует число $1/\lambda_{n+1}$, и из линейной комбинации (1.20) получим

$$a = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} e_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} e_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Итак, элемент $a \in R^n$ представлен в виде линейной комбинации n линейно независимых элементов множества R^n . А так как элемент a взят в R^n совершенно произвольно, то мы доказали, что *любой* элемент этого множества является линейной комбинацией элементов e_1, e_2, \dots, e_n . Элементы e_1, e_2, \dots, e_n выступают в роли базиса линейного множества R^n .

Наличие базиса является самой замечательной чертой конечномерных линейных множеств. Хотя число элементов в линейном множестве бесконечно, каждый из них может быть выражен в виде линейной комбинации конечного числа базисных элементов, или, как говорят, разложен по базису. При этом справедлива следующая важная

Теорема. Каждый элемент a линейного n -мерного множества R^n разлагается по базису этого множества единственным способом.

Теорема легко доказывается от противного. Предположим, что наряду с разложением

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

существует какое-нибудь другое разложение элемента a по тому же базису:

$$a = \alpha'_1 e_1 + \alpha'_2 e_2 + \dots + \alpha'_n e_n = \sum_{i=1}^n \alpha'_i e_i$$

(хотя бы один из коэффициентов α'_i отличается от соответствующего коэффициента α_i). Вычитая из первого

разложения второе, получим

$$o = a - a = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha'_i) e_i.$$

Это линейная комбинация базисных элементов, равная нулевому элементу. Ввиду линейной независимости базиса такая комбинация может быть только тривиальной:

$$\alpha_i - \alpha'_i = 0 \quad \text{для любого } i = 1, 2, \dots, n.$$

Значит,

$$\alpha'_i = \alpha_i \quad \text{для любого } i = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема доказана.

Коэффициенты в разложении элемента линейного множества по базису множества называют *координатами* элемента относительно базиса. Доказанная теорема говорит о том, что каждый элемент однозначно определяется своими координатами относительно данного базиса. Это позволяет выполнять операции над элементами линейного множества как операции над координатами элементов. Удобно записывать разложение элемента по базису сокращенно, в виде столбца координат:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Отныне *координатный столбец* будет для нас представителем элемента линейного множества.

Пользуясь аксиомами 2°, 8°, 6° линейного пространства, покажем, что при умножении элемента $a \in R^n$ на число λ каждая координата этого элемента умножается на λ :

$$\begin{aligned} \lambda a &= \lambda(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \\ &= (\lambda \alpha_1) e_1 + (\lambda \alpha_2) e_2 + \dots + (\lambda \alpha_n) e_n = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \lambda \alpha_2 \\ \dots \\ \lambda \alpha_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Других координат относительно базиса e_1, e_2, \dots, e_n элемент λa иметь не может согласно доказанной теореме.

Исходя из представления элементов a и b линейного множества R^n координатными столбцами, можно аналогичным способом найти с помощью аксиом 1°, 2°, 7° координаты суммы элементов $a + b$:

$$a + b = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \dots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Теперь видно, что при построении линейной комбинации элементов линейного множества таким же образом комбинируются их координаты:

$$\lambda a + \mu b = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 \\ \dots \\ \lambda\alpha_n + \mu\beta_n \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

§ 5. Линейные свойства пространства

В § 4 нам пришлось развивать понятия, сходные с теми, о которых шла речь в § 3, хотя и в обобщенном виде. Но именно обобщение и представляет главную ценность. Важно понять, что отношения, связанные с линейными операциями, не являются специфически геометрическими отношениями, а имеют широкое распространение в природе. Черты сходства воспринимаемого чувствами пространства со всеми линейными множествами принято называть *линейными свойствами пространства*. Важнейшее из них — существование базиса в пространстве и возможность выразить любой из бесчисленных имеющихся в пространстве векторов в виде линейной комбинации нескольких базисных векторов. Размерность пространства тоже является его линейным свойством.

Для полного описания геометрического пространства недостаточно пользоваться только свободными векторами. В геометрическом пространстве существенное значение имеет определенность точек и различия между ними, а свободный вектор не связан с какой-либо определенной точкой. Но можно указывать с помощью векторов определенные точки геометрического пространства следующим образом. Выберем какую-нибудь одну точку в качестве всеобщего ориентира местоположения и назовем

ее полюсом. Тогда любая точка пространства может быть указана вектором, начало которого находится в полюсе, а конец — в указываемой точке. Всякий вектор, имеющий своим началом полюс пространства, называется *радиус-вектором*. На рис. 7 полюс обозначен буквой O , $\overline{OM}_1 = \mathbf{r}_1$ — радиус-вектор точки M_1 , $\overline{OM}_2 = \mathbf{r}_2$ — радиус-вектор точки M_2 . Радиус-векторы могут участвовать в линейных операциях наряду со свободными векторами,

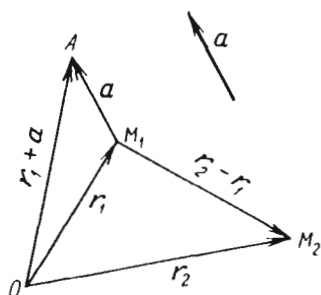


Рис. 7

но при этом результатом операции будет *связанный* вектор, т. е. вектор, имеющий определенную точку приложения (начала). Например, на рис. 7 вектор

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{a} = \overline{OA}$$

приложен в полюсе O , а вектор

$$\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

приложен в точке M_1 . Радиус-вектор, как и свободный

вектор, может быть разложен по базису пространства:

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = \rho_1 \mathbf{e}_1 + \rho_2 \mathbf{e}_2 + \rho_3 \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

но коэффициенты такого разложения уже характеризуют определенную точку M в пространстве — конец радиус-вектора \mathbf{r} . *Координатами точки называются координаты ее радиус-вектора.*

Совокупность базиса и полюса называется *декартовой системой координат*. Полюс называют также *началом координат*. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются *координатными осями*. Возможность указать любую точку M в чувственно воспринимаемом пространстве координатами относительно выбранной декартовой системы координат (см. (1.25)) является *линейным свойством пространства*. Давая каждой из координат точки любые значения от $-\infty$ до $+\infty$ независимо друг от друга, мы будем получать всевозможные радиус-векторы и опишем все чувственно воспринимаемое пространство как множество точек. Рассмотрим те подмножества этого множества, или те геометрические места точек в чувственно воспри-

маемом пространстве, которые могут быть описаны с помощью линейных уравнений, т. е. уравнений, использующих лишь линейные операции над радиус-векторами и свободными векторами.

На рис. 8 изображена прямая, проходящая через точку M_0 параллельно вектору a (направляющему вектору прямой). Точка M_0 указана радиус-вектором $r_0 = \overline{OM_0}$, а произвольная точка M рассматриваемой прямой — радиус-вектором $r = \overline{OM}$. Разность радиус-векторов

$$r - r_0 = \overline{M_0M}$$

есть связанный вектор, принадлежащий рассматриваемой прямой и приложенный в точке M_0 . Факт коллинеарности

векторов a и $\overline{M_0M}$ выражается линейным уравнением

$$r - r_0 = \lambda a, \quad \text{или} \quad r = r_0 + \lambda a, \quad (1.26)$$

где λ — параметр, который может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$, но для каждой точки прямой имеет определенное значение.

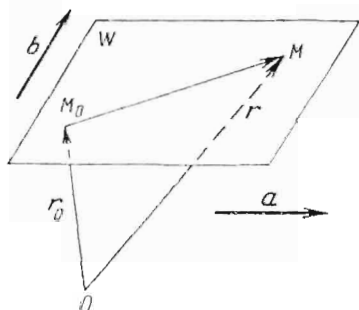


Рис. 9

Соотношение (1.26) называется векторно-параметрическим уравнением прямой.

На рис. 9 изображена плоскость W , проходящая через точку M_0 параллельно линейно независимым векторам a и b (направляющим векторам плоскости). $\overline{OM_0} = r_0$ — радиус-вектор фиксированной точки M_0 , $\overline{OM} = r$ — радиус-вектор произвольной

точки M на плоскости W . Связанный вектор

$$\overline{M_0M} = r - r_0$$

принадлежит плоскости W и приложен в точке M_0 , а факт его компланарности векторам a и b выражается линейным уравнением

$$r - r_0 = \lambda a + \mu b, \quad \text{или} \quad r = r_0 + \lambda a + \mu b. \quad (1.27)$$

Здесь параметры λ и μ могут изменяться независимо друг от друга от $-\infty$ до $+\infty$, но для каждой точки плоскости имеют определенные значения. Соотношение (1.27) называется **векторно-параметрическим уравнением плоскости**.

Принадлежность точек определенной прямой или плоскости является линейным свойством геометрического пространства, так как определяется только линейными соотношениями между векторами.

Отношения линейной зависимости и линейной независимости векторов позволяют различать:

- параллельность и непараллельность прямых;
 - параллельность и непараллельность прямой и плоскости;
 - параллельность и непараллельность плоскостей.
- Например, прямые, описываемые уравнениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{a} \quad \text{и} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mu \mathbf{b},$$

параллельны в случае линейной зависимости их направляющих векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} и непараллельны в случае линейной независимости этих векторов. О параллельности и непараллельности векторов можно судить по их координатам. Если векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} заданы координатными столбцами (см. (1.21)), то при параллельности векторов имеет место соотношение

$$\mathbf{b} = \nu \mathbf{a} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},$$

означающее, что одноименные координаты векторов пропорциональны:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_3}{\alpha_3} = \nu.$$

Отсутствие такой пропорциональности будет свидетельством непараллельности векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Прямая $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{a}$ и плоскость $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c}$ параллельны, если их направляющие векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} образуют линейно зависящую систему, и непараллельны, если эта система линейно независима. При наличии линейной зависимости между векторами \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} такой же зависимостью (с теми же коэффициентами) связаны одноименные координаты этих векторов (см. (1.24)).

Линейная операция умножения вектора на вещественное число позволяет выразить отношение длин *параллельных* отрезков. Что же касается сравнения длин *непараллельных* отрезков, то оно уже выходит за рамки линейных свойств пространства.

§ 6. Метрические свойства наблюдаемого пространства

В практическом обиходе сравнение длин непараллельных отрезков вызывает у нас не больше затруднений, чем сравнение отрезков параллельных. Принципиальное различие между этими двумя задачами выясняется лишь при глубоком анализе свойств пространства с привлечением алгебраических методов. Линейная независимость двух непараллельных векторов означает, что нет такой связи между ними, которая могла бы быть выражена посредством одних только линейных операций. Поэтому различия длин *линейно независимых* векторов остаются для линейных операций просто неуловимыми. Линейные операции позволяют различать с полной определенностью параллельность и непараллельность прямых и плоскостей. Но в чувственно воспринимаемом пространстве мы, помимо этого, различаем состояния непараллельности по величине угла. Есть очевидная взаимосвязь между невозможностью сравнить длины непараллельных отрезков и невозможностью выразить величину угла между ними с помощью одних лишь линейных операций. Ведь способы измерения углов основаны на сравнении длин сторон в треугольнике.

Те свойства воспринимаемого чувствами пространства, благодаря которым в нем определено отношение длин любых непараллельных отрезков и величина угла между ними, получили название *метрических свойств*. Мы сможем лучше разобраться в существе метрических свойств пространства, изучая алгебраическую операцию, с помощью которой выражаются длины векторов и углы между векторами, подобно тому, как рассмотрение линейных операций внесло ясность в понимание линейных свойств пространства.

Геометрическая теория в своем историческом развитии исходила из наглядных представлений о длине и угле, данных нам в опыте, и разрабатывала аналитические способы описания взаимосвязей между длинами и углами в различных фигурах. На этих путях выяснилась важ-

лая роль величины, которую назвали *скалярным произведением векторов*. Если

$|\mathbf{a}|$ — длина (модуль) вектора \mathbf{a} ,

$|\mathbf{b}|$ — длина (модуль) вектора \mathbf{b} ,

$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ — косинус угла между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} ,

то **скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b}** (мы будем обозначать его символом $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$) выражается следующей формулой:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}). \quad (1.28)$$

Название операции скалярного умножения векторов связано с тем, что она каждой паре векторов ставит в соответствие определенное вещественное число — скаляр. От латинского слова *scalae* (лестница) происходит термин «шкала». Всякая математическая или физическая величина, которая может быть выражена одним вещественным числом и изображена точкой на числовой оси — шкале, называется скалярной величиной, или просто скаляром.

Исходя из формулы (1.28), можно выразить модуль любого вектора и угол между векторами через соответствующие скалярные произведения векторов. Так как скалярное произведение вектора на самого себя равно

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{a}}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot 1 = |\mathbf{a}|^2,$$

то модуль вектора получает следующее выражение:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}. \quad (1.29)$$

Пользуясь этим выражением, находим из (1.28)

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}}. \quad (1.30)$$

Отношение (1.30) определено только при условии, что $|\mathbf{a}| \neq 0$ и $|\mathbf{b}| \neq 0$. Но в чувственно воспринимаемом пространстве только нулевой вектор имеет модуль, равный нулю, а у нулевого вектора нет определенного направления. Соответственно для нулевого вектора \mathbf{o} формула (1.30) приводит к неопределенности

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{o}}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{o} \rangle}{|\mathbf{a}| \cdot 0} = \frac{0}{0}.$$

Соотношения (1.29) и (1.30) не представляли бы никакого интереса, если бы скалярное произведение век-

торов можно было находить только по формуле (1.28) через известные модули векторов и угол между векторами. Однако, исходя из определения скалярного произведения формулой (1.28), можно доказать, что для любых векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} чувственно воспринимаемого пространства и для любого вещественного числа λ справедливы следующие соотношения:

1°. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$ — коммутативность.

2°. $\langle \mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle$ — дистрибутивность.

3°. $\lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle$ — ассоциативность скалярного произведения векторов относительно умножения на число.

Эти свойства позволяют вычислить скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , не прибегая к их модулям и углу \mathbf{a} , \mathbf{b} . Если известны разложения векторов по базису пространства:

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3,$$

то на основании свойств 2° и 3° скалярного умножения векторов найдем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \langle (\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2) + \alpha_3 \mathbf{e}_3, \mathbf{b} \rangle = \langle \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{b} \rangle + \\ &+ \alpha_3 \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{b} \rangle = \alpha_1 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b} \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{b} \rangle + \alpha_3 \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{b} \rangle. \end{aligned}$$

Внося сюда разложение вектора \mathbf{b} по базису, получим окончательно

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \alpha_1 \langle \mathbf{e}_1, \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3 \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{b} \rangle + \alpha_3 \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{b} \rangle = \\ &= \alpha_1 \beta_1 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + \alpha_1 \beta_2 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle + \alpha_1 \beta_3 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle + \\ &+ \alpha_2 \beta_1 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle + \alpha_2 \beta_2 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle + \alpha_2 \beta_3 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle + \\ &+ \alpha_3 \beta_1 \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle + \alpha_3 \beta_2 \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle + \alpha_3 \beta_3 \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Поскольку координаты α_i и β_k ($i, k = 1, 2, 3$) векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} заданы, мы можем найти все произведения $\alpha_i \beta_k$ в выражении (1.31). Значит, для нахождения скалярного произведения $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ остается только иметь сведения о скалярных произведениях $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \rangle$ базисных векторов. Удобно записывать их в виде таблицы (матрицы)

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

В силу свойства 1° скалярного умножения векторов в

таблице (1.32) встречаются одинаковые числа

$$\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \quad \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle, \quad \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle.$$

Таблица (1.32) включает в себе все метрические характеристики базиса. По указанным в ней скалярным произведениям можно найти с помощью формул (1.29) и (1.30) длины базисных векторов и углы между ними:

$$|\mathbf{e}_1| = \sqrt{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle}, \quad |\mathbf{e}_2| = \sqrt{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle}, \quad |\mathbf{e}_3| = \sqrt{\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle},$$

$$\cos \widehat{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} = \frac{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle}{|\mathbf{e}_1| \cdot |\mathbf{e}_2|}, \quad \cos \widehat{(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)} = \frac{\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle}{|\mathbf{e}_3| \cdot |\mathbf{e}_1|},$$

$$\cos \widehat{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = \frac{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle}{|\mathbf{e}_2| \cdot |\mathbf{e}_3|}.$$

Сочетание таблицы (1.32) с формулой (1.31) позволяет вычислять скалярные произведения любых векторов, для которых известно разложение по базису. Так же, как скалярное произведение $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, могут быть вычислены скалярные произведения $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$ и $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$. А зная эти величины, найдем по формулам (1.29), (1.30) длины векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} и угол между векторами. Здесь получает развитие роль базисной системы векторов как основы пространства: через разложение по базису каждый вектор и каждая пара векторов воспринимают от базиса свои метрические характеристики.

С позиций чувственных восприятий длины и углы представляются главным содержанием метрических свойств пространства. Но, как обнаруживает теоретический анализ, определенность метрических свойств пространства связана с тем, что для каждой пары векторов определено их скалярное произведение. Так не следует ли изменить точку зрения и, в соответствии с логикой проблемы, идти не от длины и угла к скалярному произведению векторов, а от скалярного произведения как глубокой основы метрических свойств идти к длине и углам как к проявлениям этих свойств? Тогда соотношения (1.29) и (1.30) выступают в качестве теоретического определения длины и угла через скалярное произведение.

Но, принимая скалярное произведение за основополагающее понятие, мы вынуждены будем отказаться от определения его формулой (1.28) (через длины и углы) и дать ему иное, аксиоматическое определение. Существенным моментом такого определения должны стать свойства 1° , 2° , 3° , поскольку именно при их посредстве

реализуется связь между метрическими характеристиками векторов. Исходя из данных нам в опыте длины и углов, можно было вывести свойства 1°, 2°, 3° из определения скалярного произведения векторов. Теперь же, при дедуктивном подходе, эти свойства, как плодотворную находку, нужно включить в качестве аксиом в определение скалярного произведения. Но для того чтобы аксиоматическое определение скалярного произведения не вступило в противоречие с метрическими свойствами чувственно воспринимаемого пространства, к этим трем аксиомам следует добавить еще одну.

Дело в том, что в чувственно воспринимаемом пространстве мы находим только такие векторы, длины которых выражаются вещественными числами. Этот факт автоматически был заложен в понятие длины, взятое из опыта. Но если мы определяем длину (модуль) любого вектора \mathbf{a} формулой (1.29), то нужно предусмотреть, чтобы скалярное произведение $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$ не могло оказаться отрицательным. Для этого вводится аксиома:

4°. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$, если \mathbf{a} — ненулевой вектор,

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$, если \mathbf{a} — нулевой вектор.

Теперь можно сформулировать аксиоматическое определение операции скалярного умножения векторов.

Операция скалярного умножения векторов заключается в том, что каждой паре векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} ставится в соответствие по некоторому правилу определенное вещественное число, называемое скалярным произведением этих векторов и обозначаемое символом $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, причем указанное правило удовлетворяет следующим четырем требованиям (аксиомам) при любом выборе векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} и для любого вещественного числа λ :

1°. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$.

2°. $\langle \mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle$.

3°. $\lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

4°. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$, если $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$,

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$, если $\mathbf{a} = \mathbf{o}$.

Формулы (1.29), (1.30) выполняют роль связующего звена между аксиоматическим определением скалярного произведения векторов и чувственным восприятием метрических свойств пространства. Эти формулы в данном теоретическом построении также становятся аксиомами — аксиомами, определяющими понятия длины и угла. Справедливость таких аксиом подтверждается практикой.

Может возникнуть сомнение, способна ли формула (1.30) при аксиоматическом подходе определить угол

между любыми векторами чувственно воспринимаемого пространства. Ведь в этом пространстве косинус угла не может быть по абсолютной величине больше единицы, а в число аксиом скалярного произведения не включено требование, чтобы для любых векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} выполнялось условие

$$|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})| = \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \leq 1, \text{ или } |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|. \quad (1.33)$$

Покажем, что аксиомы 1°—4° вполне достаточно для выполнения этого требования. В силу аксиомы 4° для любых векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} и любого вещественного числа λ справедливо неравенство

$$\langle \lambda \mathbf{a} - \mathbf{b}, \lambda \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle \geq 0.$$

На основании аксиом 1°, 2°, 3° оно преобразуется к виду

$$\lambda^2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \lambda \cdot 2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \geq 0. \quad (1.34)$$

Выражение в левой части неравенства (1.34) представляет квадратный трехчлен относительно λ , в котором роль коэффициентов при переменной играют скалярные произведения $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$, $2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$. Поскольку неравенство (1.34) выполняется для любых значений λ при любом выборе векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , дискриминант квадратного трехчлена не может быть положительным:

$$4 \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 - 4 \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \leq 0,$$

или

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего неравенства, получим неравенство (1.33):

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}, \text{ или } \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \leq 1.$$

Оно называется неравенством Коши — Буяжковского.

То правило, по которому каждой паре векторов ставится в соответствие определенное вещественное число, может быть облечено в различные конкретные формы, но в любом случае оно должно удовлетворять требованиям, указанным в аксиоматическом определении операции скалярного умножения векторов. В развитом выше изложении это правило выражается в формуле (1.31) и прилагаемой к ней таблице (1.32) скалярных произведений базисных векторов. Но откуда берется сама эта таблица? Ее элементы не даны нам непосредственно в чув-

ственных восприятиях пространственных форм, и мы можем найти их лишь путем измерения длин базисных векторов и углов между ними с последующим вычислением по формуле (1.28). Не подрывается ли этим обстоятельством приоритет скалярного произведения как средства выражения метрических свойств пространства? Здесь следует делать различие между объективными отношениями, существующими в природе, и возможностями восприятия этих отношений нами. Определенность скалярных произведений базисных векторов имеет место независимо от того, можем ли мы найти их и каким способом находим. В задачах экспериментального характера мы пользуемся чувственными восприятиями как источником сведений о пространстве.

В теоретических же исследованиях математик выясняет логические принципы строения множеств и в соответствии с характером этих задач берет на себя роль создателя моделей пространств. Здесь приходится иметь дело с отвлеченностями, которых в природе не встретишь в чистом виде, но которые являются, так сказать, полуфабрикатами в процессе создания математической модели, адекватной реальному пространству на различных уровнях его восприятия. Одним из таких абстрактных объектов является аффинное пространство. Оно мыслится как линейное точечно-векторное множество, т. е. множество, элементами которого являются векторы и точки, связанные друг с другом определенными правилами соответствия:

1) для каждой точки A и для каждого вектора \underline{x} существует одна и только одна точка B такая, что $\overline{AB} = \underline{x}$;

2) для любых трех точек A, B, C справедливо векторное равенство $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ [13, 14].

В аффинном пространстве определены линейные операции над векторами, удовлетворяющие аксиомам 1°—8° линейного пространства, но не определена операция скалярного умножения векторов. Поэтому аффинное трехмерное пространство обладает всеми линейными свойствами чувственно воспринимаемого пространства, но полностью лишено метрических свойств. В нем не имеет смысла сравнение длин непараллельных отрезков и измерение углов между ними.

Аффинное трехмерное пространство представляет собой недостроенную модель чувственно воспринимаемого пространства, включающую в себе только его линейные свойства с сохранением точечной структуры. На основе

аффинного пространства математик может создать бесконечно много вариантов моделей пространства, наделенных такими же метрическими свойствами, как чувственно воспринимаемое пространство. Для этого достаточно постулировать, что в аффинном пространстве вводится операция скалярного умножения векторов, удовлетворяющая аксиомам 1°—4° скалярного произведения, и назначить с соблюдением этих аксиом, но в остальном совершенно произвольно, значения скалярных произведений базисных векторов (задать таблицу (1.32)). Аффинное пространство, в которое внесены метрические свойства посредством определения операции скалярного умножения векторов, называется *евклидовым пространством*. Трехмерное евклидово пространство является той математической моделью, которая полно и точно выражает геометрические свойства чувственно воспринимаемого пространства.

Справившись с задачей моделирования чувственно воспринимаемого геометрического пространства, алгебра не останавливается на этом, а идет дальше, создавая модели множеств с метрическими свойствами на основе абстрактных линейных множеств (линейных пространств). Например, в бесконечномерном линейном множестве функций одной переменной $f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, \infty$, непрерывных на отрезке $a \leq t \leq b$, можно ввести операцию скалярного умножения элементов множества, ставя в соответствие любым двум функциям $f_i(t)$ и $f_k(t)$ из этого множества вещественное число $\langle f_i(t), f_k(t) \rangle$ по правилу

$$\langle f_i(t), f_k(t) \rangle = \int_a^b f_i(t) \cdot f_k(t) dt.$$

Легко убедиться в том, что это правило удовлетворяет аксиомам 1°—4° скалярного произведения. Таким образом, линейное множество непрерывных функций становится бесконечномерным евклидовым пространством, которое находит применение в теории рядов Фурье.

Приведем определение *абстрактного* евклидова пространства (см. [12]).

Линейное пространство называется евклидовым пространством, если выполнены следующие два требования:

1. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам a и b этого пространства ставится в соответствие вещественное число, называемое скалярным про-

изведением этих элементов и обозначаемое символом $\langle a, b \rangle$.

II. Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:

$$1^\circ. \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle.$$

$$2^\circ. \langle a + c, b \rangle = \langle a, b \rangle + \langle c, b \rangle.$$

$$3^\circ. \lambda \langle a, b \rangle = \langle \lambda a, b \rangle.$$

$$4^\circ. \langle a, a \rangle > 0, \text{ если } a \text{ — ненулевой элемент,} \\ \langle a, a \rangle = 0, \text{ если } a \text{ — нулевой элемент.}$$

В заключение обратим внимание на то, что вычисления скалярных произведений векторов, длин векторов и углов между ними по формулам (1.31), (1.29), (1.30) могут быть значительно упрощены и облегчены при специальном выборе метрических характеристик базиса. Для этого нужно выбрать базис так, чтобы таблица скалярных произведений базисных элементов содержала только нули и единицы (где нули невозможны). Например, таблица (1.32) для базиса трехмерного евклидова пространства примет вид

$$\begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_1, e_3 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \langle e_2, e_3 \rangle \\ \langle e_3, e_1 \rangle & \langle e_3, e_2 \rangle & \langle e_3, e_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Ни одно из скалярных произведений одноименных векторов $\langle e_1, e_1 \rangle$, $\langle e_2, e_2 \rangle$, $\langle e_3, e_3 \rangle$ не может равняться нулю, так как по аксиоме 4° это возможно только для нулевого вектора, а нулевого вектора не может быть в составе базиса (линейно независимой системы). Для скалярных произведений разноименных векторов равенство нулю не запрещено аксиомами 1° — 4° . Вычислим длины векторов и углы между векторами базиса, характеризуемого таблицей (1.35):

$$|e_1| = \sqrt{\langle e_1, e_1 \rangle} = \sqrt{1} = 1, \quad |e_2| = \sqrt{\langle e_2, e_2 \rangle} = 1,$$

$$|e_3| = \sqrt{\langle e_3, e_3 \rangle} = 1,$$

$$\cos(\widehat{e_1, e_2}) = \frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{|e_1| \cdot |e_2|} = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0,$$

$$\cos(\widehat{e_3, e_1}) = 0, \quad \cos(\widehat{e_2, e_3}) = 0,$$

$$\widehat{e_1, e_2} = \pi/2, \quad \widehat{e_3, e_1} = \pi/2, \quad \widehat{e_3, e_2} = \pi/2.$$

Каждый базисный вектор в рассматриваемом случае является единичным, и любые два из них взаимно перпен-

дикулярны (ортогональны). Такой базис называется *ортонормированным*.

Если базис трехмерного евклидова пространства ортонормированный, то в формуле (1.31) скалярного произведения произвольных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} все члены, содержащие скалярные произведения разноименных базисных векторов, обратятся в нуль (см. (1.35)), а скалярные произведения одноименных базисных векторов, равные единице, можно не указывать в записи. Тогда формула (1.31) примет простой вид

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3. \quad (1.36)$$

Применяя формулу (1.36) к скалярному умножению вектора на самого себя, получим

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \alpha_1 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_3 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2. \quad (1.37)$$

Поэтому при пользовании ортонормированным базисом длины векторов и угол между векторами выражаются через координаты векторов следующими формулами:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}, \quad (1.38)$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}. \quad (1.39)$$

Глава 2

ПСЕВДОВЕКЛИДОВА ПЛОСКОСТЬ

«Развитие современной математики затрудняется не тем, что трудно освоиться с новыми идеями, а тем, что трудно отказаться от старых... Новую теорию часто трудно понять потому, что человеку свойственно сохранять образ мысли, связанный со старой теорией.»

У. У. Сойер [11]

§ 7. Повесть о числах, которые «в действительности не существуют»

В первой главе изложены математические представления, на основе которых можно вести разговор о пространстве Минковского. Мир Минковского четырехмерен, но увеличение размерности — не самая главная трудность на пути овладения этим понятием. Гораздо труднее преодолеть барьер необычности метрических свойств пространства Минковского. На первый взгляд они кажутся фантастическими. И если даже математика ручается за их логическую непротиворечивость, остается впечатление, что здесь речь идет о такой математической абстракции, которой нет места в природе. Репутация нереальности метрики мира Минковского тесно связана с сохраняющимся в качестве пережитка представлением о нереальности комплексных чисел, чему сильно способствует и терминология («мнимые» числа). Вот почему необходим небольшой экскурс в эту область.

На протяжении истории науки понятие числа развивалось, приобретая все большую общность. И теперь каждому человеку при получении математического образования приходится в сжатом виде повторять этот процесс расширения понятия числа.

В простейшем представлении число есть количество предметов. Такому представлению соответствует понятие натурального числа (целого положительного). Множество N натуральных чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения. Это значит, что, складывая или перемножая любые натуральные числа, мы необходимо будем получать в результате натуральные числа, т. е. не выйдем из множества N .

Операция деления натуральных чисел может привести к дроби, которая не является натуральным числом. Признание дробей числами не вызывало затруднений даже в древние времена. Этот выход за пределы множества N заставил расширить понятие числа. Числом стали называть не только количество предметов, но и отношение количеств.

Несравненно медленнее и труднее формировалось в науке понятие отрицательного числа. Сталкиваясь с необходимостью вычитать из меньшего числа большее, древние математики истолковывали решение как недостаток некоторого количества, но само это количество выражали положительным числом. У них не было числа, которым можно выразить результат такого, например, действия: $2 - 5 = \dots$. И когда они получали при решении уравнения отрицательный корень, то просто отбрасывали его как «недопустимый». «В Европе математики XVI в., хотя и пользовались иногда отрицательными числами, все же называли их „ложными“ и „лежскими“, „меньше, чем ничто“ и т. п.» [15]. Лишь в XVII в., после того как Декарт ввел в употребление координатные системы и установил взаимно однозначное соответствие между числами и точками координатной оси, в математике окончательно утвердилось представление о равноправии положительных и отрицательных чисел. Сложилось понятие *рационального числа* как отношения любых целых чисел m и n . Множество Q рациональных чисел замкнуто относительно операций сложения и вычитания, умножения и деления.

Так потребность в увеличении набора операций, которые можно выполнять над числами, приводила к обобщению понятия числа. Сталкиваясь с задачами, решение которых не могло быть выражено числом в прежнем, узком его понимании, математики приходили к расширению множества объектов, заслуживающих названия числа, формировали новое, более емкое определение числа, включающее в себя и такие числа, которые считались

прежде несуществующими или по крайней мере неполноценными. Объективная значимость нового, расширенного понятия числа заключается в том, что с его помощью удастся более полно и логически непротиворечиво выражать отношения, существующие в природе.

Точки координатной оси, которым соответствуют рациональные числа, расположены всюду плотно. Это значит, что, сколь бы малый отрезок оси мы ни взяли, на нем найдется бесконечно много точек, служащих образцами рациональных чисел. Вместе с тем на любом отрезке координатной оси имеется бесконечно много таких точек, которые не являются образцами рациональных чисел. Классическим примером тому, поразившим древних математиков, является задача о сравнении длин стороны квадрата и его диагонали.

Выберем на прямой линии единицу измерения и построим квадрат $OABC$ со стороной, равной этой единице. Отложив длину диагонали OB на координатной оси, получим отрезок OD (рис. 10). Его длина, очевидно, должна равняться отношению длин отрезков OB и OA :

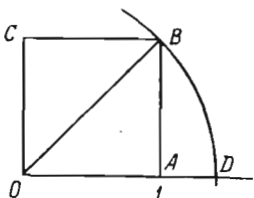


Рис. 10

$$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OD|}{1} = |OD|.$$

Между тем это отношение отрезков не может быть выражено никаким отношением целых чисел, т. е. никаким рациональным числом. Действительно, по теореме Пифагора имеем

$$|OD|^2 = |OB|^2 = |OA|^2 + |AB|^2 = 1 + 1 = 2, \quad |OD| = \sqrt{2}.$$

Если допустить, что существуют такие целые числа m и n , отношение которых равно длине отрезка OD , выраженной в единицах $|OA|$:

$$\sqrt{2} = m/n,$$

то придем к противоречию. Мы вправе считать, что числа m и n не имеют общих множителей (при наличии общего множителя можно произвести сокращение на него и в дальнейшем рассматривать уже несократимую дробь). Кроме того, $|n| \neq 1$, т. е. $\sqrt{2}$ не является целым числом, так как из неравенства $1 < 2 < 4$ следует $1 < \sqrt{2} < 2$. Возводя равенство $\sqrt{2} = m/n$ в квадрат, мы

получили бы $2 = m^2/n^2$. Но числа m^2 и n^2 не имеют общих множителей, поскольку их не имеют числа m и n , причем $n^2 > 1$. Значит, m^2/n^2 — несократимая дробь, которая не может равняться целому числу 2. Мы доказали, что не существует такого рационального числа, квадрат которого был бы равен 2 [16].

Если считать, что числа могут быть только рациональными, то нельзя выполнять операцию извлечения квадратного корня из числа 2 и символ $\sqrt{2}$ следует признать лишенным смысла. Он обозначает нечто «потустороннее», не имеющее места в множестве чисел (рациональных чисел). Но такая точка зрения не согласуется с геометрическим содержанием рассмотренной задачи. Ведь символ $\sqrt{2}$ в данном случае выражает вполне реальную геометрическую величину — длину диагонали квадрата, сторона которого принята за единицу. Точка D (см. рис. 10), отстоящая на расстоянии этой длины от точки O , реально существует на координатной прямой OA . Положение этой точки может быть указано приближенно с любой точностью посредством рациональных чисел, которые соответствуют границам сколь угодно малого отрезка, содержащего в себе точку D .

Немаловажно и следующее обстоятельство. Пусть $\sqrt{2}$ есть только символ, которому не соответствует число (в смысле определения рационального числа). Но в ряде случаев операции над такими «потусторонними» объектами, выполняемые по правилам оперирования «настоящими» числами, могут приводить к вполне положительному результату — рациональному числу. Например,

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1.$$

Подобные соображения настоятельно склоняли математиков к мысли, что символам $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и т. д. соответствуют некоторые реальные числа, хотя они и не могут быть выражены в виде отношения целых чисел. Удивление перед этими «невыразимыми» числами отразилось в их названии — *иррациональные числа*, т. е. числа, не поддающиеся разумному истолкованию (ratio — разум). Именно, в противовес иррациональным числам, числа, которые могут быть выражены в виде отношения целых чисел, получили название *рациональных*.

К концу XIX в. была построена теория, истолковывающая рациональные и иррациональные числа с единой точки зрения (теория сечений Дедекинда) [17]. Объеди-

пение множеств рациональных и иррациональных чисел называется множеством *вещественных* (или *действительных*) чисел \mathbf{R} . Каждому вещественному числу соответствует определенная точка на координатной оси, и каждой точке координатной оси соответствует определенное вещественное число.

Проблемы становления понятия вещественного числа поучительны для постижения еще более широкого представления о числе, каковым является число комплексное. Необходимость введения комплексных чисел связана с потребностью выразить результаты определенных операций над вещественными числами, не являющиеся вещественными числами. Не существует такого вещественного числа, квадрат которого был бы отрицательным числом. Поэтому в множестве вещественных чисел \mathbf{R} нет квадратных корней (а следовательно, и корней любой четной степени) из отрицательных вещественных чисел. Так как квадрат любого вещественного числа y есть неотрицательное число y^2 , символ $(-y^2)$ удобно применять для обозначения любого отрицательного вещественного числа. Задача извлечения квадратного корня из числа $(-y^2)$ сводится к задаче извлечения квадратного корня из отрицательной единицы:

$$\sqrt{-y^2} = \sqrt{(-1)y^2} = \sqrt{-1} \cdot y.$$

От Леонарда Эйлера идет обычай обозначать символ $\sqrt{-1}$ буквой i (начальной буквой французского слова *imaginaire* — мнимый, воображаемый):

$$\sqrt{-1} = i. \quad (2.1)$$

Этот символ называют *мнимой единицей*. Тогда для квадратного корня из произвольного отрицательного вещественного числа получаем обозначение

$$\sqrt{-y^2} = iy, \quad (2.2)$$

называемое «мнимым числом y ».

В этом названии отразилось то представление, что корень квадратный из отрицательного числа не является числом в «реальном» смысле, что с символом $\sqrt{-y^2} = iy$ если и связывается какое-либо понятие о числе, то о числе «не настоящем», «выдуманном», «в действительности не существующем». «Выдумка» в данном случае отстоит гораздо дальше от «реальности», подтверждаемой внешней видимостью, чем выдумка иррациональных чисел.

Каждому иррациональному числу по крайней мере соответствует определенная точка на координатной оси, а для мнимого числа не удастся найти никакого геометрического истолкования или применения. Длины любых отрезков в чувственно воспринимаемом пространстве выражаются вещественными числами, и нет такого отрезка, для выражения длины которого потребовалось бы мнимое число.

Однако у мнимых чисел есть та важная, общая с иррациональными числами черта, что в некоторых случаях операции над символом iy , который не выражает вещественного числа, приводят все-таки к вещественным числам. Это прежде всего операция возведения любого мнимого числа в квадрат:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1, \quad (iy)^2 = (\sqrt{-y^2})^2 = -y^2. \quad (2.3)$$

И более сложные выражения, составленные из мнимых величин, могут сводиться к функциям вещественного аргумента, принимающим вещественное значение. Например, если с учетом (2.3) сложить два бесконечных степенных ряда

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots = \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iy)^n}{n!} &= 1 + (-iy) + \frac{(-iy)^2}{2!} + \frac{(-iy)^3}{3!} + \frac{(-iy)^4}{4!} + \dots = \\ &= 1 - iy - \frac{y^2}{2!} + i \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots, \end{aligned}$$

то получится ряд, состоящий только из вещественных членов, сходящийся к функции $2 \cos y$:

$$2 \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots \right) = 2 \cos y.$$

По мере того как углублялось исследование мнимых чисел и функций от мнимого аргумента, раскрывалась их важная роль в решении коренных теоретических проблем математики, а также прикладных задач. Все настоятельнее пробивало себе дорогу убеждение в противоестественности отношения к мнимому числу как к не-реальному, «потустороннему» математическому объекту.

Даже в простейших задачах можно усмотреть признаки того, что мнимое число в органическом единстве с числом вещественным представляет некий аспект более глубокого и совершенного понятия числа.

Рассмотрим проблему существования решений некоторых квадратных уравнений. Если в уравнении

$$ax^2 + bx + c = 0$$

дискриминант $D = b^2 - 4ac$ отрицателен, то в множестве вещественных чисел \mathbf{R} не найдется корней этого уравнения. В общем случае их нет и среди мнимых чисел, а лишь специфическое сочетание вещественных и мнимых чисел позволяет дать выражение корню. Например, применяя формулу решения квадратных уравнений

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

к уравнению

$$x^2 - 4x + 13 = 0, \quad (2.4)$$

получим

$$x_1 = 2 + 3i, \quad x_2 = 2 - 3i.$$

Подставляя любое из этих выражений в уравнение (2.4) и выполняя действия обычным образом с учетом (2.3), придем к верным числовым равенствам:

$$\begin{aligned} (2 + 3i)^2 - 4(2 + 3i) + 13 &= (4 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2) - 8 - \\ &- 4 \cdot 3i + 13 = 4 + 12i - 9 - 8 - 12i + 13 = 17 - 17 = 0, \\ (2 - 3i)^2 - 4(2 - 3i) + 13 &= 4 - 12i - 9 - 8 + 12i + 13 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, есть основания считать выражения $2 + 3i$ и $2 - 3i$ корнями уравнения (2.4), хотя и нелегко понять, что они означают.

Операция сложения применяется в математике для весьма разнообразных классов объектов: вещественных чисел, векторов, матриц, операторов и т. д., но в каждом случае в роли слагаемых и суммы выступают элементы одинаковой природы. Не так получается с корнями уравнения (2.4). По смыслу общей формулы корней квадратного уравнения, каждый корень является суммой двух членов. Но если дискриминант отрицателен, второй член оказывается мнимым числом, тогда как первый член — число вещественное. Непонятно, как можно складывать столь различные объекты и что представляет собой их сумма, не являющаяся ни вещественным, ни мнимым

числом. Впрочем, именно эта непонятная сумма и дает ключ к решению проблемы. Во-первых, с ней необходимо считаться, поскольку она выражает корни квадратного уравнения. Во-вторых, она объединяет в себе оба типа чисел — и вещественные, и мнимые. Так, может быть, на вещественные и мнимые числа и следует смотреть как на составные части более сложного числового объекта? В отрыве друг от друга каждая из них имеет лишь ограниченное применение, а в едином комплексе они образуют более полноценное понятие числа. Если в таком комплексном числе мнимая составляющая равна нулю, мы воспринимаем число как вещественное, а если нулю равна вещественная составляющая, то мы воспринимаем комплексное число как мнимое. При сложении комплексных чисел отдельно складываются их вещественные компоненты и мнимые. Исторически сложился обычай обозначать мнимую компоненту с помощью множителя $i = \sqrt{-1}$. При такой трактовке проблемы мы получаем вместо бессмысленного сложения вещественного числа с мнимым сложение двух комплексных чисел (объектов одинаковой природы) и в качестве суммы их — тоже комплексное число:

$$(2 + 0 \cdot i) + (0 + 3i) = (2 + 0) + (0 + 3)i = 2 + 3i.$$

В записи комплексного числа знак плюс (минус) перед мнимой компонентой отнюдь не означает, что ее нужно прибавлять (вычитать) к вещественной компоненте. Просто это собственный знак мнимой компоненты, которая может быть положительной или отрицательной. Чтобы избавиться от иллюзии, будто вещественная и мнимая компоненты комплексного числа складываются, можно записывать их, разделяя точкой с запятой. Заодно можно отказаться и от символического множителя i при мнимой компоненте. Достаточным признаком различия вещественной и мнимой составляющих послужит их расположение в записи комплексного числа — на первом месте вещественная, а на втором мнимая:

$$x + iy = (x; y). \quad (2.5)$$

Именно такая форма записи принята в современной теории комплексных чисел, хотя в практике вычислений сохраняется и исторически сложившаяся алгебраическая форма $x + iy$. Если требуется указать комплексное число как единый объект, не различая в нем вещественную и мнимую компоненты, то пользуются однобуквенным

обозначением

$$(x; y) = z. \quad (2.6)$$

Запишем в этих обозначениях *правило сложения комплексных чисел*:

$$z_1 + z_2 = (x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2). \quad (2.7)$$

Когда мы убеждались в том, что комплексные числа $2 + 3i$ и $2 - 3i$ являются корнями квадратного уравнения (2.4), то перемножали комплексные числа (возводили в квадрат) по обычному правилу умножения многочленов с учетом соотношения $i^2 = -1$. В общем виде это выглядит так:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i^2y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned}$$

Если же записывать комплексные числа не в алгебраической форме, а в виде упорядоченных пар чисел, то *правило умножения* примет вид

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1; y_1)(x_2; y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2; x_1y_2 + y_1x_2). \quad (2.8)$$

Это выражение нетрудно запомнить в следующей формулировке: первая компонента произведения равна разности произведений *предшествующих* членов x_1x_2 комплексных сомножителей, записанных рядом, и *последующих* их членов y_1y_2 , а вторая компонента равна сумме произведений *внешних* членов x_1y_2 и *внутренних* y_1x_2 .

Мы описали подход к понятию комплексного числа и арифметическим действиям с комплексными числами в качестве догадки, которая возникает при рассмотрении частной задачи решения квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом. Но доказана общая теорема — теорема Фробениуса о том, что «комплексные числа дают единственно возможное расширение поля действительных чисел с сохранением алгебраических свойств» [18]. В определении комплексных чисел органически включается определение операций над ними: комплексные числа z представляют собой упорядоченные пары вещественных чисел $(x; y)$, которые складываются по правилу (2.7) и перемножаются по правилу (2.8). Множество комплексных чисел принято обозначать буквой C .

Операции вычитания и деления комплексных чисел определяются как обратные операциям сложения и умножения. Разностью чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z , которое удовлетворяет соотношению

$z + z_2 = z_1$. Отсюда следует

$$z = (x; y) = z_1 - z_2 = (x_1; y_1) - (x_2; y_2) = (x_1 - x_2; y_1 - y_2). \quad (2.9)$$

Частным от деления z_1 на z_2 , $z_2 \neq (0; 0)$, называется такое комплексное число z , которое удовлетворяет соотношению $z \cdot z_2 = z_1$. Из этого условия нетрудно найти

$$z = (x; y) = \frac{(x_1; y_1)}{(x_2; y_2)} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right). \quad (2.10)$$

Исходя из определения комплексных чисел и операций над ними, убедимся в том, что комплексные числа, у которых вторая компонента равна нулю, ведут себя в операциях так же, как вещественные числа:

$$(x_1; 0) + (x_2; 0) = (x_1 + x_2; 0),$$

$$(x_1; 0)(x_2; 0) = (x_1 x_2 - 0 \cdot 0; x_1 \cdot 0 + 0 \cdot x_2) = (x_1 x_2; 0),$$

$$\frac{(x_1; 0)}{(x_2; 0)} = \left(\frac{x_1 x_2 + 0 \cdot 0}{x_2^2 + 0^2}; \frac{0 \cdot x_2 - x_1 \cdot 0}{x_2^2 + 0^2} \right) = \left(\frac{x_1 x_2}{x_2^2}; 0 \right) = \left(\frac{x_1}{x_2}; 0 \right).$$

Результатами всех этих операций являются комплексные числа, у которых вторая компонента тоже равна нулю. Отбросив ее всюду, мы получим обычные однокомпонентные вещественные числа с привычными операциями над ними. Поэтому комплексное число с нулевой второй компонентой позволительно для краткости называть вещественным числом (понимая условность этого выражения).

В множестве комплексных чисел есть такое число, квадрат которого равен вещественному числу -1 , т. е. комплексному числу $(-1; 0)$. Согласно правилу умножения (2.8) имеем

$$(0; 1)(0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1; 0).$$

Значит, комплексное число $(0; 1)$ и есть тот математический объект, который скрывался за символом $\sqrt{-1} = i$. Всякое комплексное число, у которого равна нулю первая компонента, даст при возведении в квадрат отрицательное вещественное число:

$$(0; y)(0; y) = (0 \cdot 0 - y \cdot y; 0 \cdot y + y \cdot 0) = (-y^2; 0).$$

Значит, комплексное число $(0; y)$ и есть тот математический объект, который скрывался за символом $\sqrt{-y^2}$. Поэтому комплексное число с нулевой первой компонен-

той позволительно для краткости называть мнимым числом (помня об условности этого выражения). Всякое комплексное число такого типа может быть представлено в виде произведения соответствующего вещественного числа на мнимую единицу:

$$(y; 0) (0; 1) = (y \cdot 0 - 0 \cdot 1; y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0; y) = yi.$$

Наконец, оперирование с комплексными числами подтверждает, что произведение вещественного числа на мнимое есть число мнимое:

$$(u; 0) (0; y) = (u \cdot 0 - 0 \cdot y; uy + 0 \cdot 0) = \\ = (0; uy) = u(iy) = i(uy).$$

Пока математика не осознала роль комплексного числа как более общего и глубокого понятия числа, считалось, что символу $\sqrt{-y^2}$ не соответствует никакое «настоящее» число, что это число воображаемое, мнимое. Инерция мышления и то обстоятельство, что вплоть до начала XX в. в природе не были обнаружены отношения, требующие для своего выражения комплексных чисел, заставляли относиться к этим объектам как к искусственному математическому ухищрению, способному, как ни странно, приводить к правильным реальным результатам. В наше время общетеоретические представления, использование комплексных чисел для выражения фундаментальных физических законов (в квантовой механике и теории относительности), а также для решения многочисленных прикладных задач убедительно обосновывают реальную полноценность комплексных чисел. В этих условиях термин «мнимое число» можно сохранять как дань исторической традиции, как привычное название определенного подмножества комплексных чисел (с нулевой первой компонентой), но совершенно недопустимо истолковывать его как условное обозначение выдуманного объекта, которому нет места в объективной реальности. Приведем в этой связи слова известного советского алгебраиста А. Г. Куропа: «...для современной математики, в отличие, например, от математики XVIII в., в понятии комплексного числа нет ничего таинственного, эти числа являются столь же мало „мнимыми“, как и числа отрицательные или числа иррациональные» [19].

В связи с тем, что множество \mathbb{C} комплексных чисел имеет большую мощность, чем множество \mathbb{R} вещественных чисел, и остается замкнутым относительно большего

числа операций, в множестве \mathbb{C} оказываются определенными такие функции, которые не имеют смысла в множестве \mathbb{R} . Прежде всего в множестве \mathbb{C} определены корни любой целой степени из всех комплексных (в частности, из вещественных и мнимых) чисел. С этим связан важнейший теоретический результат — так называемая *основная теорема алгебры*: всякий многочлен степени $n \geq 1$ с любыми числовыми коэффициентами имеет n корней. Если бы это было не так, то множество комплексных чисел нуждалось бы в дальнейшем расширении. В множестве вещественных чисел нет логарифмов отрицательных чисел. В множестве \mathbb{C} определены логарифмы и отрицательных вещественных, и любых комплексных чисел (кроме нуля). Основные элементарные функции — степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические — имеют смысл в множестве комплексных чисел \mathbb{C} . Это значит, что аргумент названных функций может быть комплексным числом и сами функции принимают комплексные значения (в частных случаях — вещественные или мнимые).

Известный современный математик Е. Вигнер пишет в статье «Непостижимая эффективность математики в естественных науках» [20]: «Неискушенному уму комплексные числа не покажутся естественными и простыми, а результаты физических наблюдений сами по себе не могут содержать комплексные числа... Ничто в нашем повседневном опыте не вынуждает нас вводить такие числа. С другой стороны, если у математика попросить объяснить его интерес к комплексным числам, то он не без негодования укажет вам на прекрасные теоремы, касающиеся алгебраических уравнений, степенных рядов и вообще аналитических функций, доказательство которых стало возможным только благодаря введению комплексных чисел. Математиков никогда не перестанет интересовать это прекрасное достижение их гения...».

Был бы весьма эклектичным в наше время такой взгляд, будто комплексные числа при всех их достоинствах в области математики являются абстракцией, не имеющей реального существования вне сознания математиков. Естествознание прошлого века, и в первую очередь физика, имели дело с таким уровнем познания явлений природы, что для их математического описания достаточно было одних вещественных чисел. Более глубокий взгляд современной физики обнаруживает в природе отношения, выражаемые на языке комплексных

чисел. Это именно то, чего не хватало прежде для осознания реальности комплексных чисел. В цитированной выше статье [20] Е. Вигнер замечает, что «использование комплексных чисел в квантовой механике не является вычислительным трюком прикладной математики; они входят в самую суть формулировки основных законов квантовой механики». Другое направление физики XX в. — теория относительности — также не обходится без комплексных чисел, о чем и пойдет речь ниже.

§ 8. Линейные пространства комплексных чисел

С введением комплексных чисел мы можем расширить понятие линейного пространства. В § 4 линейным пространством названо такое множество, в котором определены две линейные операции: сложение элементов множества и умножение элементов множества на *вещественные* числа. Теперь можно рассматривать множества, в которых вторая линейная операция есть умножение элементов множества на *комплексные* числа, причем операции удовлетворяют тем же восьми аксиомам линейного пространства. Такие множества называются *комплексными линейными пространствами*, или *линейными пространствами над полем комплексных чисел*. В отличие от них, линейные множества, в которых вторая операция является умножением элементов на вещественные числа, называются *вещественными линейными пространствами*, или *линейными пространствами над полем вещественных чисел*.

Множество комплексных чисел является комплексным линейным пространством, поскольку элементы этого множества можно складывать друг с другом и умножать на комплексные числа. Исходя из определений (2.7) и (2.8) этих операций, нетрудно показать, что для них выполняются все восемь аксиом линейного пространства. Линейное пространство комплексных чисел над полем комплексных чисел имеет размерность, равную единице. Действительно, выбрав в качестве базиса некоторый ненулевой элемент w (комплексное число $w = (u; v) \neq (0; 0)$), мы сможем представить любое комплексное число $z = (x; y)$ в виде линейной комбинации $z = \alpha w$, где $\alpha = \frac{z}{w} = \frac{(x; y)}{(u; v)}$ — комплексный коэффициент.

Для наших целей особенный интерес представляет то обстоятельство, что имеется возможность рассматривать

множество комплексных чисел как линейное пространство над полем вещественных чисел. Операция умножения комплексного числа $z = (x; y)$ на вещественное число λ определяется как частный случай произведения (2.8) комплексных чисел:

$$\begin{aligned} \lambda z &= \lambda(x; y) = (\lambda; 0)(x; y) = \\ &= (\lambda x - 0 \cdot y; \lambda y + 0 \cdot x) = (\lambda x; \lambda y). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для этой операции и операции сложения комплексных чисел (2.7) справедливы все восемь аксиом линейного пространства. Значит, существует и *вещественное линейное пространство комплексных чисел*. Условимся обозначать его символом \mathbb{C}_R . Чтобы определить размерность пространства \mathbb{C}_R , покажем, что в нем найдется линейно независимая система, состоящая из двух элементов. В качестве первого элемента возьмем комплексное число $w_1 = (1; 0)$, а в качестве второго $w_2 = (0; 1)$. Составим линейную комбинацию этих элементов с произвольными вещественными коэффициентами λ_1 и λ_2 :

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1(1; 0) + \lambda_2(0; 1) = (\lambda_1; 0) + (0; \lambda_2) = (\lambda_1; \lambda_2).$$

Очевидно, что эта комбинация может равняться нулевому элементу $(0; 0)$ только в тривиальном случае, т. е. при $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$. Значит, система комплексных чисел w_1, w_2 линейно независима. Вместе с тем любое комплексное число $z = (x; y)$ является линейной комбинацией элементов w_1 и w_2 :

$$z = (x; y) = (x; 0) + (0; y) = x(1; 0) + y(0; 1) = xw_1 + yw_2.$$

Значит, элементы w_1, w_2 образуют базис линейного пространства комплексных чисел над полем вещественных чисел. А так как число элементов в базисе равно размерности пространства, то пространство \mathbb{C}_R двумерно.

§ 9. Двумерное псевдоевклидово пространство

Операция умножения комплексных чисел (2.8) ставит в соответствие каждой паре комплексных чисел z_1 и z_2 комплексное число

$$z = z_1 z_2 = (x_1; y_1)(x_2; y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Но первая компонента комплексного числа-произведения представляет вещественное число

$$x_1 x_2 - y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2; 0).$$

Таким образом, в операции (2.8) содержится правило, по которому каждой паре комплексных чисел соответствует определенное вещественное число. Похоже, что здесь мы имеем дело с операцией скалярного умножения элементов линейного пространства C_n . Поэтому воспользуемся символом скалярного произведения (угловыми скобками):

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \langle (x_1; y_1), (x_2; y_2) \rangle = x_1 x_2 - y_1 y_2. \quad (2.12)$$

Строго говоря, мы не имеем права считать соотношение (2.12) определением операции скалярного умножения комплексных чисел (элементов линейного пространства C_n), пока не убедимся в том, что оно удовлетворяет аксиомам скалярного произведения (см. определение абстрактного евклидова пространства в § 6). Займемся такой проверкой:

$$1^\circ. \langle z_1, z_2 \rangle = \langle (x_1; y_1), (x_2; y_2) \rangle = x_1 x_2 - y_1 y_2 = \\ = x_2 x_1 - y_2 y_1 = \langle (x_2; y_2), (x_1; y_1) \rangle = \langle z_2, z_1 \rangle.$$

$$2^\circ. \langle z_1 + z_3, z_2 \rangle = \langle (x_1 + x_3; y_1 + y_3), (x_2; y_2) \rangle = \\ = (x_1 + x_3)x_2 - (y_1 + y_3)y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_3 x_2 - y_3 y_2) = \\ = \langle (x_1; y_1), (x_2; y_2) \rangle + \langle (x_3; y_3), (x_2; y_2) \rangle = \\ = \langle z_1; z_2 \rangle + \langle z_3; z_2 \rangle.$$

$$3^\circ. \text{Для любого вещественного числа } \lambda \text{ справедливо} \\ \lambda \langle z_1, z_2 \rangle = \lambda (x_1 x_2 - y_1 y_2) = (\lambda x_1) x_2 - (\lambda y_1) y_2 = \\ = \langle (\lambda x_1; \lambda y_1), (x_2; y_2) \rangle = \langle (\lambda z_1), z_2 \rangle.$$

Что касается аксиомы 4° , то она выполняется не для всех комплексных чисел. Скалярное произведение элемента $z = (x; y)$ на самого себя:

$$\langle z, z \rangle = \langle (x; y), (x; y) \rangle = x^2 - y^2 \quad (2.13)$$

может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от соотношения абсолютных величин компонент x и y . Если

$$|x| < |y|,$$

то

$$\langle z, z \rangle = x^2 - y^2 < 0$$

и аксиома 4° оказывается нарушенной.

Должны ли мы из-за такого нарушения считать несостоятельным определение операции скалярного умно-

жения комплексных чисел формулой (2.12) или же следует модифицировать для данного случая понятие скалярного произведения элементов линейного пространства, отказавшись от аксиомы 4°? Отказ от четвертой аксиомы представляет не очень существенное изменение алгебраических свойств операции. По-прежнему операция заключается в том, что каждой паре элементов линейного пространства ставится в соответствие вещественное число. По-прежнему порядок следования элементов в паре безразличен (свойство коммутативности 1°). По-прежнему выполняются свойства дистрибутивности 2° и ассоциативности 3° (по отношению к умножению на вещественное число). Наличие свойств 2° и 3° позволяет вычислять скалярные произведения любых элементов через их разложения по базису линейного пространства (см. (1.31)). Сохранение этих решающих свойств склоняет нас к тому, чтобы относиться к формуле (2.12) как к определению скалярного умножения элементов линейного пространства S_n .

Конечно, отказ от аксиомы 4° сопряжен с существенным изменением метрических свойств. Уже нельзя будет ожидать, что метрика линейного пространства S_n , в котором скалярное умножение элементов определено правилом (2.12), окажется такой же, как метрика чувственно воспринимаемой плоскости (тоже двумерного линейного пространства). Чтобы подчеркнуть это различие и вместе с тем указать на определенное сходство в аналитическом аппарате операций, обусловленное общностью аксиом 1°, 2°, 3°, говорят о **псевдоевклидовых метрических свойствах**. В общем случае метрические свойства линейного пространства называются *псевдоевклидовыми*, если они определены посредством операции скалярного умножения элементов пространства, удовлетворяющей аксиомам 1°, 2°, 3° и не удовлетворяющей аксиоме 4°. Греческая приставка «псевдо» означает «ложный». Линейное пространство комплексных чисел над полем вещественных чисел является псевдоевклидовым, т. е. «как будто евклидовым», похожим на евклидово, однако и отличным от него. В противовес псевдоевклидовой метрике, метрические свойства, определенные с участием всех четырех аксиом скалярного произведения, называют *собственно евклидовыми*. Чувственно воспринимаемое пространство собственно евклидово. Собственно евклидово и псевдоевклидово пространства рассматриваются как две разновидности евклидова простран-

ства. Но в тех случаях, когда псевдоевклидова метрика заведомо не входит в поле зрения обсуждаемых вопросов, принято для краткости употреблять термин «евклидово пространство» как синоним собственно евклидова пространства.

§ 10. Геометрическая интерпретация множества комплексных чисел

Анализируя метрические свойства чувственно воспринимаемого пространства, мы стремились к наиболее абстрактному выражению их сущности и нашли его в понятии скалярного произведения векторов. Это позволило сделать далеко идущие обобщения — усмотреть возможность метрических свойств даже в линейных множествах, не имеющих геометрического смысла. Так возникло понятие абстрактного евклидова пространства (см. конец § 6). С высоты такой абстракции стало видно, что множество комплексных чисел в качестве линейного пространства над полем вещественных чисел наделено метрическими свойствами, и притом весьма своеобразными. Своеобразие заключается в невыполнении четвертой аксиомы, которая требует, чтобы скалярное произведение любого элемента линейного пространства на самого себя было *неотрицательным* вещественным числом. Но это лишь крайне абстрактное выражение своеобразия. Чтобы увидеть с полной ясностью, что кроется за ним, нужно вернуться на уровень той конкретности метрических свойств, которая выражается в терминах длин и углов.

С формальной точки зрения этот шаг прост — достаточно принять соглашение, что каждому элементу a линейного пространства C_R ставится в соответствие модуль $|a|$ (длина) по формуле (1.29):

$$|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

и каждой паре элементов $a, b \in C_R$ ставится в соответствие по формуле (1.30) число

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{\langle a, b \rangle}{\sqrt{\langle a, a \rangle} \cdot \sqrt{\langle b, b \rangle}}$$

называемое косинусом угла между этими элементами. Но сами по себе элементы линейного пространства C_R — комплексные числа — лишены геометрического смысла. Как же можно говорить о «длине» комплексного числа или об «угле» между числами?

Однако вдумаясь в смысл прочно укоренившейся привычки характеризовать длину отрезка вещественным числом. Основанием для этой характеристики служит геометрическая интерпретация вещественных чисел: каждому вещественному числу ставится в соответствие по известному правилу определенная точка на прямой линии и каждой точке прямой соответствует определенное вещественное число. В математике это называется взаимно однозначным отображением множества вещественных чисел на множество точек прямой. Мы выразим это представление в лучшем соответствии с рассматриваемым математическим аппаратом, если будем говорить об отображении множества вещественных чисел на множество коллинеарных радиус-векторов (ведь точки указываются их радиус-векторами). Числу 1 ставится в соответствие единичный радиус-вектор \mathbf{r}^0 положительного направления, числу (-1) — противоположный единичный радиус-вектор и т. д. Подчеркнем, что множество вещественных чисел подходит под определение абстрактного линейного вещественного пространства размерности 1.

Коль скоро множество комплексных чисел над полем вещественных чисел является двумерным линейным пространством, уместно по аналогии с вещественными числами рассмотреть взаимно однозначное отображение его на двумерное линейное пространство радиус-векторов, т. е. на плоскость. Построим это отображение следующим образом. Выберем на плоскости произвольную декартову систему координат (базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и полюс O) и каждому комплексному числу $z = (x; y)$ поставим в соответствие радиус-вектор \mathbf{r} :

$$z = (x; y) \leftrightarrow \mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = \overline{OM}, \quad (2.14)$$

указывающий точку M с координатами $(x; y)$. При этом отображении сумме комплексных чисел

$$z_1 + z_2 = (x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$

будет соответствовать сумма радиус-векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 &= (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2) + (x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2) = \\ &= (x_1 + x_2)\mathbf{e}_1 + (y_1 + y_2)\mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

а произведению комплексного числа $z = (x; y)$ на вещественное число λ (см. (2.11)):

$$\lambda z = \lambda(x; y) = (\lambda x; \lambda y)$$

будет соответствовать произведение радиус-вектора \mathbf{r} на то же число:

$$\lambda \mathbf{r} = \lambda(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = (\lambda x)\mathbf{e}_1 + (\lambda y)\mathbf{e}_2.$$

Значит, мы не только отображали комплексные числа на точки плоскости, но и представили линейные операции над комплексными числами в форме линейных операций над радиусами-векторами точек-образов. Благодаря этому все линейные свойства пространства комплексных чисел получили наглядное выражение в виде линейных свойств плоскости. В алгебре взаимно однозначное отображение одного линейного пространства на другое, при котором имеет место такое «сохранение» линейных операций, называют *изоморфизмом*, так как эти линейные пространства имеют одинаковое строение (форму), являются изоморфными.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел с помощью изоморфизма (2.14) широко используется в теории функций комплексной переменной. При этом плоскость, точки которой рассматриваются как образы комплексных чисел, называют *комплексной плоскостью*. По существу понятие комплексной плоскости основано на одинаковости только *линейных* свойств у плоскости и у линейного пространства S_R . Если бы мы могли изготовить, изобразить, воспринять с помощью органов чувств плоскость, обладающую только линейными свойствами и лишенную свойств метрических, т. е. аффинную плоскость (см. § 6), то она вполне годилась бы для описанного здесь геометрического представления комплексных чисел.

На самом же деле мы пользуемся для этой цели чувственно воспринимаемой плоскостью, которая несет на себе собственно евклидову метрику, и ее метрические свойства принято не обособлять от понятия комплексной плоскости. На

использовании собственно евклидовых метрических свойств комплексной плоскости основан специальный способ представления комплексных чисел — так называемая тригонометрическая их форма. На плоскости выбирается *ортонормированная* система координат OXY (рис. 11). Расстояние ρ точки $z = (x; y)$ от начала координат O , определенное по правилу собственно евкли-

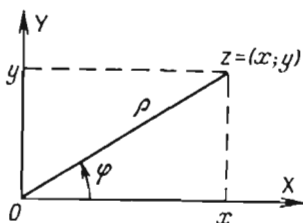


Рис. 11

довой метрики, называют *модулем комплексного числа*

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол φ между осью OX и радиус-вектором точки $(x; y)$ называют *аргументом комплексного числа*. Подставляя соотношения

$$x = \rho \cdot \cos \varphi, \quad y = \rho \cdot \sin \varphi$$

в алгебраическую форму записи $x + iy$ комплексного числа, получаем тригонометрическую форму

$$\begin{aligned} z = (x; y) = x + iy &= \rho \cdot \cos \varphi + i \cdot \rho \cdot \sin \varphi = \\ &= \rho (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi). \end{aligned}$$

Использование тригонометрической формы особенно удобно для выполнения операций умножения и деления комплексных чисел, возведения в степень и извлечения корня. Мы не станем останавливаться на этом подробнее.

Для нас здесь больший интерес представляет то обстоятельство, что собственно евклидовы метрические свойства комплексной плоскости *не совпадают* с псевдоевклидовыми метрическими свойствами линейного пространства S_n . Геометрическая интерпретация комплексных чисел была бы более точной и глубокой, если бы мы отображали комплексные числа на плоскость с *псевдоевклидовыми* метрическими свойствами. Но что это за плоскость? Чувственные восприятия, и в первую очередь зрительные, ничего не сообщают нам о таком геометрическом объекте. Все чувственно воспринимаемые плоскости обладают собственно евклидовыми метрическими свойствами, и с точки зрения чувственных восприятий иных плоскостей не бывает. Однако мы уже имеем *теоретическую* потребность в псевдоевклидовой плоскости, чтобы дать геометрическое истолкование не только линейным, но и метрическим отношениям между элементами линейного пространства S_n комплексных чисел над полем вещественных чисел. Для начала мы можем отнестись к ней как к воображаемой геометрической конструкции, как к математической фантазии, но, подчеркнем, фантазии не беспочвенной. Когда же научимся хорошо ориентироваться в геометрии псевдоевклидовой плоскости, тогда можно будет перейти к вопросу о реальном существовании таких плоскостей в природе.

Описать псевдоевклидову плоскость аналитически трудно. Это двумерное аффинное пространство, в которое

вносятся такие же метрические свойства, какими обладает линейное пространство \mathbb{C}_R . Одинаковость метрических свойств в обоих пространствах обеспечивается тем, что скалярные произведения элементов, соответствующих друг другу в силу изоморфизма (2.14), одинаковы. Так, если z_1 и z_2 — произвольные комплексные числа, которым соответствуют при отображении (2.14) радиус-векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 :

$$\begin{aligned} z_1 &= (x_1; y_1) \leftrightarrow \mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2, \\ z_2 &= (x_2; y_2) \leftrightarrow \mathbf{r}_2 = x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

то требуется, чтобы выполнялось равенство

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle. \quad (2.15)$$

Оно будет выполняться, если скалярное произведение векторов определить формулой

$$\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle = \langle x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2, x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 \rangle = x_1 x_2 - y_1 y_2 \quad (2.16)$$

(см. (2.12)). Говоря алгебраическим языком, равенство (2.15) в сочетании с отображением (2.14) обуславливает изоморфность двух рассматриваемых *евклидовых* пространств, т. е. одинаковость не только линейных, но и метрических свойств пространства \mathbb{C}_R комплексных чисел и псевдоевклидовой плоскости.

Интересно сопоставить применение формулы (2.16) к базису псевдоевклидовой плоскости с применением формулы (2.12) к базису пространства \mathbb{C}_R . Записав разложение каждого из векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ псевдоевклидовой плоскости:

$$\mathbf{e}_1 = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

получаем координаты векторов. Отсюда видно, что в силу отображения (2.14) векторам \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 соответствуют в пространстве \mathbb{C}_R комплексные числа w_1 и w_2 :

$$w_1 = (1; 0) \leftrightarrow \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = (0; 1) \leftrightarrow \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Числа w_1 и w_2 могут служить базисом пространства \mathbb{C}_R , как показано в конце § 8. По формуле (2.12) найдем скалярные произведения базисных комплексных чисел:

$$\langle w_1, w_1 \rangle = \langle (1; 0), (1; 0) \rangle = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1,$$

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle (1; 0), (0; 1) \rangle = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0 = \langle w_2, w_1 \rangle,$$

$$\langle w_2, w_2 \rangle = \langle (0; 1), (0; 1) \rangle = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

и запишем их в виде таблицы

$$\begin{pmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle & \langle w_1, w_2 \rangle \\ \langle w_2, w_1 \rangle & \langle w_2, w_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Поскольку элементами этой таблицы являются только нули и единицы, базис w_1, w_2 пространства C_R заслуживает названия ортонормированного (см. (1.35)). Наличие отрицательной единицы в таблице (2.18) выражает псевдоевклидовость метрики пространства C_R (невыполнение аксиомы 4° скалярного произведения).

Применяя формулу (2.16) к разложениям (2.17), найдем скалярные произведения базисных векторов псевдоевклидовой плоскости:

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_1 \rangle &= 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1, \\ \langle e_1, e_2 \rangle &= 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0 = \langle e_2, e_1 \rangle, \\ \langle e_2, e_2 \rangle &= 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1. \end{aligned}$$

Таблица скалярных произведений этих векторов

$$\begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

совпадает с таблицей (2.18) и также говорит об ортонормированности выбранного базиса псевдоевклидовой плоскости. С помощью этой таблицы мы можем вычислить скалярное произведение любых векторов a и b , заданных разложением по базису e_1, e_2 :

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Действительно, применяя аксиомы 1°, 2°, 3°, которыми определяется операция скалярного умножения элементов псевдоевклидова пространства, получим

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &= \langle \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \rangle = \\ &= \alpha_1 \beta_1 \langle e_1, e_1 \rangle + \alpha_1 \beta_2 \langle e_1, e_2 \rangle + \alpha_2 \beta_1 \langle e_2, e_1 \rangle + \\ &+ \alpha_2 \beta_2 \langle e_2, e_2 \rangle = \alpha_1 \beta_1 \cdot 1 + \alpha_1 \beta_2 \cdot 0 + \alpha_2 \beta_1 \cdot 0 + \\ &+ \alpha_2 \beta_2 \cdot (-1) = \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Естественно, эта формула совпадает с формулой (2.16). Таким образом, задание метрических свойств псевдоевклидовой плоскости с помощью таблицы (2.19) равносильно конструированию их по образцу метрики линейного про-

пространства \mathbb{C}_R комплексных чисел с помощью формулы (2.16).

Пользуясь определением (1.29) длины вектора, перейдем из (2.19) длины базисных векторов e_1 и e_2 :

$$|e_1| = \sqrt{\langle e_1, e_1 \rangle} = \sqrt{1} = 1, \quad |e_2| = \sqrt{\langle e_2, e_2 \rangle} = \sqrt{-1} = i.$$

Тот факт, что длина вектора e_2 выражается мнимым числом, не будет казаться нам слишком экстравагантным, поскольку мы видим в псевдоевклидовой плоскости глубокую геометрическую интерпретацию множества комплексных чисел, а в множестве комплексных чисел мнимые числа отнюдь не являются объектом странным или недопустимым. Обращение в нуль скалярного произведения $\langle e_1, e_2 \rangle$ выражает некоторую специфику взаимного расположения векторов e_1 и e_2 в псевдоевклидовой плоскости. Для указания на эту специфику принят термин, заимствованный из области собственно евклидовых метрических отношений. Там равенство нулю скалярного произведения ненулевых векторов говорит о том, что угол между векторами выражается числом $\pi/2$, т. е. является прямым. Такие векторы называются взаимно ортогональными или перпендикулярными. Поскольку понятие скалярного произведения элементов линейного пространства легло в основу широких обобщений, в математике укоренился обычай называть ортогональными любые элементы, скалярное произведение которых равно нулю. При этом обобщенный смысл термина может полностью отделиться от его первоначального смысла. В псевдоевклидовой плоскости для векторов, скалярное произведение которых равно нулю, вообще не определена величина угла, как будет показано ниже. Тем не менее такие векторы называют ортогональными. Мы предпочитаем называть их перпендикулярными.

Конечно, все нюансы метрических отношений на псевдоевклидовой плоскости выражаются в математических формулах, которые и будут для нас главной опорой в геометрических суждениях. Однако весьма желательно оживить абстрактные представления наглядными образами. Понимая, что наглядные образы неизбежно основаны на собственно евклидовых метрических свойствах чувственно воспринимаемого пространства и потому не могут служить адекватным изображением псевдоевклидовых метрических отношений, мы вынуждены прибегнуть к условным изображениям. Условностями, правда, иного рода в изображении пространства мы пользуемся часто.

Например, чертим карты сферической земной поверхности на плоских листах бумаги или изображаем на плоской картине трехмерное объемное пространство (живопись, фотография), не смущаясь тем, что реальные метрические и даже линейные отношения предстают перед нами в искаженном виде: параллельные прямые сходятся в перспективе, взаимно перпендикулярные изображаются под острыми и тупыми углами, большие расстояния изображаются короткими отрезками, а маленькие — длинными. Когда мы смотрим на плоский рисунок трехмерных предметов, то многосторонний опыт чувственных восприятий почти незаметно для нашего сознания производит дешифровку, подставляя на место условных изображений правильные представления о предметах. Поэтому в хорошей картине мы не замечаем условностей, а видим как бы реальный мир. Но псевдоевклидовых метрических отношений наши органы чувств никогда не воспринимали, условное изображение таких отношений не только ничего не напомнит сознанию, но будет противоречить всем нашим привычным геометрическим представлениям и должно сопровождаться словесными пояснениями, подобно примечанию к плохому рисунку: «се есть лев, а не собака».

Формированию представлений о псевдоевклидовой плоскости поможет то обстоятельство, что ее *линейные* свойства совпадают с линейными свойствами собственно евклидовой плоскости и могут быть переданы в изображении без искажений. Прежде всего сам факт принадлежности некоторого множества точек к одной плоскости является линейным свойством пространства. Поэтому оправдано, так сказать, «внешнее» представление о псевдоевклидовой плоскости как об обычной плоской поверхности (например, поверхности зеркального стекла), которая при рассматривании с ребра проектируется в прямую линию. Линейные отношения *внутри* псевдоевклидовой плоскости, а именно принадлежность некоторых точек плоскости к одной прямой, параллельность и непараллельность прямых, отношение длин параллельных отрезков, доступны наглядному представлению, так как они совпадают с такими же отношениями на чувственно воспринимаемой плоскости. Изображая псевдоевклидову плоскость на собственно евклидовой плоскости рисунка, мы исказим только метрические отношения, представим их условно, но эта условность не будет произвольной. Мы подчиним ее строгой закономерности, если, описывая

взаимное расположение точек и линий на псевдоевклидовой плоскости, заданных уравнениями, будем всегда строить на чертеже *собственно* евклидовы образы, соответствующие этим уравнениям.

Но прежде всего нужно условиться, как мы будем изображать на чертеже метрические характеристики *базиса* псевдоевклидовой плоскости. Естественно в качестве первого шага подчеркнуть взаимную перпендикулярность (в псевдоевклидовом смысле) базисных векторов e_1 и e_2 тем, что они будут расположены на чертеже под прямым

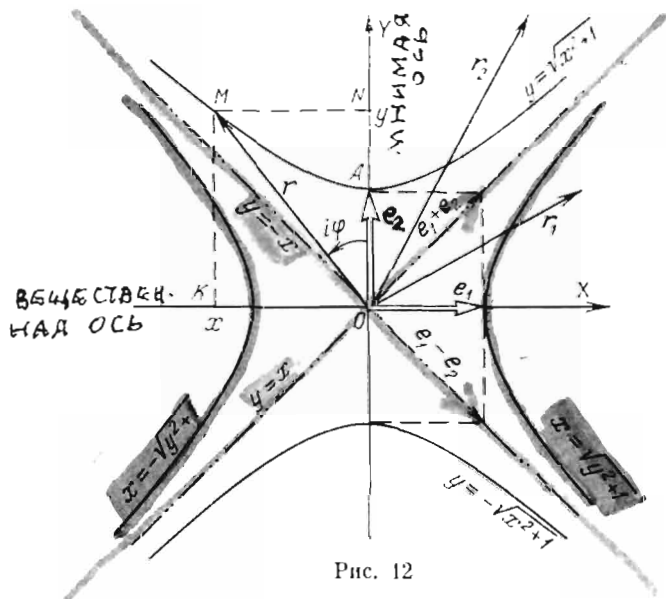


Рис. 12

углом друг к другу (рис. 12). Тот факт, что длина вектора e_2 равна *мнимой* единице, не может найти адекватного геометрического выражения на рисунке, поскольку в собственно евклидовой плоскости нет векторов мнимой длины. Поэтому придется изобразить вектор e_2 в виде обычного вектора вещественной длины, оговорив специально в эту условность чертежа. Хотя длины векторов e_1 и e_2 выражаются числами различного характера, в каждом случае это число есть единица, соответственно вещественная или мнимая. Поэтому на рис. 12 мы изобразим вектор e_2 как единичный, имеющий ту же длину, что и вектор e_1 . Точка O на рис. 12 — полюс псевдоевклидовой плоскости, а лучи OX и OY — оси абсцисс и ординат

соответственно. Построив систему координат в псевдоевклидовой плоскости и ее условное изображение на собственно евклидовой плоскости чертежа, мы получаем возможность сопровождать иллюстрациями описание метрических свойств псевдоевклидовой плоскости.

§ 11. Измерение длин в псевдоевклидовой плоскости

Поскольку метрические свойства псевдоевклидовой плоскости не даны нам в чувственных восприятиях, у нас нет иной возможности определить понятие длины вектора, кроме как аналитическим путем по общей формуле (1.29):

$$|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle},$$

и косинус угла между векторами по формуле (1.30):

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{\langle a, b \rangle}{\sqrt{\langle a, a \rangle} \cdot \sqrt{\langle b, b \rangle}}.$$

Если произвольный радиус-вектор \mathbf{r} в псевдоевклидовой плоскости задан разложением по ортонормированному базису (характеризуемому таблицей скалярных произведений (2.19)):

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2, \quad (2.21)$$

то, согласно (2.16) и (2.20), длина этого радиус-вектора равна

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle} = \sqrt{x^2 - y^2}. \quad (2.22)$$

В случае $x^2 > y^2$ длина $|\mathbf{r}|$ выражается вещественным числом, в случае $x^2 < y^2$ длина $|\mathbf{r}|$ выражается мнимым числом, в случае $x^2 = y^2$ длина $|\mathbf{r}|$ равна нулю.

В пространстве с собственно евклидовыми свойствами длину, равную нулю, может иметь только нулевой вектор (согласно аксиоме 4° скалярного произведения). У нулевого вектора все координаты относительно любого базиса необходимо равны нулю (тривиальная линейная комбинация базисных векторов). Но в псевдоевклидовой плоскости длину, равную нулю, могут иметь и ненулевые векторы. В частности, ненулевой радиус-вектор (2.21) имеет нулевую длину, если его координаты $x \neq 0$ и $y \neq 0$ удовлетворяют условию

$$x^2 = y^2. \quad (2.23)$$

Такой радиус-вектор называется *изотропным*.

Сознание, воспитанное только на чувственно воспринимаемых геометрических представлениях, не мирится с понятием изотропного вектора, отвергает его как бессмыслицу. Тщетны попытки подыскать здесь какой-либо наглядный аналог, ибо в собственно евклидовом пространстве изотропных векторов нет. Тем не менее, пользуясь указанным выше принципом условного изображения псевдоевклидовых метрических отношений (см. конец § 10), мы можем с полной определенностью построить *образы* изотропных векторов на собственно евклидовой плоскости рис. 12. Условие изотропности (2.23) сводится к двум линейным уравнениям:

$$y = x, \quad y = -x. \quad (2.24)$$

На собственно евклидовой плоскости в ортонормированной системе координат уравнениям (2.24) соответствуют прямые линии, являющиеся биссектрисами координатных углов. Так как принадлежность точек к прямой линии является линейным свойством пространства, а линейные свойства собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей совпадают, то точки, координаты которых удовлетворяют одному из уравнений (2.24), лежат на соответствующей прямой линии и в псевдоевклидовой плоскости. Такие прямые называются *изотропными*. **Каждая точка изотропной прямой, проходящей через полюс O , удалена от полюса на расстояние, равное нулю. Это означает, что расстояние между любыми точками одной изотропной прямой равно нулю.**

В псевдоевклидовой плоскости любой вектор

$$\mathbf{q} = \kappa_1 \mathbf{e}_1 + \kappa_2 \mathbf{e}_2,$$

координаты которого удовлетворяют условию

$$\kappa_1^2 = \kappa_2^2,$$

будет изотропным вектором. Это условие реализуется в одном из двух случаев:

$$\text{либо } \kappa_2 = \kappa_1, \quad \text{либо } \kappa_2 = -\kappa_1.$$

В первом случае получаем вектор

$$\mathbf{q}^+ = \kappa_1 \mathbf{e}_1 + \kappa_1 \mathbf{e}_2 = \kappa_1 (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2),$$

а во втором — вектор

$$\mathbf{q}^- = \kappa_1 \mathbf{e}_1 - \kappa_1 \mathbf{e}_2 = \kappa_1 (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2).$$

Рассмотрим векторы

$$\mathbf{q}_0^+ = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_0^- = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Вектор \mathbf{q}^+ связан с вектором \mathbf{q}_0^+ линейной операцией умножения на вещественное число:

$$\mathbf{q}^+ = \kappa_1 (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \kappa_1 \mathbf{q}_0^+.$$

Векторы \mathbf{q}_0^+ и \mathbf{q}^+ коллинеарны, и в смысле линейных отношений можно сказать, что длина изотропного вектора \mathbf{q}^+ в $|\kappa_1|$ раз превосходит длину изотропного вектора \mathbf{q}_0^+ . Таким образом, вектор \mathbf{q}_0^+ может быть принят за единицу измерения всех коллинеарных ему изотропных векторов, т. е. за единичный вектор (орт) данного изотропного направления. Однако в смысле метрических отношений длины всех изотропных векторов равны нулю. В частности,

$$|\mathbf{q}_0^+| = \sqrt{\langle \mathbf{q}_0^+, \mathbf{q}_0^+ \rangle} = \sqrt{1^2 - 1^2} = 0,$$

и это не позволяет считать вектор \mathbf{q}_0^+ единичным.

Важно понять, что здесь мы имеем дело не с логическим противоречием, а с замечательным случаем противоположения метрических свойств пространства его линейным свойствам. Метрические отношения устанавливают соизмеримость непараллельных векторов, которые линейно несоизмеримы. Длина вектора в метрическом смысле и длина вектора в линейном смысле — это *различные* понятия, и только к параллельным векторам применимы обе эти меры. Они оказываются совпадающими для любых параллельных векторов в собственно евклидовом пространстве и для неизотропных параллельных векторов в псевдоевклидовом пространстве. Пусть, например, \mathbf{a} — неизотропный вектор псевдоевклидовой плоскости:

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2, \quad \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0.$$

Тогда вектор

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} = (\lambda \alpha_1) \mathbf{e}_1 + (\lambda \alpha_2) \mathbf{e}_2,$$

коллинеарный вектору \mathbf{a} , имеет в смысле линейных отношений длину, в $|\lambda|$ раз большую, чем вектор \mathbf{a} . Таким

же будет отношение их длин и в метрическом смысле:

$$|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \neq 0,$$

$$|b| = \sqrt{\langle b, b \rangle} = \sqrt{\langle \lambda a, \lambda a \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle a, a \rangle} = \\ = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle a, a \rangle} = |\lambda| \cdot |a|,$$

$$\frac{|b|}{|a|} = |\lambda|.$$

Что же касается коллинеарных *изотропных* векторов, то для них имеет определенное значение отношение длин в линейном смысле — вектор $q^+ = \kappa_1 q_0^+$ длиннее вектора q_0^+ в $|\kappa_1|$ раз, а отношение метрических длин становится неопределенным. Действительно, вследствие обращения в нуль метрической длины изотропных векторов

$$|q_0^+| = \sqrt{\langle q_0^+, q_0^+ \rangle} = \sqrt{\langle e_1 + e_2, e_1 + e_2 \rangle} = \sqrt{1^2 - 1^2} = 0,$$

$$|q^+| = \sqrt{\langle q^+, q^+ \rangle} = \sqrt{\langle \kappa_1 q_0^+, \kappa_1 q_0^+ \rangle} = \sqrt{\kappa_1^2 \langle q_0^+, q_0^+ \rangle} = \\ = |\kappa_1| \cdot \sqrt{\langle q_0^+, q_0^+ \rangle} = |\kappa_1| \cdot 0 = 0$$

равенство

$$|q^+| = |\kappa_1| \cdot |q_0^+| \Leftrightarrow 0 = |\kappa_1| \cdot 0$$

выполняется при *любых* значениях κ_1 . Здесь возникает неопределенность

$$|\kappa_1| = \frac{0}{0}$$

и сравнение метрических длин изотропных векторов теряет смысл.

Показанные на рис. 12 образы изотропных прямых $y = x$ и $y = -x$ олицетворяют два непараллельных друг другу изотропных направления (2.25), имеющиеся в псевдоевклидовой плоскости. Всякий радиус-вектор, принадлежащий изотропной прямой $y = x$, разлагается по базису в виде

$$r = x e_1 + x e_2 = x(e_1 + e_2).$$

Значит, он коллинеарен первому изотропному направлению: $q_0^+ = e_1 + e_2$. Всякий радиус-вектор, принадлежащий изотропной прямой $y = -x$, коллинеарен второму изотропному направлению:

$$r = x e_1 - x e_2 = x(e_1 - e_2) = x q_0^-.$$

Через каждую точку псевдоевклидовой плоскости проходят две изотропные прямые: одна параллельна q_0^+ , другая параллельна q_0^- .

Изотропные прямые, проходящие через начало координат, разбивают псевдоевклидову плоскость на четыре сектора (см. рис. 12). Секторы эти однозначно определяются неравенствами, которым подчинены координаты точек, но мы в дальнейшем будем пользоваться для краткости следующими терминами:

$$\begin{aligned} x^2 > y^2 & \begin{cases} x > 0 & \text{— правый сектор,} \\ x < 0 & \text{— левый сектор,} \end{cases} \\ x^2 < y^2 & \begin{cases} y > 0 & \text{— верхний сектор,} \\ y < 0 & \text{— нижний сектор.} \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку длины радиус-векторов, принадлежащих правому и левому секторам, выражаются вещественными числами (см. (2.22)), мы позволим себе ради краткости называть эти секторы «вещественными». По отношению к верхнему и нижнему секторам будем пользоваться также жаргонным термином «мнимые секторы», имея в виду, что длины радиус-векторов, принадлежащих этим секторам, выражаются мнимыми числами. В дальнейшем указанные термины будут употребляться без кавычек.

Любой неизотропный вектор псевдоевклидовой плоскости может быть отнесен к одному из четырех секторов. Для определения этой принадлежности не имеет значения точка приложения вектора, а важно только его направление. Если путем параллельного переноса совместить начало вектора с началом координат, то он совпадает с некоторым радиус-вектором, который и покажет, к какому сектору принадлежит перенесенный вектор. Другой способ определения принадлежности вектора состоит в том, что через точку его начала проводят две изотропные прямые, расчленяющие плоскость на секторы.

Поскольку любая точка плоскости может быть выбрана в качестве начала координат, построения, выполненные на рис. 12, иллюстрируют метрические свойства любой области псевдоевклидовой плоскости. Дополним иллюстрацию рассмотрением геометрического места точек, аналогичного окружности в собственно евклидовой плоскости. Это будет линия, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от одной фиксированной точки, например от точки начала координат. При этом нужно

иметь в виду, что в псевдоевклидовой плоскости существуют расстояния двух типов: выражаемые вещественными числами и выражаемые мнимыми числами.

Геометрическое место точек, расстояние которых от начала координат равно вещественному числу 1, описывается уравнением

$$|\mathbf{r}| = 1, \text{ или } \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = 1. \quad (2.26)$$

Радиус-векторы таких точек принадлежат вещественным секторам (правому и левому). Геометрическое место точек, расстояние которых от начала координат равно мнимому числу $\sqrt{-1} = i$, описывается уравнением

$$|\mathbf{r}| = i, \text{ или } \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = -1. \quad (2.27)$$

Радиус-векторы этих точек принадлежат мнимым секторам (верхнему и нижнему). Можно рассматривать линии (2.26) и (2.27) как части геометрического места точек, определяемого общим уравнением

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle^2 = 1. \quad (2.28)$$

Это геометрическое место точек естественно назвать псевдоевклидовой окружностью единичного радиуса. Псевдоевклидова окружность не является замкнутой кривой, она претерпевает разрыв на изотропных прямых, проходящих через ее центр. Действительно, на этих изотропных нет точек, удовлетворяющих уравнениям (2.26) и (2.27), так как расстояние между любыми точками изотропной равно нулю.

Пользуясь формулой (2.22), запишем уравнение (2.26) вещественных ветвей псевдоевклидовой окружности и уравнение (2.27) ее мнимых ветвей в координатной форме

$$x^2 - y^2 = 1, \quad (2.29)$$

$$x^2 - y^2 = -1, \text{ или } y^2 - x^2 = 1. \quad (2.30)$$

Мы не можем увидеть псевдоевклидову окружность «в натуре», но можем построить ее отображение на собственно евклидовой плоскости чертежа. Для этого будем смотреть на соотношения (2.29) и (2.30) как на уравнения кривых в собственно евклидовой плоскости рис. 12. Тогда уравнению (2.29) будет соответствовать равнобочная гиперболола с ветвями в правом и левом секторах, а уравнению (2.30) — сопряженная гиперболола с ветвями в верхнем и нижнем секторах. Асимптотами обеих гиперболол служат прямые $y = x$ и $y = -x$, изображающие

изотропные прямые псевдоевклидовой плоскости. Ветви гипербол могут подходить к этим прямым сколь угодно близко, но нигде не пересекают их. Это соответствует тому факту, что на изотропных прямых, проходящих через центр псевдоевклидовой окружности, нет точек этой окружности. Ветви гипербол на рис. 12 иллюстрируют различие в измерении расстояний на собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях. В псевдоевклидовой плоскости все радиус-векторы, концы которых находятся на кривых (2.29), имеют одинаковую длину, равную единице, а радиус-векторы всех точек ветвей (2.30) имеют одинаковую длину, равную мнимой единице. В собственно евклидовой плоскости рис. 12 образы этих радиус-векторов имеют длины, изменяющиеся от 1 до ∞ .

§ 12. Отношение перпендикулярности прямых в псевдоевклидовой плоскости

Пусть

$$\mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_2 = x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

— радиус-векторы на псевдоевклидовой плоскости, удовлетворяющие общему аналитическому определению ортогональности

$$\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle = 0 \quad (2.31)$$

(см. пояснения на этот счет в § 10 после формулы (2.20)). Пользуясь координатным выражением скалярного произведения (2.20), получим координатную форму условия ортогональности (2.31):

$$x_1 x_2 - y_1 y_2 = 0. \quad (2.32)$$

Отсюда сразу видно, что не могут быть взаимно перпендикулярными векторы, принадлежащие одному и тому же сектору псевдоевклидовой плоскости или двум ее секторам одинакового смысла (двум вещественным или двум мнимым). Если оба вектора \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 имеют вещественную длину, то их координаты подчинены неравенствам

$$|x_1| > |y_1|, \quad |x_2| > |y_2|,$$

и тогда

$$|x_1| \cdot |x_2| > |y_1| \cdot |y_2|,$$

что несовместимо с равенством (2.32). Аналогично, если оба вектора имеют мнимую длину, то

$$\begin{aligned} |x_1| < |y_1| \\ |x_2| < |y_2| \end{aligned} \Rightarrow |x_1| \cdot |x_2| < |y_1| \cdot |y_2|$$

и равенство (2.32) для них тоже невозможно.

Напротив, если радиус-векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 принадлежат секторам разного смысла, т. е. один вещественному, а другой мнимому сектору, то условие (2.32) может быть удовлетворено при определенном соотношении координат векторов. Геометрический смысл этого соотношения будет яснее виден, когда мы представим условие перпендикулярности (2.32) в форме

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{x_2}{y_2}. \quad (2.33)$$

Применительно к собственно евклидовой плоскости рис. 12 соотношение (2.33) означает, что тангенс угла $\widehat{e_1, \mathbf{r}_1}$ равен тангенсу угла $\widehat{e_2, \mathbf{r}_2}$ и образы взаимно перпендикулярных векторов псевдоевклидовой плоскости располагаются симметрично относительно биссектрисы, разграничивающей секторы, к которым принадлежат эти векторы. Для векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 на рис. 12 это биссектриса $y = x$ первого координатного угла. Такие биссектрисы, как мы знаем, служат образами изотропных прямых псевдоевклидовой плоскости. Заметим, что сами базисные векторы e_1 и e_2 удовлетворяют признаку перпендикулярности: их скалярное произведение равно нулю (см. (2.19)) и их изображения на собственно евклидовой плоскости рис. 12 расположены симметрично относительно разделяющей их прямой $y = x$.

Если поворачивать радиус-вектор \mathbf{r}_1 против часовой стрелки, приближая его к изотропной $y = x$, то к этой изотропной будет приближаться с другой стороны радиус-вектор \mathbf{r}_2 , перпендикулярный к \mathbf{r}_1 . В пределе эти векторы будут стремиться к совпадению с изотропной, что указывает на перпендикулярность изотропной прямой к самой себе. В сущности, этот вывод не является для нас новшеством. Ведь изотропным назван ненулевой вектор \mathbf{r} , длина которого, определяемая выражением $|\mathbf{r}| = \sqrt{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle}$, равна нулю. Но обращение в нуль скалярного произведения $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ и означает перпендикулярность вектора \mathbf{r} к самому себе.

В изображении псевдоевклидовой плоскости на рис. 12 прямая $y = -x$ расположена под прямым углом к прямой $y = x$. Следовательно, и вообще образы двух изотропных направлений q_0^+ и q_0^- псевдоевклидовой плоскости (см. (2.25)) представляются взаимно перпендикулярными. Но эта видимость перпендикулярности противоречит подлинным метрическим отношениям в псевдоевклидовой плоскости, в чем легко убедиться, вычислив скалярное произведение

$$\langle q_0^+, q_0^- \rangle = \langle e_1 + e_2, e_1 - e_2 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle - \langle e_2, e_2 \rangle = \\ = 1 - (-1) = 2 \neq 0.$$

Отличие его от нуля означает, что два непараллельных изотропных направления псевдоевклидовой плоскости не являются взаимно перпендикулярными.

Замечателен тот факт, что радиус-вектор, проведенный из центра псевдоевклидовой окружности (2.28) в любую ее точку, перпендикулярен касательной к окружности в этой точке. Покажем это для мнимых ветвей окружности, уравнение (2.30) которых можно представить в виде

$$y = \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Любая точка этих ветвей, имеющая абсциссу x , определяется радиус-вектором

$$r = xe_1 + ye_2 = xe_1 \pm \sqrt{x^2 + 1} e_2.$$

Если перейти в сколь угодно близкую к ней точку с абсциссой $x + \Delta x$, принадлежащую этой же дуге окружности, то радиус-вектор получит приращение

$$\Delta r = \{(x + \Delta x)e_1 \pm \sqrt{(x + \Delta x)^2 + 1} e_2\} - \{xe_1 \pm \sqrt{x^2 + 1} e_2\} = \\ = \Delta x \cdot e_1 \pm \{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}\} e_2.$$

Прямая, проходящая через точку $(x; y)$ псевдоевклидовой окружности в направлении вектора Δr , является хордой ветви окружности. При $\Delta x \rightarrow 0$ эта хорда стремится к касательной, а приращения функций могут быть заменены дифференциалами:

$$dr = dx \cdot e_1 \pm (\sqrt{x^2 + 1})' dx \cdot e_2 = dx \cdot e_1 \pm \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} e_2.$$

Вектор dr коллинеарен касательной. Легко убедиться в том, что он перпендикулярен к радиус-вектору r , вычис-

лив скалярное произведение (равное нулю)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle &= \left\langle x\mathbf{e}_1 \pm \sqrt{x^2 + 1}\mathbf{e}_2, dx \cdot \mathbf{e}_1 \pm \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}\mathbf{e}_2 \right\rangle = \\ &= x dx - \sqrt{x^2 + 1} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = x dx - x dx = 0. \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения можно провести для вещественных ветвей псевдоевклидовой окружности, представляя их уравнение (2.29) в виде

$$x = \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

В отображении псевдоевклидовой окружности (2.28) на собственно евклидову плоскость рис. 12 также проявляется перпендикулярность касательной к радиусу. Легко показать аналитически, что касательная к гиперболе (2.29) или (2.30) в любой ее точке направлена симметрично радиус-вектору этой точки относительно ближайшей асимптоты. Но это и есть графический признак псевдоевклидовой перпендикулярности прямых.

Среди бесконечного множества пар взаимно перпендикулярных неизотропных направлений псевдоевклидовой плоскости только одну пару можно изобразить на собственно евклидовой плоскости в виде прямых, пересекающихся под углом $\pi/2$. Но эта пара в действительности не

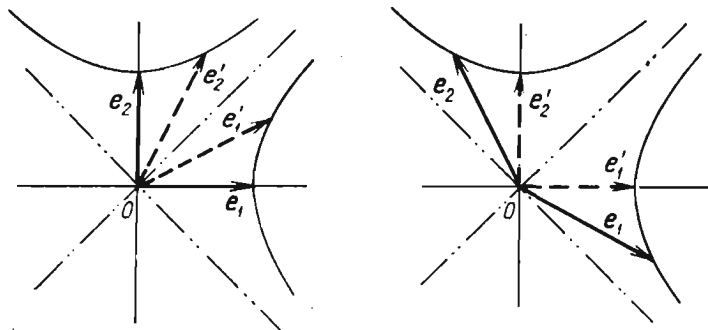


Рис. 13

получает никаких преимуществ перед остальными, которые приходится изображать в виде острых и тупых углов. В частности, взаимно перпендикулярные векторы базиса псевдоевклидовой плоскости совсем не обязательно изображать под прямым углом. Любая пара взаимно пер-

псевдикулярных радиусов псевдоевклидовой единичной окружности (2.28) может быть принята за ортонормированный базис псевдоевклидовой плоскости, и каждую из них мы можем по своему желанию изобразить на собственно евклидовой плоскости в виде прямого угла. Это иллюстрируется рис. 13, на котором показаны два различных ортонормированных базиса псевдоевклидовой плоскости: базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$, помеченный штрихами, который мы назовем для краткости «штрихованным», и «нештрихованный» базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Оба способа изображения ортонормированных базисов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ псевдоевклидовой плоскости равноправны.

§ 13. Измерение углов в псевдоевклидовой плоскости

Представления о величинах углов в псевдоевклидовой плоскости нам придется развивать, исходя из общего аналитического определения угла между векторами формулой (1.30):

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}}.$$

Для того чтобы сразу же встретиться с необычностью новых представлений, применим эту формулу к какому-нибудь неизотропному вектору

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2, \quad \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0,$$

и к изотропному вектору

$$\mathbf{q}_0^+ = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2:$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0^+}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q}_0^+ \rangle}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{q}_0^+|} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \cdot 0} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{0} = \infty$$

(здесь $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$ в силу условия неизотропности $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$ вектора \mathbf{a}). Полученный результат опрокидывает привычные ограничения, наложенные на значения косинуса угла в собственно евклидовой плоскости ($-1 \leq \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \leq 1$). Повятно, что это нарушение неравенства Коши — Буняковского проистекает из отказа от аксиомы 4° скалярного произведения векторов (см. (1.33)). Отбросив требования четвертой аксиомы, мы согласились рассматривать векторы, длины которых выражаются не только вещественными, но и мнимыми

числами, что, конечно, вносит изменения в характер меры углов и тригонометрических функций угла. Совершив таким образом выход за пределы множества вещественных чисел, мы должны будем принять во внимание функции комплексного аргумента. В теории функций комплексной переменной рассматривается аналитическое продолжение тригонометрических функций в область комплексных чисел и доказывается, что в этой области сохраняются основные соотношения между тригонометрическими функциями вещественного аргумента. Указанное аналитическое продолжение выражается с помощью формул Эйлера

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \cdot \sin z, \\ e^{-iz} &= \cos z - i \cdot \sin z, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где $z = (x; y) = x + iy$ — любое комплексное число, x и y — вещественные числа, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Складывая уравнения (2.34) друг с другом, получим выражение косинуса комплексного аргумента через экспоненциальные функции:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (2.35)$$

В общем случае косинус комплексного аргумента принимает значения, выражаемые комплексными числами, но в двух частных случаях косинус принимает только вещественные значения. Первый случай тот, когда аргумент косинуса является вещественным числом ($z = (x; 0) = x$). Это хорошо знакомая всем вещественная функция $\cos x$. Второй случай тот, когда аргумент косинуса является мнимым числом. Подставляя $z = (0; y) = iy$ в (2.35), получим

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2}. \quad (2.36)$$

Показательные функции e^y и e^{-y} вещественного аргумента принимают только вещественные значения, следовательно, и косинус мнимого аргумента $\cos(iy)$ принимает лишь вещественные значения. При этом $\cos(iy) \rightarrow \infty$, если $y \rightarrow \pm\infty$. Таким образом, полученный выше результат $\cos(\widehat{a, q_0^+}) = \infty$ не является бессмысленным с точки зрения математики. Больше того, он позволяет высказать две догадки, нуждающиеся в дальнейшем подтверждении. Во-первых, величина угла в псевдоевклидовой пло-

скости, по-видимому, выражается мнимым числом. Во-вторых, эта величина может иметь определенное конечное значение только для векторов, принадлежащих одному и тому же сектору. Ведь если векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} принадлежат различным секторам, то между ними находится по меньшей мере одна изотропная, с которой каждый из векторов образует бесконечно большой угол. Кстати, отметим, что косинус угла между двумя изотропными направлениями \mathbf{q}_0^+ и \mathbf{q}_0^- псевдоевклидовой плоскости (см. (2.25)) тоже бесконечно велик:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\mathbf{q}_0^-, \mathbf{q}_0^+}) &= \frac{\langle \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \rangle}{|\mathbf{q}_0^-| \cdot |\mathbf{q}_0^+|} = \frac{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle}{0 \cdot 0} = \\ &= \frac{1 - (-1)}{0} = \frac{2}{0} = \infty. \end{aligned}$$

Ограничимся пока верхним сектором псевдоевклидовой плоскости. Угол между ортом \mathbf{e}_2 и любым радиус-вектором \mathbf{r} , принадлежащим верхнему сектору:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2, \quad x^2 - y^2 < 0, \quad y > 0$$

(см. рис. 12), определяется соотношением

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{r}}) &= \frac{\langle \mathbf{e}_2, x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \rangle}{|\mathbf{e}_2| \cdot |\mathbf{r}|} = \frac{x\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle + y\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle}{i \cdot \sqrt{x^2 - y^2}} = \\ &= \frac{x \cdot 0 + y \cdot (-1)}{i \cdot \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{-y}{i \cdot \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{iy}{\sqrt{x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Последнее выражение показывает, что в псевдоевклидовой плоскости косинус угла имеет такой же геометрический смысл, как и в плоскости собственно евклидовой. Действительно, в треугольнике OMN на рис. 12 стороны MN и ON взаимно перпендикулярны в псевдоевклидовом смысле (так как MN параллельна орту \mathbf{e}_1 , а ON параллельна орту \mathbf{e}_2) и могут быть названы катетами. Длина катета ON , прилежащего к углу $\widehat{NOM} = \widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{r}}$, выражается мнимым числом iy , а длина гипотенузы OM — мнимым числом $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 - y^2} = |OM|$ (в верхнем секторе $x^2 - y^2 < 0$). Отношение этих длин есть вещественное число, равное косинусу угла \widehat{NOM} :

$$\frac{|\overline{ON}|}{|\overline{OM}|} = \frac{iy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{iy}{i \cdot \sqrt{y^2 - x^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{r}}), \quad (2.37)$$

Если вектор \mathbf{r} коллинеарен орту \mathbf{e}_2 ($\mathbf{r} = y\mathbf{e}_2$, $x = 0$), то $\widehat{\cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{r})} = 1$. Но если вектор \mathbf{r} неколлинеарен орту \mathbf{e}_2 , т. е. если $x \neq 0$, то $\sqrt{y^2 - x^2} < y$ и значение косинуса угла $\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{r}}$ превосходит единицу. Оно стремится к бесконечности при $x^2 \rightarrow y^2$, т. е. при стремлении направления вектора \mathbf{r} к одному из изотропных направлений. Подчеркнем замечательный геометрический смысл того факта, что косинус угла в псевдоевклидовой плоскости больше единицы. Это значит, что *величина проекции отрезка больше длины самого проектируемого отрезка!*

Величина угла $\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{r}}$ с аналитической точки зрения есть не что иное, как значение аргумента функции $\widehat{\cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{r})}$. Функция эта, согласно (2.37), принимает любые вещественные значения из интервала $[1; +\infty[$, точно так же, как и косинус мнимого аргумента (см. (2.36)). Теперь нужно выяснить геометрическое содержание меры угла в псевдоевклидовой плоскости.

В собственно евклидовой плоскости величина угла определяется с помощью окружности произвольного радиуса R , имеющей центр в вершине угла. За величину угла φ принимается отношение длины l стягивающей его дуги окружности к радиусу дуги: $\varphi = l/R$. Рассмотрим, к чему приведет попытка определить аналогичным способом величину угла в псевдоевклидовой плоскости.

Как показано в § 12, радиус, проведенный в любую точку псевдоевклидовой окружности, перпендикулярен касательной к окружности в этой точке. Радиусы всех точек одной ветви псевдоевклидовой окружности принадлежат одному сектору. Пусть, к примеру, это будет верхний сектор, так что $|\mathbf{r}|$ — мнимое число. Тогда касательные к окружности во всех точках этой ветви будут прямыми, принадлежащими вещественным секторам (в силу перпендикулярности к мнимым радиусам). Длина каждого отрезка касательной и прилегающего к ней малого участка дуги будет выражаться вещественным числом. Следовательно, и длина любой части верхней ветви псевдоевклидовой окружности тоже будет вещественной. Отношение длины дуги окружности, стягивающей угол между любыми радиусами верхнего сектора, к длине радиуса этой дуги будет мнимым числом. Для вещественных ветвей окружности, наоборот, длина радиуса будет выражаться вещественным числом, а длина дуги окруж-

ности — мнимым числом. Отношение этих длин опять окажется мнимым числом.

Таким образом, качественная сторона вопроса выяснена: если измерять угол между векторами псевдоевклидовой плоскости отношением длины стягивающей его дуги к радиусу, то величина угла будет выражаться мнимым числом. При этом получает подтверждение сделанный ранее вывод о том, что величина угла имеет определенное конечное значение только в пределах одного сектора. Ведь псевдоевклидова окружность имеет *точки разрыва* на изотропных, проходящих через ее центр, а они-то и производят разбиение плоскости на секторы. Остается рассмотреть вопрос с количественной стороны: согласуется ли такое геометрическое истолкование величины угла с аналитическим продолжением (2.36) косинуса в область мнимых значений аргумента и с геометрическим смыслом косинуса угла как отношением длины прилежащего катета к длине гипотенузы?

Малый элемент дуги псевдоевклидовой окружности, сливающийся с отрезком касательной, может быть представлен дифференциалом радиус-вектора (см. § 12)

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 dx + \mathbf{e}_2 dy,$$

имеющим длину

$$|d\mathbf{r}| = dl = \sqrt{\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle} = \sqrt{dx^2 - dy^2}. \quad (2.38)$$

Возьмем для определенности верхнюю ветвь единичной окружности с центром в начале координат, описываемую уравнением

$$y = \sqrt{x^2 + 1}$$

(получается из (2.30) при $y > 0$), и найдем для нее дифференциал dy ординаты, соответствующий приращению dx абсциссы:

$$dy = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Подставляя его в формулу (2.38), получим

$$dl = \sqrt{dx^2 - dy^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{x^2 + 1}\right) dx^2} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Рассмотрим дугу $\overset{\frown}{AM}$ псевдоевклидовой единичной окружности на рис. 12. Точка A пересечения верхней вет-

ви окружности с осью OY имеет координаты $(0; 1)$, произвольная точка M этой ветви имеет координаты $(x; y)$.

Длину дуги \widehat{AM} вычислим интегрированием:

$$l_{\widehat{AM}} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \ln |t + \sqrt{t^2 + 1}| \Big|_0^x = \\ = \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| = \ln |x + y|.$$

Так как радиус дуги \widehat{AM} равен $|e_2| = i$, величина угла \widehat{AOM} должна выражаться мнимым числом:

$$\widehat{AOM} = \frac{\ln |x + y|}{i} = -i \cdot \ln |x + y| = i\varphi,$$

где буквой φ обозначена вещественная величина:

$$\varphi = -\ln |x + y|, \quad (2.39)$$

которая сама по себе не имеет геометрического смысла угла.

Косинус угла \widehat{AOM} можно найти из треугольника OMN . Так как OM — радиус единичной псевдоевклидовой окружности (верхней ее ветви), то $|\overline{OM}| = |e_2| = i$, и по формуле (2.37) находим

$$\cos(i\varphi) = \cos(\widehat{e_2, r}) = \frac{|\overline{ON}|}{|\overline{OM}|} = \frac{iy}{i} = y.$$

Таким образом, если мы из соотношения (2.39) получим выражение ординаты y точки M через вещественный параметр φ , то это и даст нам искомое выражение косинуса мнимого угла через величину этого угла.

Потенцируем логарифмическое равенство (2.39):

$$e^\varphi = 1/|x + y|. \quad (2.40)$$

Для всех точек псевдоевклидовой окружности с центром в начале координат выполняется условие $|x + y| > 0$, так как среди них нет точек, принадлежащих изотропной прямой $y = -x$. На верхней ветви к тому же $y > 0$ и $|y| > |x|$. Поэтому

$$|x + y| = x + y$$

и соотношение (2.40) может быть представлено в виде

$$e^\varphi = 1/(x + y), \quad (2.41)$$

откуда следует

$$\frac{1}{e^\varphi} = e^{-\varphi} = x + y. \quad (2.42)$$

Вычислим сумму

$$\begin{aligned} e^\varphi + e^{-\varphi} &= \frac{1}{x+y} + x + y = \frac{1 + (x+y)^2}{x+y} = \frac{1 + x^2 + 2xy + y^2}{x+y} = \\ &= \frac{y^2 + 2xy + x^2}{x+y} = \frac{2y(x+y)}{x+y} = 2y. \end{aligned}$$

В этом преобразовании использовано уравнение (2.30) мнимых ветвей окружности

$$y^2 = x^2 + 1.$$

Итак, получаем

$$\cos(i\varphi) = y = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2}. \quad (2.43)$$

При желании иметь выражение косинуса через мнимую величину $i\varphi$ угла можно записать (2.43) в виде

$$\cos(i\varphi) = \frac{e^{-i(i\varphi)} + e^{i(i\varphi)}}{2}.$$

Формула (2.43), полученная из геометрических соображений, совпала с аналитическим продолжением косинуса в область мнимых значений аргумента (см. (2.36)). Этим оправдано измерение углов в псевдоевклидовой плоскости отношением длины дуги окружности к радиусу по аналогии с привычной мерой угла в собственно евклидовой плоскости.

Пользуясь соотношением (2.39), выясним, какие значения может принимать угол $i\varphi$ между базисным ортом e_2 и любым радиус-вектором верхнего сектора. Поскольку вещественная логарифмическая функция принимает любые значения от $-\infty$ до $+\infty$, угол $i\varphi$ соответственно может выражаться любым мнимым числом

$$-i\infty < i\varphi < +i\infty.$$

Если точка $M(x; y)$ на верхней ветви окружности (см. рис. 12) приближается к изотропной прямой $y = x$, то

$$|x+y| \rightarrow +\infty \quad \text{и} \quad \ln|x+y| \rightarrow +\infty.$$

В этом случае

$$\varphi = -\ln|x+y| \rightarrow -\infty.$$

Таким образом, угол между ортом e_2 и радиус-вектором верхнего сектора, приближающимся к изотропной $y = x$, выражается отрицательным мнимым числом, стремящимся к $-i\infty$. Если же точка $M(x; y)$ приближается вдоль верхней ветви окружности к изотропной $y = -x$, то

$$|x + y| \rightarrow 0, \quad \ln |x + y| \rightarrow -\infty.$$

Тогда

$$\varphi = -\ln |x + y| \rightarrow +\infty$$

и угол $i\varphi$ будет выражаться положительным мнимым числом, стремящимся к $+i\infty$. Угол между самой изотропной прямой и ортом e_2 не имеет определенного числового значения (обращается в $-i\infty$ или $+i\infty$). Больше того, поскольку угол между любым неизотропным вектором верхнего сектора и ортом e_2 выражается конечным мнимым числом, заключаем, что любой неизотропный вектор этого сектора составляет бесконечно большой угол с каждым из изотропных направлений.

Повторяя рассуждения об измерении углов (см. с. 84—85) для правой ветви

$$x = \sqrt{y^2 + 1}$$

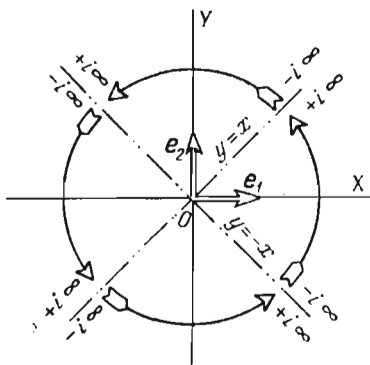


Рис. 14

единичной окружности (см. (2.29)), придем к выражению

$$\varphi = +\ln |x + y|,$$

которое означает, что угол между ортом e_1 и радиус-вектором правого сектора, приближающимся к изотропной $y = x$, положителен, а угол, отсчитываемый от e_1 по направлению к изотропной $y = -x$, отрицателен. Диаграмма на рис. 14 иллюстрирует положительное направление и диапазоны измерения углов во всех четырех секторах псевдоевклидовой плоскости. На всей плоскости положительное направление отсчета углов совпадает с направлением кратчайшего поворота от первого базис-

ного вектора ко второму (при кратчайшем повороте ни в одном из промежуточных состояний первый вектор не становится коллинеарным второму).

Хотя в псевдоевклидовой плоскости можно построить треугольник с двумя взаимно перпендикулярными сторонами (см. $\triangle ONM$ на рис. 12), его нельзя назвать прямоугольным. Ведь отношение перпендикулярности в псевдоевклидовой плоскости вообще не связано с определенной величиной угла, так как взаимно перпендикулярные прямые принадлежат различным секторам. Не определен также угол между гипотенузой OM и катетом NM , поскольку они принадлежат различным секторам. В треугольнике ONM на рис. 12 определен только угол \widehat{NOM} между сторонами \overline{ON} и \overline{OM} , принадлежащими одному сектору. Тем не менее треугольник с перпендикулярными сторонами в псевдоевклидовой плоскости играет такую же роль при построении тригонометрических функций угла, как прямоугольный треугольник в плоскости собственно евклидовой. Мы уже видели, что для косинуса угла в псевдоевклидовой плоскости остается справедливым геометрическое определение его как отношения длины прилежащего катета к длине гипотенузы. Теперь покажем, что отношение длины противолежащего катета к длине гипотенузы представляет синус угла в псевдоевклидовой плоскости, ибо совпадает с аналитическим продолжением функции синуса в область мнимых значений аргумента.

Из формул Эйлера (2.34) находим

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \cdot \sin z,$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (2.44)$$

Для мнимых значений аргумента $z = (0; y) = iy$ формула (2.44) примет вид

$$\sin(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = -i \frac{e^{-y} - e^y}{2} = i \frac{e^y - e^{-y}}{2}. \quad (2.45)$$

Согласно (2.45) синус мнимого аргумента имеет мнимые значения, которые могут быть положительными (для положительных значений y), отрицательными (для $y < 0$) или нулем (при $y = 0$). При рассмотрении геометрического определения синуса нужно учитывать эту изменчивость его знака.

В треугольнике NOM на рис. 12 гипотенуза OM является радиусом верхней ветви единичной окружности и

потому имеет длину $|\overline{OM}| = i$. Длина катета NM , противолежащего углу $i\varphi$, выражается вещественным числом $|\overline{NM}| = |x|$. Таким образом, абсолютная величина синуса угла $i\varphi$ равна отношению

$$\frac{|\overline{NM}|}{|\overline{OM}|} = \frac{|x|}{i} = -i|x|. \quad (2.46)$$

Если точка M имеет положительную абсциссу x , то угол \widehat{AOM} выражается отрицательным мнимым числом $i\varphi$ и, следовательно, вещественный параметр φ отрицателен. Тогда (см. (2.45)) и величина

$$i \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}$$

будет отрицательной. Значит, чтобы отношение противолежащего катета к гипотенузе представляло не только абсолютную величину, но и знак синуса, следует в (2.46) брать абсциссу x с ее знаком, опуская обозначение модуля. При этом для положительных углов $i\varphi > i \cdot 0$ абсцисса x точки M будет отрицательной (см. рис. 14) и $\sin(i\varphi)$ примет положительное значение в полном согласии с (2.45). Таким образом, геометрическое определение синуса угла $\widehat{AOM} = \widehat{NOM}$ в треугольнике NOM на рис. 12 должно быть следующим:

$$\sin(i\varphi) = \sin(\widehat{e_2, r}) = \frac{x}{i} = -ix. \quad (2.47)$$

Выражение абсциссы x через вещественный параметр φ найдем из равенств (2.41) и (2.42):

$$\begin{aligned} e^\varphi - e^{-\varphi} &= \frac{1}{x+y} - (x+y) = \frac{1 - (x+y)^2}{x+y} = \frac{1 - x^2 - 2xy - y^2}{x+y} = \\ &= \frac{-(y^2 - 1) - x^2 - 2xy}{x+y} = \frac{-2x^2 - 2xy}{x+y} = \frac{-2x(x+y)}{x+y} = -2x. \end{aligned}$$

Здесь использовано уравнение (2.30) мнимых ветвей окружности

$$x^2 = y^2 - 1.$$

Итак, получаем

$$\begin{aligned} -x &= \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}, & -ix &= i \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} \\ \sin(i\varphi) &= i \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Это равенство, полученное из геометрических соображений, совпало с аналитическим продолжением (2.45) функции синуса в область мнимых значений аргумента.

Пользуясь выражениями (2.43) и (2.48), найдем сумму квадратов косинуса и синуса мнимого аргумента:

$$\begin{aligned} \cos^2(i\varphi) + \sin^2(i\varphi) &= \frac{(e^\varphi + e^{-\varphi})^2}{4} + i^2 \frac{(e^\varphi - e^{-\varphi})^2}{4} = \\ &= \frac{1}{4} [(e^{2\varphi} + 2e^\varphi e^{-\varphi} + e^{-2\varphi}) - (e^{2\varphi} - 2e^\varphi e^{-\varphi} + e^{-2\varphi})] = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4e^\varphi e^{-\varphi} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, известное тригонометрическое тождество остается справедливым и для функций мнимого аргумента:

$$\cos^2(i\varphi) + \sin^2(i\varphi) = 1. \quad (2.49)$$

Тангенс мнимого аргумента определяется аналитически как отношение синуса к косинусу:

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = \frac{\sin(i\varphi)}{\cos(i\varphi)} = i \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{e^\varphi + e^{-\varphi}}. \quad (2.50)$$

Этому очевидным образом соответствует геометрическое определение тангенса как отношения длины катета, противолежащего углу $i\varphi$, к длине прилежащего катета. Для треугольника ONM на рис. 12 имеем

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = \operatorname{tg}(\widehat{NOM}) = \frac{|\overline{NM}|}{|\overline{ON}|} = \frac{|\overline{NM}| / |\overline{OM}|}{|\overline{ON}| / |\overline{OM}|} = \frac{|x|}{i|y|}.$$

Желая учесть знак тангенса, будем брать в последнем отношении координаты точки M не по абсолютной величине, а вместе с их знаками:

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = \frac{x}{iy} = \frac{-ix}{y} = \frac{\sin(i\varphi)}{\cos(i\varphi)}.$$

Тангенс мнимого аргумента принимает только мнимые значения.

В математике давно обращено внимание на замечательные функции вещественного аргумента, которые отличаются от рассмотренных здесь синуса (2.48) и тангенса (2.50) мнимого аргумента только тем, что принимают вещественные значения. Подмечена также связь их с гиперболой и некоторая, хотя и довольно формальная для собственно евклидовой геометрии аналогия с синусом

и тангенсом. Им даны следующие названия и обозначения:

$$\text{гиперболический синус } \operatorname{sh} \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}, \quad (2.51)$$

$$\text{гиперболический тангенс } \operatorname{th} \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}. \quad (2.52)$$

Функция *гиперболический косинус* определяется по существу такой же формулой

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}, \quad (2.53)$$

что и косинус мнимого аргумента (2.43), но отличается тем, что аргумент гиперболического косинуса считается вещественным числом. Только это и не позволяет рассматривать гиперболический косинус $\operatorname{ch} \varphi$ как аналитическое продолжение косинуса в область мнимых чисел. Имея в виду совпадение значений, принимаемых функциями, можно записать следующие равенства между функциями мнимого и соответствующими функциями вещественного аргумента (φ — вещественное число):

$$\cos(i\varphi) = \operatorname{ch} \varphi, \quad (2.54)$$

$$\sin(i\varphi) = i \cdot \operatorname{sh} \varphi, \quad (2.55)$$

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = i \cdot \operatorname{th} \varphi. \quad (2.56)$$

Отметим также соотношение

$$\operatorname{th} \varphi = \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}. \quad (2.57)$$

Мнимые значения синуса и тангенса связаны с мнимыми значениями своего аргумента такой же зависимостью, как вещественные значения гиперболических функций $\operatorname{sh} \varphi$ и $\operatorname{th} \varphi$ с их вещественным аргументом. Благодаря этому гиперболические функции удобно применять для графической иллюстрации тригонометрических функций мнимого угла. При построении графика $\cos(i\varphi)$ пришлось бы пользоваться условным чертежом, на котором по одной оси откладываются мнимые значения аргумента, а по другой — вещественные значения функции. Вместо этого строят график гиперболического косинуса, пользуясь равенством (2.54). Ценна возможность совмещать графики трех функций $\operatorname{ch} \varphi$, $\operatorname{sh} \varphi$, $\operatorname{th} \varphi$ на одном

чертеже (рис. 15), чего нельзя сделать для функций $\cos(i\varphi)$, $\sin(i\varphi)$, $\operatorname{tg}(i\varphi)$. Нужно обратить внимание на то, что значения гиперболического тангенса заключены в промежутке от -1 до $+1$, причем $\operatorname{th}\varphi$ асимптотически приближается к $+1$ при $\varphi \rightarrow +\infty$ и к -1 при $\varphi \rightarrow -\infty$, как следует из формул (2.52) и (2.57).

В терминах гиперболических функций тождество (2.49) примет вид

$$\operatorname{ch}^2 \varphi + i^2 \cdot \operatorname{sh}^2 \varphi = 1, \quad \text{или} \quad \operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1. \quad (2.58)$$

Нам потребуется выражать $\operatorname{ch}\varphi$ и $\operatorname{sh}\varphi$ через $\operatorname{th}\varphi$. Разделим обе части равенства (2.58) на $\operatorname{ch}^2 \varphi$ (это всегда

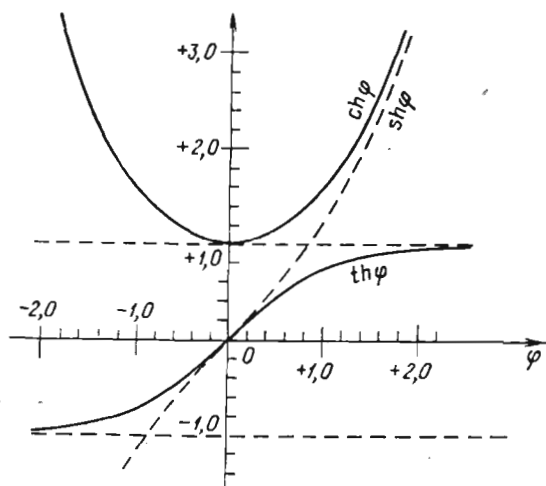


Рис. 15

допустимо, так как $\operatorname{ch}\varphi \neq 0$) и учтем соотношение (2.57):

$$1 - \frac{\operatorname{sh}^2 \varphi}{\operatorname{ch}^2 \varphi} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi}, \quad 1 - \operatorname{th}^2 \varphi = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi}$$

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \varphi}}. \quad (2.59)$$

Отсюда находим

$$\operatorname{sh} \varphi = \operatorname{th} \varphi \cdot \operatorname{ch} \varphi = \frac{\operatorname{th} \varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \varphi}}. \quad (2.60)$$

§ 14. Преобразование координат в псевдоевклидовой плоскости

Если изменить систему координат на плоскости, т. е. вместо базиса e_1, e_2 и полюса O выбрать другой базис e'_1, e'_2 и другой полюс O' , то изменятся координаты каждой точки M . Изменения, обусловленные сдвигом полюса на вектор $\overline{OO'}$, описываются просто:

$$r' = \overline{O'M} = \overline{OM} - \overline{OO'} = r - \overline{OO'}$$

и не представляют большого интереса для последующих физических приложений. Поэтому мы рассмотрим здесь только изменение базиса, полагая, что полюс O остается неизменным, а значит, не изменяется и радиус-вектор каждой точки. Коэффициенты разложения радиус-вектора $r = \overline{OM}$ по базису e_1, e_2 (обозначения этих базисных векторов не помечены штрихами):

$$r = \overline{OM} = xe_1 + ye_2 \quad (2.61)$$

будем называть нештрихованными координатами x и y точки M (относительно нештрихованной координатной системы OXY). Коэффициенты разложения этого же радиус-вектора по базису e'_1, e'_2 (помеченному штрихами):

$$r = \overline{OM} = x'e'_1 + y'e'_2 \quad (2.62)$$

будем называть штрихованными координатами x' и y' точки M (относительно штрихованной координатной системы $OX'Y'$). Для того чтобы по известным нештрихованным координатам x, y точки M можно было вычислить ее штрихованные координаты x', y' , достаточно знать разложения векторов e_1 и e_2 по штрихованному базису:

$$\begin{aligned} e_1 &= \varepsilon'_{11}e'_1 + \varepsilon'_{21}e'_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{21} \end{pmatrix}, \\ e_2 &= \varepsilon'_{12}e'_1 + \varepsilon'_{22}e'_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon'_{12} \\ \varepsilon'_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Подставляя эти разложения в (2.61), получим

$$\begin{aligned} r &= x(\varepsilon'_{11}e'_1 + \varepsilon'_{21}e'_2) + y(\varepsilon'_{12}e'_1 + \varepsilon'_{22}e'_2) = \\ &= (x\varepsilon'_{11} + y\varepsilon'_{12})e'_1 + (x\varepsilon'_{21} + y\varepsilon'_{22})e'_2. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Формулы (2.64) и (2.62) представляют разложения одного и того же вектора \mathbf{r} по одному и тому же базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Поэтому на основании теоремы об однозначности разложения вектора (элемента линейного пространства) по данному базису, доказанной в § 4, можно утверждать, что коэффициенты при одинаковых базисных векторах в разложениях (2.62) и (2.64) совпадают:

$$\begin{aligned} x' &= x\mathbf{e}'_{11} + y\mathbf{e}'_{12}, \\ y' &= x\mathbf{e}'_{21} + y\mathbf{e}'_{22}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Это и есть формулы преобразования координат любой точки (любого радиус-вектора) плоскости при изменении базиса.

Поскольку преобразования (2.65) получены с помощью только линейных операций, они выражают *линейные свойства* пространства и применимы в равной мере как к собственно евклидовой плоскости, так и к псевдоевклидовой. Но если принять во внимание метрические свойства пространства, то преобразование (2.63) базиса может быть описано в терминах длин и углов, причем эти метрические характеристики отразятся на выражении координат ε'_{ik} , $i, k = 1, 2$, по-разному в собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях.

Нас будет интересовать не всякое изменение базиса в псевдоевклидовой плоскости, а только переход от *ортонормированного* базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ к ортонормированному же базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Более того, мы будем выбирать штрихованный базис так, чтобы орт \mathbf{e}'_1 находился в одном секторе с ортом \mathbf{e}_1 и орт \mathbf{e}'_2 в одном секторе с ортом \mathbf{e}_2 . При этих условиях взаимосвязь базисов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ может быть однозначно выражена с помощью всего лишь одного параметра — угла между двумя базисными векторами одинакового смысла. Имея в виду предстоящие физические приложения формул преобразования координат, возьмем за основу *направленный* угол

$$\angle_{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2} = i\varphi \quad (2.66)$$

(угол отсчитывается по направлению от \mathbf{e}_2 к \mathbf{e}'_2). Знак угла $i\varphi$, в соответствии с рис. 14, покажет, в какую сторону от орта \mathbf{e}_2 отклонен орт \mathbf{e}'_2 . Направление орта \mathbf{e}_1

однозначно определится условием его перпендикулярности к орту \mathbf{e}_2 . Эти требования к базисам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ выражаются аналитически следующим образом:

1) условие ортонормированности

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_1 \rangle & \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle \\ \langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1 \rangle & \langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (2.67)$$

2) условие принадлежности одноименных базисных ортов к одному и тому же сектору

$$\varepsilon'_{11} > 0, \quad \varepsilon'_{22} > 0. \quad (2.68)$$

В силу условия ортонормированности (2.67) коэффициенты ε_{ik} , $i, k = 1, 2$, в разложениях (2.63) должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 1 \Leftrightarrow (\varepsilon'_{11})^2 - (\varepsilon'_{21})^2 = 1, \quad (2.69)$$

$$\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = -1 \Leftrightarrow (\varepsilon'_{12})^2 - (\varepsilon'_{22})^2 = -1, \quad (2.70)$$

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \varepsilon'_{11}\varepsilon'_{12} - \varepsilon'_{21}\varepsilon'_{22} = 0. \quad (2.71)$$

Отсюда находим

$$(\varepsilon'_{11})^2 - (\varepsilon'_{21})^2 = (\varepsilon'_{22})^2 - (\varepsilon'_{12})^2, \quad (2.72)$$

$$\varepsilon'_{11}\varepsilon'_{12} = \varepsilon'_{21}\varepsilon'_{22}, \quad \varepsilon'_{12} = \varepsilon'_{22} \frac{\varepsilon'_{21}}{\varepsilon'_{11}},$$

$$(\varepsilon'_{12})^2 = (\varepsilon'_{22})^2 \left(\frac{\varepsilon'_{21}}{\varepsilon'_{11}} \right)^2. \quad (2.73)$$

Подставляя (2.73) в (2.72), получим

$$(\varepsilon'_{11})^2 - (\varepsilon'_{21})^2 = (\varepsilon'_{22})^2 - (\varepsilon'_{22})^2 \left(\frac{\varepsilon'_{21}}{\varepsilon'_{11}} \right)^2 = (\varepsilon'_{22})^2 \left[1 - \left(\frac{\varepsilon'_{21}}{\varepsilon'_{11}} \right)^2 \right],$$

$$(\varepsilon'_{11})^2 - (\varepsilon'_{21})^2 = \left(\frac{\varepsilon'_{22}}{\varepsilon'_{11}} \right)^2 [(\varepsilon'_{11})^2 - (\varepsilon'_{21})^2]. \quad (2.74)$$

Так как $(\varepsilon'_{11})^2 - (\varepsilon'_{21})^2 = 1$ (см. (2.69)), то из (2.74) вытекает

$$\left(\frac{\varepsilon'_{22}}{\varepsilon'_{11}} \right)^2 = 1.$$

Последнее соотношение выполняется в двух случаях:

$$\varepsilon'_{22} = \varepsilon'_{11}, \quad \varepsilon'_{22} = -\varepsilon'_{11}.$$

Но второе из этих равенств противоречит условию (2.68). Остается приемлемым только равенство

$$\varepsilon'_{22} = \varepsilon'_{11}. \quad (2.75)$$

Оно в сочетании с условием перпендикулярности (2.71) приводит к равенству

$$\varepsilon'_{12} = \varepsilon'_{21}. \quad (2.76)$$

Мы воспользуемся равенствами (2.75) и (2.76), чтобы выразить коэффициенты ε'_{ik} , $i, k = 1, 2$, через угол $\widehat{e_2, e_2} = i\varphi$ (см. (2.66)). Вычислим скалярные произведения

$$\langle e_1, e_1' \rangle = \langle \varepsilon'_{11}e_1 + \varepsilon'_{21}e_2, e_1' \rangle = \varepsilon'_{11} \langle e_1, e_1' \rangle = \varepsilon'_{11},$$

$$\langle e_2, e_2' \rangle = \langle \varepsilon'_{12}e_1 + \varepsilon'_{22}e_2, e_2' \rangle = \varepsilon'_{22} \langle e_2, e_2' \rangle = -\varepsilon'_{22} = -\varepsilon'_{11}.$$

Поскольку орты e_i и e_i' принадлежат одному сектору (правому), имеет определенное значение угол между ними и косинус этого угла

$$\cos(\widehat{e_1, e_1'}) = \frac{\langle e_1, e_1' \rangle}{|e_1| \cdot |e_1'|} = \frac{\varepsilon'_{11}}{1 \cdot 1} = \varepsilon'_{11}. \quad (2.77)$$

Поскольку орты e_2 и e_2' принадлежат одному сектору (верхнему), имеет определенное значение угол между ними и косинус этого угла

$$\cos(\widehat{e_2, e_2'}) = \frac{\langle e_2, e_2' \rangle}{|e_2| \cdot |e_2'|} = \frac{-\varepsilon'_{11}}{i \cdot i} = \frac{-\varepsilon'_{11}}{-1} = \varepsilon'_{11}. \quad (2.78)$$

Из равенства косинусов

$$\cos(\widehat{e_1, e_1'}) = \cos(\widehat{e_2, e_2'})$$

следует равенство абсолютных величин углов (так как косинус — четная функция):

$$|\widehat{e_1, e_1'}| = |\widehat{e_2, e_2'}| = |i\varphi|.$$

Подставляя (2.77) в (2.69), находим

$$(\varepsilon'_{21})^2 = (\varepsilon'_{11})^2 - 1 = \cos^2(\widehat{e_1, e'_1}) - 1 = \cos^2(i\varphi) - 1 = \\ = \operatorname{ch}^2 \varphi - 1 = \operatorname{sh}^2 \varphi$$

(см. (2.58)). Следовательно, на основании (2.76) имеем

$$(\varepsilon'_{12})^2 = (\varepsilon'_{21})^2 = \operatorname{sh}^2 \varphi.$$

Итак, перед нами две возможности:

$$\text{либо } \varepsilon'_{21} = \varepsilon'_{12} = \operatorname{sh} \varphi,$$

$$\text{либо } \varepsilon'_{21} = \varepsilon'_{12} = -\operatorname{sh} \varphi.$$

Вопрос о выборе знака перед гиперболическим синусом связан с вопросом о направлении отсчета углов $\widehat{e_2, e_2}$ и $\widehat{e_1, e_1}$. По смыслу отношения перпендикулярности неизотропных векторов псевдоевклидовой плоскости

(см. § 12) направления углов $\widehat{e_2, e_2}$ и $\widehat{e_1, e_1}$ взаимно противоположны. Это под-

тверждается и рассмотрением знаков коэффициентов ε'_{21} и ε'_{12} . Для удобства рассмотрения на рис. 16 орты штрихованного базиса e'_1, e'_2 , по которому мы разлагаем векторы e_1 и e_2 (см. (2.63)), изображены под прямым углом.

Если коэффициенты $\varepsilon'_{21} = \varepsilon'_{12}$ положительны, то составляющая $\varepsilon'_{21}e'_2$ вектора e_1 направлена в одну сторону с ортом e'_2 и составляющая $\varepsilon'_{12}e'_1$ вектора e_2 направлена в одну сторону с ортом e'_1 . Именно такой случай изображен на рис. 16. Видно, что углы

$\widehat{e_2, e_2}$ и $\widehat{e_1, e_1}$ направлены противоположно друг другу,

причем угол $\widehat{e_2, e_2} = i\varphi$ положителен. Из условия $i\varphi > i \cdot 0$ следует $\varphi > 0$ и $\operatorname{sh} \varphi > 0$ (см. рис. 15). При отрицательном значении коэффициентов ε'_{21} и ε'_{12} составляющая $\varepsilon'_{21}e'_2$ вектора e_1 будет направлена противоположно

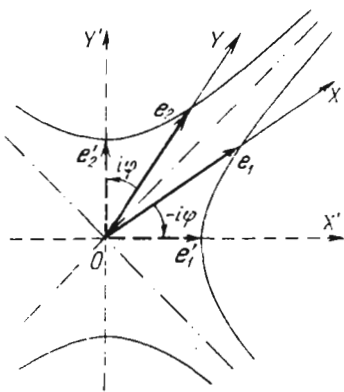


Рис. 16

орту e'_2 и составляющая $\varepsilon'_{12}e'_1$ вектора e_2 будет направлена противоположно орту e'_1 . Тогда направления отсчета углов e_2, e'_2 и e_1, e'_1 также будут взаимно противоположны, но угол e_2, e'_2 будет отрицательным. Таким образом, если согласовывать знак коэффициентов ε'_{21} и ε'_{12} с углом $e_2, e'_2 = i\varphi$ (см. (2.66)), то следует принять

$$\varepsilon'_{21} = \varepsilon'_{12} = \text{sh } \varphi, \quad (2.79)$$

что мы и сделаем.

Подставляя (2.78), (2.75) и (2.79) в (2.65), получаем формулы преобразования

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \text{ch } \varphi + y \cdot \text{sh } \varphi, \\ y' &= x \cdot \text{sh } \varphi + y \cdot \text{ch } \varphi \end{aligned} \quad (2.80)$$

координат точек псевдоевклидовой плоскости при повороте векторов ортонормированного базиса навстречу друг другу на угол $i\varphi$.

Мы придадим формулам (2.80) несколько иной вид, выражая гиперболический косинус и гиперболический синус через гиперболический тангенс по формулам (2.59) и (2.60)

$$x' = \frac{x + y \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}}, \quad y' = \frac{y + x \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}}. \quad (2.81)$$

Глава 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

«... если бы форма проявления и сущность вещей непосредственно совпадали, то всякая наука была бы излишня...»

К. Маркс [2]

§ 15. Преобразование Лоренца

Движение всех тел (материальных точек) подчинено законам механики Ньютона. Однако эти законы справедливы лишь при определенных условиях. Представим себе наблюдателя, который находится в закрытой камере, движущейся с ускорением по отношению к земной поверхности, но ничего не знает о состоянии своего движения. Производя механические опыты, такой наблюдатель может обнаружить, что тело, на которое не действуют другие тела, способно двигаться ускоренно относительно камеры. Этот результат по видимости противоречит первому закону Ньютона (закону инерции), но не опровергает его, а объясняется в рамках закона тем, что сама система координат (камера) движется ускоренно. Такие координатные системы, в которых *наблюдается* нарушение закона инерции, называются *неинерциальными*. Системы, в которых не наблюдается нарушение закона инерции, называются *инерциальными*. Во многих случаях система координат, неподвижная относительно земной поверхности, может с достаточной степенью точности считаться инерциальной. Для обнаружения ее неинерциальности требуются специальные эксперименты, например опыт с маятником Фуко, доказывающий вращение Земли. Системой, инерциальность которой установлена с наибольшей точностью, является

система координат, начало которой связано с Солнцем, а оси направлены на звезды, выбранные соответствующим образом [21]. Всякая координатная система, движущаяся относительно инерциальной системы с постоянной скоростью (в частности, неподвижная), также является инерциальной. Мы будем рассматривать простейшие движения материальной точки — движения вдоль прямой, но будем считать, что на этой прямой существует такая система координат, в которой выполняются все законы механики Ньютона, т. е. инерциальная система координат. Положим, что начало инерциальной системы координат связано с материальной точкой O . Выбрав на прямой единицу измерения длин и положительное направление, получим одномерную инерциальную систему координат OX (рис. 17).

Пусть вдоль оси OX движется с постоянной скоростью v материальная точка O' . Примем ее за начало другой координатной системы $O'X'$ на той же прямой (или близкой к ней параллельной прямой, как показано на рис. 17), считая, что положительные направления в обеих координатных системах совпадают. Система $O'X'$ — инерциальная, так как она движется с постоянной скоростью относительно инерциальной системы координат OX . Согласно принципу относительности Галилея каждая из инерциальных систем OX и $O'X'$ с одинаковым правом может быть принята за неподвижную. Поэтому

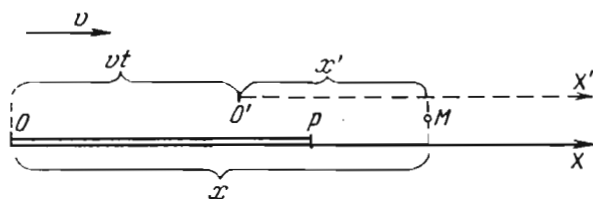


Рис. 17

мы не станем закреплять за системой OX эпитет «неподвижная», а будем называть ее нештрихованной инерциальной системой координат, в отличие от штрихованной инерциальной системы $O'X'$.

Движущиеся относительно друг друга инерциальные системы существенно отличаются своей взаимосвязью от координатных систем, рассматриваемых в чисто геометрических задачах, где штрихованная и нештрихованная системы занимают фиксированное положение в простран-

стве. В случае взаимно неподвижных систем преобразование координат описывается с помощью только геометрических параметров: расстояний, углов, координат векторов и точек. При переходе же к движущейся координатной системе приходится принимать во внимание параметр иного рода — время. Задача перестает быть чисто геометрической в традиционном смысле, и для решения ее требуются, кроме аксиом линейного пространства и скалярного произведения векторов, некоторые дополнительные утверждения, затрагивающие физические свойства мира.

Одно из них — утверждение инвариантности промежутков времени. Предположим, что в координатной системе OX (см. рис. 17) покоится стержень OP . Материальная точка O' в процессе своего движения вдоль оси OX совместится с точкой O в некоторый момент времени, который мы примем за начало отсчета времени $t_0 = 0$ по часам, неподвижным относительно нештрихованной системы OX . Позже, в момент t_p , по тем же часам материальная точка O' совместится с точкой P на оси OX . Промежуток времени между этими двумя событиями обозначим $t_p - t_0 = \tau$. Но можно отмечать моменты совпадения материальной точки O' с концами O и P стержня по часам, неподвижным относительно штрихованной инерциальной системы координат $O'X'$. За начало отсчета времени по этим часам примем также событие совмещения материальных точек O' и O ($t'_0 = 0$). Совмещение материальных точек O' и P произойдет в момент t'_p по часам штрихованной инерциальной системы. Промежуток времени между обоими событиями по этим часам равен $t'_p - t'_0 = \tau'$. Согласно опыту обыденной жизни и тем научным экспериментам, на которые опиралась классическая физика, не обнаруживается различия между промежутками времени τ и τ' . Равенство

$$\tau = \tau' \quad (3.1)$$

выражает инвариантность промежутка времени между двумя событиями, т. е. независимость его от того, в какой из инерциальных систем координат производится измерение времени. Впрочем, потребность ставить специальные эксперименты для точной проверки равенства (3.1) вряд ли возникала при господстве классических представлений о пространстве и времени. По-видимому, соотношение (3.1) просто допускалось в теоретических рассуждениях как само собой разумеющееся, а противоречия

теоретических выводов с результатами экспериментов не обнаруживались.

Еще меньше было видимых оснований подвергать сомнению убежденность в том, что длина стержня OP не зависит от того, в какой из инерциальных координатных систем производится измерение. В нештрихованной системе координат OX стержень OP неподвижен. Координаты $x_0 = 0$ и $x_P = l$ его концов не изменяются с течением времени, и потому длина стержня равна разности координат

$$x_P - x_0 = l$$

безотносительно к тому, в какой момент времени измерена каждая координата. Но, согласно принципу относительности Галилея, инерциальные координатные системы OX и $O'X'$ равноправны по отношению к любым механическим экспериментам. Различие между ними заключается лишь в нашем представлении о том, что движется и что неподвижно. Если за неподвижную принимается штрихованная система координат, то стержень OP оказывается движущимся вдоль оси $O'X'$ со скоростью v в сторону отрицательных значений координаты x' . Для того чтобы выразить длину движущегося стержня в виде разности штрихованных координат его концов, существенно важно измерить эти координаты в *один и тот же* момент времени по часам штрихованной координатной системы. Например, в начальный момент времени $t'_0 = 0$ конец O стержня совпадает с началом координат системы $O'X'$ и имеет в этой системе координаты $x'_0 = 0$. В *тот же* момент времени t'_0 конец P стержня совпадает с точкой оси $O'X'$, имеющей абсциссу $x'_P = l'$. Разность

$$x'_P - x'_0 = l'$$

представляет длину стержня по измерениям в системе $O'X'$. Равенство

$$l = l' \tag{3.2}$$

выражает инвариантность длины стержня. О равенстве (3.2) тоже можно сказать, что оно подтверждалось опытом обыденной жизни и научными экспериментами классической физики.

Утверждение инвариантности промежутков времени и расстояний в пространстве с полной логической строгостью соответствует классическим представлениям о ми-

ре, согласно которым все материальные объекты погружены в единственное трехмерное собственно евклидово пространство и охвачены одним всеобщим процессом течения времени. Мы воспринимаем материальные объекты в виде тел. Абстрактной моделью тела и основным объектом классической механики является материальная точка. В геометрическом аспекте материальная точка есть точка трехмерного собственно евклидова пространства, а в физическом аспекте она отличается от пустых точек этого пространства тем, что имеет массу и подчинена в своих движениях законам механики Ньютона. Расстояние между определенными точками пространства не зависит от того, какой системой координат мы пользуемся для указания положения точек. Движущуюся координатную систему можно представить как бесконечное множество фиксированных координатных систем, сменяющихся в определенной последовательности. Поэтому величина, инвариантная по отношению к смене координатных систем, не может утратить свою инвариантность при взаимном движении систем.

Исходя из таких представлений, нетрудно выяснить, как преобразуется координата любой точки одномерного пространства, изображенной на рис. 17, при переходе от инерциальной системы координат OX к инерциальной системе $O'X'$. Принимая событие совмещения материальных точек O и O' за начальный момент отсчета времени по часам каждой системы и учитывая инвариантность промежутков времени (3.1), заключаем, что в любой момент времени t по часам штрихованной координатной системы часы штрихованной координатной системы показывают отсчет времени t' , удовлетворяющий равенству

$$t' = t. \quad (3.3)$$

Пусть произвольная точка M рассматриваемого нами одномерного пространства имеет в системе OX координату x в момент времени t . В этот момент материальная точка O' имеет в системе OX координату $x_0 = vt$, и координата точки M относительно системы $O'X'$ определяется равенством (см. рис. 17)

$$x' = x - vt. \quad (3.4)$$

Совокупность формул (3.3) и (3.4) носит название **галилеева преобразования координат**. Преобразование Галилея органически вписывается в стройную теорию классической механики с ее основополагающими представле-

ниями об инвариантности промежутков времени, пространственных расстояний и масс материальных точек. Когда физика столкнулась с явлениями, противоречащими инвариантности этих величин, то оказалась под сомнением и справедливость галилеева преобразования.

Для объяснения отрицательного результата эксперимента Майкельсона — Морли [6] два физика, Х. А. Лоренц и Фитцджеральд, высказали независимо друг от друга в 1892 г. гипотезу о сокращении размеров движущихся тел в направлении их движения [22]. Это была попытка подкорректировать классическую картину мира путем учета воздействия загадочной среды — мирового эфира на движущиеся в нем тела. В 1895 г. Х. А. Лоренц ввел понятие о местном времени, которое в движущихся телах течет иначе, чем в покоящихся относительно эфира. В 1905 г. А. Эйнштейн дал новый подход к проблеме. Обобщая экспериментальные факты, он сформулировал два постулата (см. § 1), совместное применение которых противоречит преобразованию Галилея. Но Эйнштейн показал, что внутреннего противоречия между этими постулатами нет, а из сочетания их вытекает отличное от галилеева преобразование координат в пространстве и отсчетов времени при переходе от одной инерциальной координатной системы к другой. Аналогичное преобразование формально было найдено раньше Лоренцем, и Анри Пуанкаре ввел термины «преобразование Лоренца», «группа Лоренца» [22]. Эйнштейн также назвал выведенные им формулы преобразованием Лоренца. Применительно к рассмотренному выше относительному движению систем OX и $O'X'$ в одномерном пространстве и в тех же обозначениях, что на рис. 17 и в формулах (3.3), (3.4), преобразование Лоренца имеет следующий вид:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (3.5)$$

Здесь c — скорость света в вакууме, которая, согласно второму постулату Эйнштейна, одинакова во всех инерциальных системах координат. Если скорость v относительного движения инерциальных систем пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света ($v \ll c$, $v/c \approx 0$), то из лоренцева преобразования (3.5) получаются формулы (3.3) и (3.4) преобразования Галилея. В теории

Эйнштейна преобразование (3.5) выступило как раскрытие фундаментальных, неведомых прежде свойств пространства и времени, как провозвестие новой картины мира, основные очертания которой первым увидел Герман Минковский. Из формул (3.5) вытекают в качестве-следствий все замечательные эффекты специальной теории относительности. За восемь десятков лет существования этой теории лоренцево преобразование подверглось всесторонней тщательной проверке и утвердилось в науке в качестве глубокого закона природы.

§ 16. О чем говорит сравнение преобразования Лоренца с преобразованием координат в псевдоевклидовой плоскости

Выпишем рядом преобразование (2.81) координат в псевдоевклидовой плоскости и лоренцево преобразование (3.5):

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x + y \cdot \operatorname{th} \varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \varphi}}, \\ y' &= \frac{y + x \cdot \operatorname{th} \varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \varphi}}, \end{aligned} \right| \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \\ t' &= \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \end{aligned}$$

Разительно сходны по структуре соответствующие формулы в этих преобразованиях. Сразу бросается в глаза соответствие

$$\operatorname{th}^2 \varphi \leftrightarrow (v/c)^2.$$

При более детальном рассмотрении выявляются соотношения

$$y = ct, \quad (3.6)$$

$$\operatorname{th} \varphi = -v/c, \quad (3.7)$$

которые, будучи подставлены в формулы (2.81), превращают их в формулы (3.5):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x + ct(-v/c)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \\ y' &= \frac{ct + x(-v/c)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = c \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = ct'. \end{aligned}$$

Попутно получается равенство

$$y' = ct'. \quad (3.8)$$

О чем говорит это многозначительное совпадение преобразований?

По меньшей мере о том, что в явлении движения материальной точки вдоль прямой пространственная протяженность x и величина ct , пропорциональная временной длительности и имеющая размерность пространственной протяженности, связаны между собой как координаты элементов некоторого двумерного линейного пространства, которое к тому же обладает псевдоевклидовыми метрическими свойствами. Это существенно новая грань в общем представлении о пространстве и времени как формах существования материи.

Их взаимосвязь в классическом понимании ограничивалась тем, что материя не может двигаться вне времени, как она не может двигаться вне пространства. Двойственная обусловленность движения тела выражается в виде функциональной зависимости его пространственных координат от времени. В частности, движение материальной точки вдоль прямой исчерпывающе описывается функцией

$$x = F(t), \quad (3.9)$$

наглядное представление о которой дает *график движения* материальной точки.

В качестве примера рассмотрим графики движения материальных точек O , P и O' (см. рис. 17) относительно двух инерциальных систем: нештрихованной системы OX (рис. 18, а) и штрихованной системы $O'X'$ (рис. 18, б). В нештрихованной координатной системе стержень OP покоится. Поэтому материальные точки O и P (концы стержня) не изменяют своей координаты x со временем:

$$x_o = 0, \quad x_p = l$$

и графики этих функций являются прямыми, параллельными оси переменной t (частный случай графика движения — график покоя материальной точки). Материальная точка O' движется с постоянной скоростью v относительно нештрихованной инерциальной системы. Поэтому координата x точки O' является линейной функцией времени $x = vt$, график которой — прямая, наклоненная к оси t . В штрихованной инерциальной системе $O'X'$ материальная точка O' неподвижна. Поэтому ее графиком

движения служит ось переменной t' . Напротив, материальные точки O и P движутся относительно $O'X'$ с постоянной скоростью $(-v)$. Поэтому их графики движения наклонены к оси t' . За начало координат на обоих рис. 18 принято событие совмещения материальных точек O и O' .

Рассмотренные графики, как и график всякой функции (3.9), свидетельствуют, что в явлении одномерного

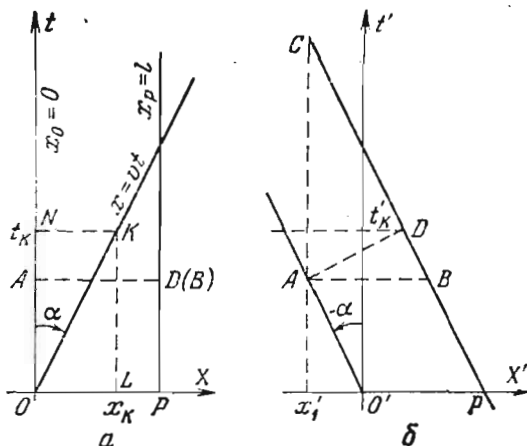


Рис. 18

движения материальной точки реализуется связь между двумя величинами: пространственной координатой x и отсчетом времени t . Однако говорить о двумерности этого явления пока не приходится, поскольку в нем не обнаруживается объект, который мог бы выступить в роли элемента двумерного линейного пространства. На графике движения мы видим такие объекты, как участки линии графика, но ведь это на самом деле не что иное, как линии и геометрические векторы, принадлежащие плоскости рисунка, которая действительно является линейным пространством. Однако то обстоятельство, что одному из базисных векторов плоскости рисунка мы приписываем смысл промежутка времени,— чистая условность, принимаемая нами в иллюстративных целях. А есть ли какой-либо реальный физический смысл в величине, представляющей линейную комбинацию (в частности, сумму) пространственной протяженности и временной длительности?

Длительности промежутков времени сами по себе образуют одномерное линейное пространство, в котором можно указать базисный элемент — ненулевой направленный (из прошлого в будущее) промежуток, принятый за единицу измерения времени. Образом этого линейного пространства служит ось времени на графике движения. Поэтому любые отрезки на графике, параллельные оси переменной t , имеют физический смысл промежутка времени. Например, на рис. 18, б отрезок AC выражает длительность промежутка времени между двумя событиями, происходящими в одном и том же месте на прямой $O'X'$ (одноместными событиями).

Пространственная ось OX (или $O'X'$), рассматриваемая отдельно, также является одномерным линейным пространством, имеющим свой базис — ненулевой вектор e_1 . На графике движения всякий отрезок, параллельный пространственной оси OX , имеет физический смысл пространственной протяженности. Например, на рис. 18, б отрезок AB представляет расстояние между двумя одновременными событиями, равное длине движущегося стержня OP .

Но всякий отрезок на графике движения, не параллельный ни одной из координатных осей, не имеет физического смысла. Например, направленный отрезок \overline{OK} на рис. 18, а является геометрической суммой отрезков \overline{OL} и \overline{ON} :

$$\overline{OK} = \overline{OL} + \overline{ON}.$$

Отрезку \overline{OL} соответствует перемещение материальной точки O' вдоль одномерного пространства OX из точки O в точку L , отрезку \overline{ON} соответствует промежуток времени, за которое совершается это перемещение, а отрезку \overline{OK} не соответствует никакая физическая величина, ибо сложение промежутков пространства с промежутками времени не имеет смысла. Каждой точке плоскости, на которой начерчен график движения, соответствует упорядоченная пара чисел $(x; t)$. На рисунке множество таких точек образует двумерное линейное пространство — плоскость рисунка. В природе же, по понятиям классической механики, упорядоченным парам значений пространственной координаты x и отсчета времени t не соответствует двумерное линейное пространство. Отсутствие линейных свойств в множестве этих пар влечет за собой и отсутствие свойств метрических. Поэтому нет

естественной соизмеримости между отрезками пространственной оси OX и отрезками оси времени. На графике движения соотношение масштабов по этим осям выбирается искусственно из произвольных соображений удобства. Обычай изображать на графике движения оси переменных x и t как взаимно перпендикулярные тоже продиктован только соображениями удобства и не имеет оснований в законах классической механики.

Вообще любые двумерные соотношения на графиках движения в классической механике являются в лучшем случае условными характеристиками движения. Даже наклон графика к оси времени характеризует скорость движения условно. У графиков движущихся материальных точек на рис. 18 тангенс угла наклона α к оси времени равен 0,5. Располагая только этим числом, мы не можем сказать ничего определенного об относительной скорости инерциальных систем OX и $O'X'$ (масштабы по осям переменных x и t намеренно не указаны). Длина отрезка AD на рис. 18, б является примером величины, с которой мы не связываем даже условной характеристики движения. Лишь в том случае, когда графики движения материальных точек параллельны оси времени (графики состояния покоя), перпендикуляр к ним становится параллельным пространственной оси и длина его обретает физический смысл расстояния между материальными точками O и P (см. $AD = AB$ на рис. 18, а).

Привычные классические представления о явлении одномерного движения материальной точки, на некоторые черты которого здесь обращено внимание, требуют радикального пересмотра в свете того факта, что лоренцево преобразование (3.5) по сути своей есть преобразование координат (2.81) в двумерном псевдоевклидовом пространстве. Мы увидим новые черты в явлении движения, если для изображения его используем псевдоевклидову плоскость, обладающую теми самыми линейными и метрическими свойствами, которые лежат в основе преобразования Лоренца. Конечно, мы не можем увидеть или изобразить в натуре метрические свойства псевдоевклидовой плоскости, но уже умеем обойти это затруднение с помощью точных математических соотношений и их условного изображения (см. главу 2). Что же касается линейных свойств, то они одинаковы у псевдоевклидовой плоскости и у собственно евклидовой плоскости рисунка.

Рис. 19 по своему физическому смыслу представляют аналог соответствующих рис. 18. На них изображены

графики движения материальных точек O, P, O' (см. рис. 17) относительно нештрихованной инерциальной системы OX (рис. 19, а) и относительно штрихованной инерциальной системы $O'X'$ (рис. 19, б). В отличие от рис. 18, рис. 19 представляют образы псевдоевклидовой плоскости, а по оси ординат на них откладывается не отсчет времени t , а пропорциональная ему величина $y = ct$ (см. (3.6)), имеющая размерность пространственной

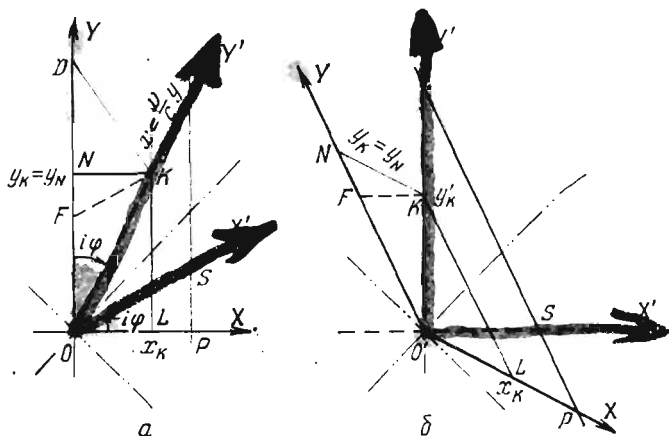


Рис. 19

протяженности. На рис. 19 показаны образы изотропных прямых, проходящих через начало координат псевдоевклидовой плоскости.

Для того чтобы уравнение движения материальной точки O' :

$$x = vt$$

иллюстрировать графиком на рис. 19, а, нужно выразить переменную t через переменную y из соотношения (3.6):

$$t = y/c.$$

Тогда получим

$$x = vt = v \cdot \frac{y}{c} = \frac{v}{c} y.$$

Отношение

$$\frac{x}{y} = \frac{v}{c} \quad (3.10)$$

характеризует скорость движения материальной точки

относительно инерциальной системы OX , но вместе с тем и угол наклона графика движения к оси ординат y в псевдоевклидовой плоскости. Из треугольника OKN с взаимно перпендикулярными (в псевдоевклидовом смысле) сторонами ON и NK найдем тангенс угла

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = \frac{x_K}{iy_K} = -i \frac{x_K}{y_K}$$

(iy_K — длина катета ON , выражаемая мнимым числом, поскольку вектор \overline{ON} принадлежит верхнему сектору псевдоевклидовой плоскости). Подставляя сюда (3.10) и учитывая (2.56), получим

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = i \cdot \operatorname{th} \varphi = -i \frac{x_K}{y_K} = -i \frac{v}{c}, \quad (3.11)$$

или

$$\operatorname{th} \varphi = -v/c.$$

Это то самое равенство (3.7), которое было найдено нами в качестве одного из соотношений, опосредствующих переход от преобразования координат (2.81) в псевдоевклидовой плоскости к лоренцеву преобразованию (3.5). Но первоначально мы получили равенство (3.7) из чисто формальных соображений сходства преобразований, а теперь подошли к его кинематическому смыслу. Оказывается, отношение v/c характеризует величину угла между графиком движения (покоя) материальной точки O начала координат нештрихованной инерциальной системы и графиком движения материальной точки O' , принятой за начало координат штрихованной инерциальной системы (см. рис. 17). В равенстве (3.11), которое является произведением равенства (3.7) на мнимую единицу $i = \sqrt{-1}$, содержится явное выражение угла $i\varphi$ в псевдоевклидовой плоскости.

Но вот это особенно замечательно: связь (3.11) скорости v относительного движения инерциальных систем координат с углом $i\varphi$ между их графиками на псевдоевклидовой плоскости уже не является условной! Преобразование координат (2.81) в псевдоевклидовой плоскости получено для ортонормированных координатных систем. И так как преобразование Лоренца (3.5) по своей сути выражает те же линейные и метрические отношения, что и преобразование (2.81), ось переменной $ct = y$ необходимо должна быть перпендикулярна (в псевдоевклидовом смысле) к оси OX . Кроме того, в самой природе

(а не только на псевдоевклидовой плоскости, выбранной для построения графиков движения) имеется метрическая соизмеримость величин x и $ct = y$, выраженная в преобразовании Лоренца. Поэтому, зная величину угла φ , мы без всяких дополнительных произвольных условий можем вычислить по формуле (3.11) скорость v . И наоборот, определенному значению скорости v однозначно соответствует определенная величина угла φ . Такая объективность взаимосвязей, представлявших прежде условными, весьма многозначительна, ибо свидетельствует о том, что они заложены в самой природе вещей.

Совпадение преобразования Лоренца (3.5) с преобразованием (2.81) координат в псевдоевклидовой плоскости позволило увидеть, что в природе имеет смысл линейная комбинация пространственной протяженности и величины ct , характеризующей временную длительность. Направленный отрезок \overline{OK} графика движения материальной точки O' (см. рис. 19, а) является линейной комбинацией направленных отрезков \overline{OL} и \overline{ON} :

$$\overline{OK} = \overline{OL} + \overline{ON}.$$

Отрезок \overline{OL} выражает перемещение материальной точки O' в одномерном пространстве OX . Отрезок \overline{ON} характеризует промежуток времени, затраченного материальной точкой на это перемещение. А какой физический смысл имеет отрезок \overline{OK} и его длина? Чтобы разобраться в этом, воспользуемся принципом относительности, утверждающим, что инерциальная система $O'X'$ с таким же правом может быть принята за неподвижную, как и система OX .

В штрихованной инерциальной системе координат $O'X'$ материальная точка O' покоится. Поэтому ее график выступает в роли оси ординат $O'Y'$ псевдоевклидовой плоскости на рис. 19, б. Так как отсчет времени и пространственной координаты на рис. 19, а и 19, б ведется от одного и того же события — совмещения материальных точек O' и O (см. рис. 17), то начала двумерных координатных систем OXY и $O'X'Y'$, изображенных на этих рисунках, совпадают, и можно применить формулы (2.81) для вычисления координат точки $K(x_k; y_k)$ по отношению к штрихованной системе:

$$x'_k = \frac{x_k + y_k \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}}, \quad y'_k = \frac{y_k + x_k \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}}.$$

Поскольку точка K лежит на прямой

$$x = vt = v \cdot \frac{y}{c} = y \frac{v}{c}$$

(см. рис. 19, а), ее координаты удовлетворяют соотношению

$$x_K = y_K \frac{v}{c},$$

или, с учетом (3.7),

$$x_K = -y_K \cdot \text{th } \varphi. \quad (3.12)$$

Поэтому получаем

$$x'_K = \frac{-y_K \cdot \text{th } \varphi + y_K \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = 0, \quad (3.13)$$

$$y'_K = \frac{y_K + (-y_K \cdot \text{th } \varphi) \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = y_K \frac{1 - \text{th}^2 \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = y_K \sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}.$$

Этот результат аналитических выкладок достаточно понятен. Событие K изображается точкой на графике движения материальной точки O' , и потому в той координатной системе, в которой этот график служит осью ординат, абсцисса точки K равна нулю. Ордината же y'_K точки K в штрихованной системе $O'X'Y'$ характеризует промежуток времени, отделяющий событие K от события, представленного началом координат. Этот промежуток времени, согласно (3.8), равен

$$t'_K = \frac{y'_K}{c} = \frac{y_K}{c} \sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi},$$

или, с учетом (3.6) и (3.7),

$$t'_K = t_K \sqrt{1 - (v/c)^2}. \quad (3.14)$$

Согласно галилееву преобразованию (3.3) длительность промежутка времени между двумя событиями не изменяется при переходе от одной инерциальной системы координат к другой. Равенство же (3.14), полученное из лоренцева преобразования, означает, что промежуток времени между двумя событиями имеет наименьшее значение в той системе координат, по отношению к которой эти события одновременны. Это знаменитый релятивистский эффект сокращения промежутков времени, отсчитанных по движущимся часам.

Отрезки оси OY на рис. 19, а характеризуют промежутки времени, отсчитанные по часам, неподвижным относительно оси OX . Отрезки оси $O'Y'$ на рис. 19, б характеризуют промежутки времени, отсчитанные по часам, неподвижным относительно оси $O'X'$, но движущимся относительно нештрихованной инерциальной системы OX со скоростью v . Вот и получается, что для событий, изображенных на рис. 19, а точками O и K и являющихся разноместными в нештрихованной координатной системе ($x_0 \neq x_k$), промежутков времени t_k , отсчитанный по часам, неподвижным в этой системе, длиннее промежуток времени t'_k , отсчитанного по движущимся часам. Сознание, оперирующее только классическими представлениями, не может мириться с этим странным эффектом. Ведь если промежуток времени между *одними и теми же событиями* зависит от выбора координатной системы, каковой выбор остается в нашей власти, то не рухнет ли тем самым объективная значимость времени как одной из мер движения материи? Рис. 19, а и 19, б позволяют увидеть поверхностную наивность такого недоумения.

В том-то и дело, что величины $y_k = ct_k$ и $y'_k = ct'_k$ характеризуют промежутки времени между *различными парами событий*, т. е. существенно различные промежутки времени! Величиной y_k определяется длина вектора \overline{ON} (см. рис. 19, а):

$$|\overline{ON}| = iy_k = ict_k. \quad (3.15)$$

Точка N принадлежит графику движения (покоя) материальной точки O и обозначает состояние этой материальной точки в момент времени $t_k = t_N$. Величиной y'_k определяется длина вектора $\overline{O'K}$ (см. рис. 19, б):

$$|\overline{O'K}| = iy'_k = ict'_k. \quad (3.16)$$

Точка K принадлежит графику движения (покоя) материальной точки O' и обозначает состояние этой материальной точки в момент времени t'_k . Реальное существование в природе метрической соизмеримости между величинами x и ct , вскрытое преобразованием Лоренца, позволяет вычислить длину вектора \overline{OK} , не параллельного ни одной из координатных осей нештрихованной системы OXY . Из линейного соотношения

$$\overline{OK} = \overline{OL} + \overline{LN} = x_k e_1 + y_k e_2$$

находим по формуле (2.22)

$$|\overline{OK}| = \sqrt{x_K^2 - y_K^2}$$

или, с учетом (3.12),

$$\begin{aligned} |\overline{OK}| &= \sqrt{(-y_K \cdot \text{th } \varphi)^2 - y_K^2} = y_K \sqrt{\text{th}^2 \varphi - 1} = \\ &= y_K \sqrt{-1} \cdot \sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi} = iy_K \sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi} = iy'_K = |\overline{O'K}| \end{aligned} \quad (3.17)$$

(здесь использованы соотношения (3.13) и (3.16)).

Итак, оказалось, что в псевдоевклидовой плоскости расстояние между точкой O , представляющей событие совмещения материальных точек O и O' , и точкой K , представляющей другое состояние материальной точки O' , не зависит от того, в какой координатной системе рассматривается график движения материальной точки O' . Это ли не проявление объективной однозначности пространственно-временных отношений в природе? На графике рис. 19, б длина отрезка $\overline{O'K}$ характеризует промежуток времени между событиями O' и K . Значит, и на графике рис. 19, а длина этого отрезка имеет тот же самый физический смысл! Она характеризует длительность промежутка времени между двумя определенными событиями, не изменяющуюся при изменении координатной системы.

А величина y_K характеризует промежуток времени, разделяющий другую пару событий: событие совмещения материальных точек O и O' , с одной стороны, и состояние N материальной точки O — с другой. Зная координаты точки $N(0; y_K)$ относительно системы OXY , можно вычислить по формулам (2.81) координаты этой же точки относительно системы $O'X'Y'$:

$$\begin{aligned} x'_N &= \frac{x_N + y_N \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = \frac{0 + y_K \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = \frac{y_K \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}}, \\ y'_N &= \frac{y_N + x_N \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = \frac{y_K + 0 \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = \frac{y_K}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

В штрихованной системе координат $O'X'Y'$ точка N уже не лежит на оси ординат ($x'_N \neq 0$), как и следовало ожидать, ибо точка N представляет состояние материальной точки O , движущейся относительно оси $O'X'$. По формуле (2.22) найдем длину отрезка $\overline{O'N}$ на рис. 19, б в

штрихованной системе координат:

$$|\overline{ON}| = \sqrt{(x'_N)^2 - (y'_N)^2} = \sqrt{\frac{y_K^2 \cdot \text{th}^2 \varphi}{1 - \text{th}^2 \varphi} - \frac{y_K^2}{1 - \text{th}^2 \varphi}} =$$

$$= y_K \sqrt{\frac{\text{th}^2 \varphi - 1}{1 - \text{th}^2 \varphi}} = y_K \cdot \sqrt{-1} = iy_K = |\overline{ON}|$$

(см. (3.15)). Она совпала с длиной отрезка \overline{ON} на рис. 19, а.

Таким образом, только с классической точки зрения может казаться, что соотношение (3.14) выражает связь между двумя оценками (по неподвижным и по движущимся часам) одного и того же промежутка времени. В действительности здесь фигурируют промежутки времени между двумя различными парами событий ($t_N - t_0 = y_K/c$ и $t_K - t_0 = y_K/c$), и связь между этими различными промежутками представляет простое тригонометрическое соотношение в псевдоевклидовой плоскости. В треугольнике ONK (см. рис 19, а) сторона NK перпендикулярна (в псевдоевклидовом смысле) к стороне ON . Отношение длины катета ON к длине гипотенузы OK есть косинус угла $\widehat{NOK} = i\varphi$:

$$\frac{|\overline{ON}|}{|\overline{OK}|} = \cos(i\varphi) = \text{ch } \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}}$$

(см. (2.54) и (2.59)). Отсюда получаем

$$|\overline{OK}| = |\overline{ON}| \cdot \sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}$$

(гипотенуза OK короче катета ON , так как $\cos(i\varphi) \geq 1$). С учетом (3.15), (3.16) и (3.17) можно записать последнее равенство в следующих формах:

$$iy'_K = iy_K \sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi},$$

$$y'_K = y_K \sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi} \quad (\text{это равенство (3.13)}),$$

$$t'_K = t_K \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (\text{равенство (3.14)}).$$

Мы пришли к заключению, что длина графика движения материальной точки, рассматриваемого в псевдоевклидовой плоскости, характеризует длительность протекающего времени в той инерциальной системе координат, относительно которой данная материальная точка покоится (так называемое *собственное время* материальной

точки или связанной с ней координатной системы). Различие событий, обозначенных точками N и K на рис. 19, ясно видно и на графиках движения, построенных на обычной собственно евклидовой плоскости (см. рис. 18, а). Но с классической точки зрения длина отрезка OK не имеет физического смысла, и промежуток времени между событиями O и K можно характеризовать только длиной отрезков $\overline{ON} = \overline{LK}$, параллельных оси времени. Тем, что события N и K представляются классической механике одновременными в любых системах координат, снимается вопрос о различии промежутков времени $t_K - t_0$ и $t_N - t_0$.

Совсем иначе трактуется понятие одновременности в свете преобразований Лоренца. Одновременны те события, которые характеризуются одинаковыми значениями координаты $y = ct$. На графиках движения в псевдоевклидовой плоскости такие события изображаются точками, лежащими на прямых, параллельных оси OX , — *линиях одновременности*. Но координатные системы, для которых написаны преобразования (2.81) и (3.5), являются ортонормированными. Поэтому линии одновременности, параллельные координатной оси OX , перпендикулярны (в псевдоевклидовом смысле) к оси OY . Мы знаем, что правила условного изображения метрических свойств псевдоевклидовой плоскости позволяют начертить под прямым углом одну из пар взаимно перпендикулярных прямых, взятую по произвольному выбору (см. рис. 13). Пользуясь этим правом, мы на рис. 19, а расположили под прямым углом оси OX и OY нештрихованной координатной системы, а на рис. 19, б — оси $O'X'$ и $O'Y'$ штрихованной координатной системы. Поскольку точки начала координат рассматриваемых двумерных систем представляют одно и то же событие совмещения материальных точек O и O' , можно изобразить штрихованную и нештрихованную координатные системы на одном и том же чертеже. На рис. 19, а график движения материальной точки O' , принятый за ось OY' , проходит через начало координат под углом $i\phi$ к оси OY . Следовательно, ось $OX' = O'X'$, перпендикулярная к оси OY' , должна быть отклонена на такой же угол $i\phi$ от оси OX , чтобы быть симметричной оси OY' относительно изотропной. Совмещение систем OXY и $OX'Y'$ на одном рис. 19, а ясно показывает, что линии одновременности штрихованной системы координат не параллельны линиям одновременности нештрихованной системы координат, а наклонены к ним на угол $i\phi$. Поэтому в нештрихован-

ной системе событию K одновременно событие N , а в штрихованной системе событию K одновременно событие F . Та же картина в несколько ином представлении видна на рис. 19, б, на котором взаимно перпендикулярные оси $O'X$ и $O'Y$ нештрихованной системы координат изображаются под тупым углом.

Понятие одновременности событий играет решающую роль в трактовке вопроса о длине движущегося стержня. В той координатной системе, относительно которой стержень неподвижен, координаты его концов не изменяются с течением времени, и потому безразлично, в какие моменты времени делаются замеры координат. Например, на рис. 17 стержень OP покоится относительно инерциальной системы OX , и разность координат

$$x_P - x_O = l, \quad (3.18)$$

безусловно, представляет длину стержня. Но если приходится измерять длину *движущегося* стержня, то разность координат его концов будет равна длине стержня лишь при том непрременном условии, что эти координаты фиксируются *одновременно*. Поэтому, если пользоваться штрихованной инерциальной системой $O'X'$, относительно которой стержень OP перемещается, то для выражения длины стержня в виде разности координат его концов совершенно необходимо брать координаты, относящиеся к одному и тому же моменту времени. Пусть, к примеру, это будет момент совмещения материальных точек O и O' , принятый за начало отсчета времени в обеих системах координат, нештрихованной и штрихованной. В нештрихованной системе координат OXY начальному событию $O(0; 0)$ одновременно событие, изображенное точкой $P(x_P; 0)$ на графике материальной точки P (см. рис. 19, а). В штрихованной системе координат $O'X'Y'$ тому же начальному событию $O(0; 0)$ одновременно другое состояние материальной точки P , изображаемое точкой $S(x_S; y_S)$ на графике движения. Следовательно, в штрихованной координатной системе длина стержня, движущегося относительно этой системы, определяется разностью абсцисс

$$x'_S - x'_O = l'. \quad (3.19)$$

Рассмотрим преобразование нештрихованных координат точки S в штрихованные по формулам (2.81), учи-

тывая, что $x_S = x_P = l$:

$$x'_S = \frac{x_S + y_S \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = \frac{l + y_S \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}},$$

$$y'_S = \frac{y_S + x_S \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = \frac{y_S + l \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = 0.$$

Равенство $y'_S = 0$ обусловлено самим выбором точки S как той точки на графике движения материальной точки P , которая в штрихованной системе координат одновременно начальному событию $O(0; 0)$ и, следовательно, лежит на оси OX' . Поэтому из последнего равенства находим

$$y_S + l \cdot \text{th } \varphi = 0 \Leftrightarrow y_S = -l \cdot \text{th } \varphi.$$

Подставляя это значение y_S в выражение для x'_S , получаем

$$x'_S = \frac{l + (-l \cdot \text{th } \varphi) \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = l \frac{1 - \text{th}^2 \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = l \sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi},$$

или, с учетом (3.19) и (3.7),

$$l' = l \sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi} = l \sqrt{1 - (v/c)^2}. \quad (3.20)$$

В соотношении (3.20) выражен знаменитый релятивистский эффект сокращения движущегося стержня. И вновь такая формулировка эффекта представляется насилием над здравым смыслом: если длина тела зависит от того, в какой системе координат производится измерение, то в чем же тогда заключается объективность пространственных характеристик тел? Но столь резкий конфликт понятий становится возможным лишь благодаря узости классических представлений о пространстве, времени и телах. На самом же деле и в этом случае, как в случае с промежутками времени, речь идет не о множественности мер одной и той же пространственной протяженности, а о различных пространственных протяженностях.

Длина l представляет расстояние между точками $O(0; 0)$ и $P(x_P; 0)$ псевдоевклидовой плоскости, и она не зависит от того, в какой системе координат рассматриваются эти точки. Начало координат $O(0; 0)$ у систем OXY и $OX'Y'$ — общее, а точка $P(x_P; 0)$ имеет в

штрихованной системе следующие координаты:

$$x'_P = \frac{x_P + y_P \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = \frac{l + 0 \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}}$$

$$y'_P = \frac{y_P + x_P \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = \frac{0 + l \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = \frac{l \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}}$$

Длина вектора

$$\overline{OP} = x'_P e'_1 + y'_P e'_2,$$

выраженная через штрихованные координаты, равна

$$|\overline{OP}| = \sqrt{(x'_P)^2 - (y'_P)^2} = \sqrt{\frac{l^2}{1 - \text{th}^2 \varphi} - \frac{l^2 \cdot \text{th}^2 \varphi}{1 - \text{th}^2 \varphi}} =$$

$$= l \sqrt{\frac{1 - \text{th}^2 \varphi}{1 - \text{th}^2 \varphi}} = l,$$

что совпадает с длиной этого же вектора, выраженной через нештрихованные координаты (см. (3.18)).

Длина l' представляет расстояние между точками $O(0; 0)$ и $S(x_S; y_S)$ псевдоевклидовой плоскости. Учитывая, что $x_S = x_P = l$ и $y_S = -l \cdot \text{th } \varphi$, как показано при выводе соотношения (3.20), найдем для вектора

$$\overline{OS} = x_S e_1 + y_S e_2$$

длину, выраженную через нештрихованные координаты:

$$|\overline{OS}| = \sqrt{x_S^2 - y_S^2} = \sqrt{l^2 - l^2 \cdot \text{th}^2 \varphi} = l \sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi} = l'.$$

Она совпадает с длиной этого же вектора, выраженной через штрихованные координаты (см. (3.19)). В формуле (3.20) легко увидеть тригонометрическое соотношение между длиной катета и гипотенузы в треугольнике OPS (см. рис. 19, а):

$$\frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OS}|} = \frac{l}{l'} = \cos(i\varphi) = \text{ch } \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}}.$$

§ 17. Мировые линии

Герман Минковский внес решающий вклад в понимание того, что преобразование Лоренца для пространственных координат и отсчета времени выражает геометрические отношения в пространстве со специфическими метрическими свойствами. Этот тип пространства так и

называют *пространством Минковского*. Ограничиваясь двумя переменными, из которых одна характеризует протяженность в чувственно воспринимаемом пространстве, а другая — временную длительность, мы выделяем из пространства Минковского двумерное подпространство, изоморфное псевдоевклидовой плоскости.

Признавая пространство и время формами существования материи, мы в действительности привыкли иметь дело только с пространственной оформленностью материальных объектов. Не потому ли что именно такими рисуют их нам чувственные восприятия? Но в предложенной Минковским геометрической интерпретации четко выявилась и формирующая роль времени. Графики движения материальных точек, рассматриваемые в псевдоевклидовой плоскости, приобретают несвойственное им прежде определяющее значение. Фактом первостепенной важности стало то обстоятельство, что расстояние между точками графиков оказалось величиной инвариантной, т. е. не зависящей от выбора системы координат. Вместе с тем величины, которые в классической механике считались объективными, оказываются зависящими от условий их наблюдения и измерения. Особенно разительна эта смена ролей в задаче о длине тела.

Если то, что мы воспринимаем как тело-стержень, является первичным материальным объектом, то его длина должна быть инвариантом, от которого зависят все остальные параметры процесса движения тела, в том числе параметры графиков движения материальных точек этого тела. В действительности вырисовывается прямо противоположная картина. Инвариантность, объективность свойственна тем точкам и линиям, которые выступают в роли графиков движения. На рис. 19 выделены только графики движения материальных точек концов стержня OP . Но ведь весь стержень заполнен материальными точками, и каждая из них порождает график движения в виде прямой, расположенной между прямыми ON и PS и параллельной им. Поэтому следует рассматривать сплошную полосу между прямыми ON и PS на рис. 19. От того, как располагаются по отношению к этой полосе выбираемые нами ортонормированные системы координат, зависит воспринимаемое нами поведение тела-стержня: стержень покоится относительно той инерциальной системы, пространственная ось которой на графике рис. 19 перпендикулярна (в псевдоевклидовом смысле) к прямым ON , PS (ось OX),

и стержень движется относительно той инерциальной системы, пространственная ось которой не перпендикулярна к полосе (ось OX'). Но, самое главное, ширина полосы, измеренная в направлении оси абсцисс, воспринимается нами как длина стержня: ширина полосы в перпендикулярном сечении OP — длина l покоящегося стержня (см. (3.18)), а ширина этой же полосы в наклонном сечении OS — длина l' движущегося стержня (см. (3.19)). К этому надо добавить, что угол φ между осью ординат системы и направлением линий графиков в полосе $ONPS$ однозначно определяет скорость v движения стержня относительно соответствующей пространственной оси. Так что же здесь в действительности первично и что вторично? С точки зрения геометрической интерпретации Минковского, согласующейся с преобразованием Лоренца, первично то, что мы привыкли считать графиком движения чувственно воспринимаемого объекта (тела), а вторичен сам этот чувственно воспринимаемый объект. Графики движения материальных точек, рассматриваемые в псевдоевклидовой плоскости, Минковский назвал **мировыми линиями**, а отдельные точки этих линий — **мировыми точками**.

Здесь же надо оговориться, что такой способ выражения не вполне верен. Называя мировые линии *графиками* материальных точек, мы платим дань привычным представлениям о первичности материальных точек и вторичности их графиков. Мировая линия — это не только линия на рисунке, рисунок лишь изображает объект, реально существующий в природе. Иначе как бы могли иметь силу законов природы геометрические соотношения между мировыми линиями и их точками? То обстоятельство, что геометрическим характеристикам мировых линий свойственна более высокая степень объективности (инвариантности), чем пространственным и временным отношениям между классическими материальными точками, заставляет относиться к мировым линиям как к объективно существующим материальным образованиям. В силу некоторых причин, о которых речь впереди, мы не воспринимаем мировую линию зрительно в ее реальной протяженности, а воспринимаем в каждый момент времени лишь отдельные точки мировой линии (мировые точки) в виде материальной точки. Но протяженность мировой линии сказывается в том, что длины определенных участков мировой линии определяют длительности промежутков времени.

Читатель должен быть предупрежден, что столь резкая постановка вопроса о материальности мировых линий не является общепринятым взглядом в науке. Конечно, объективная значимость мировых линий и их геометрических характеристик уже не подлежит сомнению. Однако представляется более соответствующим духу осторожности и широты научных суждений смотреть на мировые линии как на бесплотное выражение глубоких естественных закономерностей, управляющих чувственно воспринимаемым миром. При этом существенным камнем преткновения является трактовка тех участков мировых линий, которые относятся к будущему времени. Прошлые их участки, понятно, выражают уже реализовавшиеся состояния материального мира, а что выражают будущие? Признать их материальными объектами, реально существующими в природе, — значит признать механически предопределенными все будущие состояния мира. Нельзя, конечно, полностью отрицать возможность предопределенности, ибо без нее было бы беспочвенным всякое научное предвидение, например предсказание положений небесных тел. Но одно дело — признавать предопределенность как совокупность естественных следствий из прошлых и настоящих состояний мира, на которые, кстати сказать, мы можем в определенных пределах оказывать воздействие. И совсем иное — жестко детерминировать будущее материальными мировыми линиями, существующими заранее, прежде чем это будущее для нас наступает.

На это можно возразить, что мнение, будто будущие участки мировой линии столь же определены, как и прошлые, унаследовано от взгляда на мировую линию как на графическое изображение закономерности движения, выраженной функцией

$$x = F(t) = F(y/c) = f(y). \quad (3.21)$$

Нам привычно представлять движение, изображенное на графике, как уже реализованное полностью, либо неотвратно подлежащее реализации именно в такой форме, и мы не останавливаем внимание на том обстоятельстве, что реальному процессу течения времени соответствует постепенная «прорисовка» графика функции (3.21). В каждый настоящий момент времени «прорисована», проявлена, реализована лишь та часть графика, которая соответствует прошлому, но еще не существует, не реализована часть, соответствующая будущему. Такое про-

слеживание постепенного проявления графика представляется излишним во многих случаях, когда мы имеем дело именно с графиком как условным изображением движений. Но оно становится существенно важным для понимания мировой линии как реально существующего в природе объекта *Мировые линии находятся в процессе роста*. Они уже существуют, уже проявлены в тех своих частях, которые относятся к прошлому, и еще не существуют, не проявлены в области будущего. Граница проявленной части мировой линии — это граница между прошлым и будущим, тот самый «настоящий момент времени», который непрерывно переходит из прошлого в будущее. Таким образом, мы видим в процессе течения времени, охватывающем весь материальный мир, процесс роста, удлинения, проявления мировых линий, или *мировой проявляющий процесс*.

Автор этих строк несет полную ответственность за введение понятия и термина «мировой проявляющий процесс», которого он не встречал в научных работах. Однако по существу здесь не высказана какая-либо новая гипотеза, а только переведен на язык предложенной Минковским картины мира тот бесспорный факт, что все без исключения материальные объекты (какими бы мы их себе ни представляли) вовлечены в безостановочный процесс течения времени. То привычное представление, что отсчет времени t обладает естественным свойством возрастать, облекается теперь в новую форму: свойством природы является безостановочное возрастание ординаты $y = ct$, которая, как мы видели, характеризует длину мировых линий.

Совсем нетрудно принять чисто формальный переход от переменной t к пропорциональной ей переменной y , не затрагивая наших представлений об устройстве мира. Но в том-то и дело, что в соотношении (3.6)

$$y = ct$$

заключается глубокий физический смысл. Именно оно опосредствует переход от абстрактной математической модели (псевдоевклидова пространства) к реальной закономерности природы (преобразованию Лоренца), заставляя признать, что в природе существуют линейные и метрические отношения псевдоевклидова пространства. **Соотношение (3.6) расшифровывает длительность существования материальных объектов во времени как их протяженность в псевдоевклидовом пространстве.**

С таких позиций замечательно просто объясняется широко известный «парадокс близнецов». Предположим, что отрезки ON и OK на рис. 19, *a* представляют мировые линии братьев-близнецов, один из которых остается в Солнечной системе и по галактическим масштабам может считаться неподвижным в инерциальной гелиоцентрической системе координат, а другой отправляется в межзвездное путешествие со скоростью

$$v = ic \cdot \operatorname{tg}(i\varphi)$$

(см. (3.11)). Удалившись в чувственно воспринимаемом пространстве на расстояние x_k (выражаемое отрезком NK , параллельным оси OX), брат-космонавт осуществляет возвращение в Солнечную систему, выражаемое отрезком мировой линии KD . Мировая точка O изображает на рис. 19, *a* событие расставания братьев, а мировая точка D — событие их встречи. Промежуток времени, прожитый земным братом между расставанием и встречей, определяется длиной отрезка $OD = ON + ND$ мировой прямой. Промежуток времени, прожитый космонавтом между расставанием и встречей, определяется длиной ломаной мировой линии OKD . Так как отрезок KN перпендикулярен (в псевдоевклидовом смысле) к прямой OD , то отрезок OK короче своей проекции ON (ибо $\cos(\widehat{NOK}) = \cos(i\varphi) > 1$) и отрезок KD короче своей проекции ND . Следовательно, путь из мировой точки O в мировую точку D по прямой OD длиннее пути по ломаной OKD . Это означает, что брат-космонавт будет в момент встречи моложе брата-землянина.

На этом примере хорошо видно, как представление о мировом проявляющем процессе снимает видимость конфликта между материальностью мировых линий и возможностью влиять на будущие события. Вмешательство человеческой деятельности изменяет направление мировой линии одного из братьев несколько раз за время космического путешествия. Способность человека влиять на взаимное расположение материальных точек (тел) и тем управлять ходом будущих событий равнозначна его способности изменять направления растущих мировых линий. Конечно, для подтверждения или отрицания концепции материальности мировых линий необходимо принять во внимание огромное богатство достигнутых знаний о природе. Однако даже обсуждение проблемы на макроскопическом уровне способно внести существенные черты ясности в картину мира, которой

предстоит подытожить свои искания физике XX в. В понятие материальности мировых линий мы будем вкладывать лишь тот достаточно широкий смысл, что они существуют независимо от нашего сознания и открываются нашим чувственным восприятием в виде объектов, которые истари называются материальными точками.

§ 18. Явление распространения света

Графики равномерного прямолинейного движения материальных точек мы строили на псевдоевклидовой плоскости таким образом, что они оказывались прямыми, принадлежащими мнимым секторам плоскости. Поэтому в принятом здесь изложении мировые прямые являются неизотропными прямыми мнимых секторов. Если две мировые прямые образуют угол iq , то им соответствуют материальные точки, движущиеся относительно друг друга со скоростью

$$v = ic \cdot \operatorname{tg}(iq) \quad (3.22)$$

(см. (3.14)). Как от нашего произвола зависит, какую из этих материальных точек принять за неподвижную, т. е. с какой связать инерциальную систему координат в одномерном чувственно воспринимаемом пространстве, так от нашего же произвола зависит, какую из мировых прямых принять за ось OY двумерной координатной системы OXY в псевдоевклидовой плоскости. Но вот что замечательно. Равноправие всех инерциальных систем координат в чувственно воспринимаемом пространстве есть постулат относительности, угаданный как обобщение опыта Галилеем и расширенный на основании экспериментальных данных создателями теории относительности Лоренцем, Пуанкаре, Эйнштейном. Равноправие же ортонормированных координатных систем на псевдоевклидовой плоскости есть теоретический геометрический факт. Таким образом, представления о первичной роли мировых линий и псевдоевклидовости реального мирового пространства имеют, помимо прочих, и то немаловажное преимущество, что из них вытекает в качестве простого логического следствия постулат относительности — один из устоев физики.

Больше того, из этих представлений вытекает в качестве следствия и второй постулат Эйнштейна — о постоянстве скорости света в вакууме. Действительно, как отмечено ранее (см. т. 87), любая неизотропная прямая псевдоевклидовой плоскости образует бесконечно

большой угол с каждой из соседних изотропных. Подставляя бесконечно большие значения угла $i\varphi = \pm i\infty$ в формулу (3.22), получаем

$$v = ic \cdot \operatorname{tg}(\pm i\infty) = ic \cdot i \cdot \operatorname{th}(\pm\infty) = -c \cdot \operatorname{th}(\pm\infty) = \mp c$$

(так как $\operatorname{th}\varphi \rightarrow \pm 1$ при $\varphi \rightarrow \pm\infty$; см. (2.52) и рис. 15). Это означает, что если мировую прямую мы воспринимаем в виде материальной точки, то изотропную прямую должны воспринять как объект, движущийся относительно этой точки со скоростью c , т. е. как световой сигнал. Здесь перед нами сразу три драгоценные находки.

Во-первых, выясняется, что передача световых сигналов связана с изотропными прямыми в псевдоевклидовом пространстве.

Во-вторых, раскрывается тайна постоянства скорости света. Все мировые прямые с равным правом годятся на роль оси ординат координатной системы псевдоевклидовой плоскости, и все они образуют бесконечно большие углы с изотропными. Поэтому соответствующие мировым прямым материальные точки имеют равные права на роль начала инерциальной системы координат и по отношению к каждой из них световой сигнал движется с одной и той же скоростью c .

В-третьих, становится понятным, почему никакое тело (материальная точка) не может двигаться со скоростью света или еще большей скоростью. Поскольку мировые линии различаются своим направлением, в этом отношении ассортимент возможных мировых линий даже в пределах одной плоскости бесконечно богат. Ведь от любой мировой прямой в обе стороны можно отсчитывать величины углов без предела, а каждому конечному значению угла будет соответствовать свое направление мировой линии. Однако мировые линии не выходят из мнимых секторов. Роль изотропных прямых как границ секторов сказывается в том, что ими устанавливается предельное значение скорости материальных точек.

Согласно экспериментальным данным и теоретическим воззрениям не только видимый свет, но и всякое электромагнитное воздействие, воспринимаемое приборами, распространяется в вакууме со скоростью c . Отсюда следует вывод, что **в мировом псевдоевклидовом пространстве электромагнитные воздействия от одной мировой точки к другой могут передаваться только по изотропным**. Как только этот принцип сформулирован, справедливость его раскрывается перед нами с возросшей убедительностью.

тельностью. Ну, конечно же, именно изотропные линии обладают наибольшими геометрическими преимуществами для передачи дальнего действия, потому что расстояния между любыми точками, лежащими на одной изотропной, равны нулю!

Пусть на рис. 20 ось OY совпадает с мировой прямой наблюдателя, а параллельная ей прямая PF изображает мировую линию звезды. Примем за начало координат O мировую точку, соответствующую настоящему моменту времени наблюдателя. Изотропная $y = -x$, проходящая через эту мировую точку, пересекает мировую линию звезды в точке P . Длина отрезка OP равна нулю, и наблюдатель в мировой точке O может воспринять электромагнитное воздействие, исходящее от мировой точки P звезды. Точка R на мировой линии звезды смещена в будущее по отношению к точке P . Отрезок OR не является изотропным (длина его не равна нулю), и по нему не передается электромагнитное воздействие. Поэтому наблюдатель, находясь в мировой точке O , не может воспринять мировую точку R .

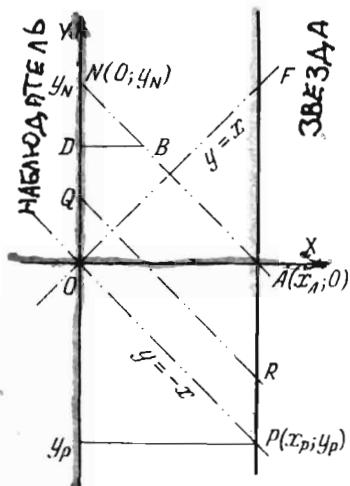


Рис. 20

Но ходом мирового проявляющего процесса наблюдатель будет перенесен вдоль своей мировой прямой в точку Q , лежащую на одной изотропной с точкой R , и тогда мировая точка R станет доступной его восприятию. Зато мировая точка P уже не может быть воспринята наблюдателем, находящимся в точке Q , так как отрезок PQ — неизотропный. В ходе проявляющего процесса мировая точка наблюдателя побывает последовательно во всех точках отрезка OQ , и наблюдатель получит возможность воспринять в соответствующей последовательности мировые точки звезды на отрезке PR .

Таким образом, зрительные восприятия, в основе которых лежит электромагнитное воздействие, позволяют нам в каждый момент времени «выхватить» из мировой линии только одну точку, и потому мы всегда видим ма-

териальный объект не как линию, а как точку. Перемещаясь в ходе проявляющего процесса вдоль своей мировой линии, мы видим не единственную точку другой мировой линии, а последовательность сменяющихся точек, и в этом продолжении, продлении восприятия отдельные точки кажутся нам не самостоятельными объектами, а различными состояниями одного и того же объекта, существование которого, как и наше восприятие, длится во времени. Этот объект мы называем *материальной точкой*. Понятие материальной точки противоречиво, истинное сочетается в нем с обманчивым. Истинно то, что мы воспринимаем мировую линию в виде точки, вернее, последовательности точек, сменяющих одна другую. Истинно и то, что эти точки представляют состояния одного и того же материального объекта. Обманчиво то, что этот материальный объект мы считаем точкой, а не линией, и пространственную протяженность линии считаем чем-то качественно отличным от пространства, а именно временем.

Люди вырабатывают способы описания наблюдаемых явлений прежде, чем приходят к пониманию их сущности. Время трудно понять, но нельзя не заметить его течения, и способы измерения времени установились задолго до того, как возникла мысль о связи промежутков времени с длиной отрезков определенного типа в псевдоевклидовом пространстве. Для измерения времени используется периодическое движение материальных точек: суточное и годовое перемещение светил на небе, перетекание жидкости или песка из одного сосуда в другой, колебания маятников и балансиров. В каждом случае происходит изменение взаимного расположения определенных материальных точек в чувственно воспринимаемом пространстве, так что одинаковое расположение регулярно возобновляется.

Пусть, к примеру, материальная точка так колеблется вдоль прямой Ox , что ее пространственная координата изменяется с течением времени по синусоидальному закону

$$x = l \cdot \sin \omega t = l \cdot \sin 2\pi t,$$

где l — амплитуда колебания, $\omega = 2\pi \text{ с}^{-1}$ — циклическая частота. Тогда любое положение материальной точки повторяется по прошествии единицы времени (секунды). График движения этой материальной точки, рассматриваемый в псевдоевклидовой плоскости, а значит, и сама

мировая линия будет иметь форму периодической кривой, описываемой уравнением

$$x = l \cdot \sin \left(2\pi \frac{y}{c} \right) = l \cdot \sin \left(2\pi \frac{iy}{ic} \right), \quad (3.23)$$

с длиной волны ic (рис. 21). Действительно, если отметить на мировой линии (3.23) точку $C(x_C; y_C)$, то, продвинувшись вдоль оси OY на расстояние ic , мы найдем на этой мировой линии точку D с такой же абсциссой

$$\begin{aligned} x_D &= l \cdot \sin \left(2\pi \frac{iy_C + ic}{ic} \right) = l \cdot \sin \left(2\pi \frac{iy_C}{ic} + 2\pi \right) = \\ &= l \cdot \sin \left(2\pi \frac{iy_C}{ic} \right) = x_C. \end{aligned}$$

Мы не можем видеть мировую линию (3.23) в ее протяженности, тем более не можем вернуться в ее прошлые точки и измерить длину волны непосредственно, но, отмечая два следующих друг за другом одинаковых пространственных положения материальной точки, мы принимаем промежуток времени между этими событиями за единицу измерения времени. Так, не подозревая этого, люди пользовались часами как прибором для измерения длин мировых линий. Сказать, что протекла единица времени, — значит сказать, что мировой проявляющий процесс продвинулся вдоль данной мировой линии на расстояние

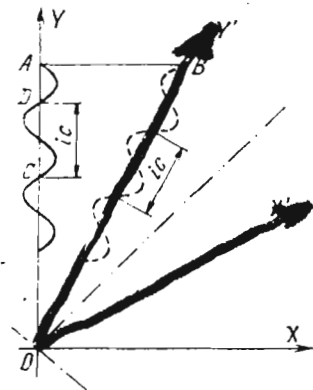


Рис. 21

ic . Число t единиц времени между двумя односторонними событиями равно числу отрезков длиной ic между двумя мировыми точками, разделенными расстоянием iy :

$$t = \frac{iy}{ic}, \quad \text{или} \quad iy = (ic) t. \quad (3.24)$$

Обратим внимание на терминологическую неточность, встречающуюся при описании релятивистского эффекта сокращения промежутков времени (см. (3.14)). В одной из первых своих работ по теории относительности А. Эйнштейн истолковал этот эффект как «замедление хода часов»: «...часы, движущиеся относительно некото-

рой системы отсчета со скоростью v , идут в этой системе медленнее в отношении $1 : \sqrt{1 - (v/c)^2}$, чем те же часы в случае, если они покоятся относительно той же системы отсчета» [23]. В книге «Эволюция физики», написанной Эйнштейном совместно с Л. Инфельдом в 1938 г. и вышедшей третьим изданием в 1954 г., имеются высказывания такого же смысла. Например: «Каждая система координат должна быть снабжена собственными часами, покоящимися в ней, так как движение изменяет ритм часов» [24]. Такой способ выражения проник даже в «Курс теоретической физики» Ландау и Лифшица. В «Теории поля» читаем: «...собственное время движущегося объекта всегда меньше, чем соответствующий промежуток времени в неподвижной системе. Другими словами, движущиеся часы идут медленнее неподвижных» [25]. Читателю этих высказываний трудно избежать ошибочного представления, будто уменьшение промежутка собственного времени объясняется тем, что каждая секунда, отмеренная движущимися часами, длится дольше, чем секунда, отмеренная по неподвижным часам. Будто бы в одном и том же промежутке времени укладываются различные количества «правильных» секунд, отсчитанных неподвижными часами, и «замедленных», «растянутых» секунд, отсчитанных часами движущимися. Но ведь если бы единица измерения была подвержена изменениям, то она бы не могла выполнять своих функций и сама нуждалась бы в сравнении с чем-либо постоянным.

Очевидно, ритм часов понимается как частота используемого в них колебательного процесса или как период его. Периоду τ часов, выраженному в единицах времени, соответствует длина волны $i\lambda$ колеблющейся мировой линии в согласии с (3.24):

$$i\lambda = (ic)\tau.$$

Форма, а с ней и длина волны мировой линии есть объективная характеристика этого материального образования, не зависящая от выбора координатной системы. Для того чтобы сравнивать промежутки времени в различных инерциальных системах координат, нужно иметь синхронизованные часы, т. е. такие периодические мировые линии, у которых длины волн одинаковы (или сохраняют постоянное отношение). Если в инерциальных системах, соответствующих ортонормированным системам ко-

ординат OXY и $OX'Y'$ на псевдоевклидовой плоскости (см. рис. 21), применяются часы с одинаковым периодом, например $\tau=1$, то они покажут, что на отрезке OA оси OY уложится большее число t волн длиной ic , чем число t' таких же волн на отрезке OB . Отношение этих чисел будет равно отношению длин отрезков OA и OB :

$$\frac{t}{t'} = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OB}|} = \cos(i\varphi) = \operatorname{ch} \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

в полном соответствии с метрическими свойствами псевдоевклидовой плоскости ($\cos(i\varphi) \geq 1$). Именно одинаковость периода (ритма) движущихся и неподвижных часов позволит экспериментально обнаружить различие промежутков времени t и t' .

Величина ic в соотношении (3.24) играет роль *коэффициента перехода* от одной единицы измерения к другой. Применение различных единиц для измерения одной и той же физической величины не представляет чего-либо исключительного. Например, прежде чем была познана природа теплоты, количество теплоты измеряли в калориях. После обнаружения механического эквивалента теплоты стало возможным измерять теплоту в единицах работы. Сейчас теплоту и механическую работу измеряют в джоулях. Аналогичным образом можно пересчитать промежутки времени в длины отрезков мнимого сектора псевдоевклидовой плоскости, если известно, каким числом выражается длина, соответствующая единице времени, т. е. переходный коэффициент ic .

Так как мы не можем пройтись с измерительной линейкой в прошлые области мировой линии, непосредственное определение пересчетного коэффициента ic нам недоступно. Но особые геометрические свойства изотропных прямых и связанное с ними физическое явление электромагнитного воздействия позволяют измерить этот коэффициент косвенным образом. И он в действительности был измерен раньше, чем развились теоретические предпосылки, позволяющие увидеть его подлинный смысл. Обратимся к рис. 20. Мировая точка O наблюдателя и мировая точка P звезды разделены в псевдоевклидовой плоскости изотропным отрезком OP , длина которого равна нулю. Но в классическом понимании события, обозначаемые этими точками, разделены в чувственно воспринимаемом пространстве расстоянием, равным

разности абсцисс точек, т. е. длиной отрезка

$$x_P - x_O = x_A - x_O = |\overline{OA}|.$$

Наблюдатель, отождествляющий мировое пространство с чувственно воспринимаемым, считает, что источник света удален от него на расстояние $|\overline{OA}| = x_P$. Вместе с тем мировая точка P не является одновременной точке O наблюдателя, разность ординат этих точек соответствует промежутку времени

$$t_P = \frac{i(y_P - y_O)}{ic} = \frac{y_P - 0}{c} = \frac{y_P}{c}.$$

Наблюдатель справедливо считает, что видит источник света таким, каким он был в прошлом за t_P единиц времени до момента восприятия его. Опираясь на опыт собственных перемещений и перемещений других материальных точек в чувственно воспринимаемом пространстве, наблюдатель истолковывает передачу электромагнитного воздействия как процесс движения сигнала, преодолевшего расстояние x_P за время t_P , и определяет скорость движения сигнала

$$V = x_P/t_P.$$

Результат таких измерений предопределен геометрическими соотношениями в псевдоевклидовой плоскости. Координаты мировой точки P удовлетворяют уравнению изотропной $y = -x$, на которой лежит эта точка:

$$y_P = -x_P.$$

Следовательно,

$$V = \frac{x_P}{t_P} = \frac{x_P}{y_P/c} = \frac{x_P}{-x_P} \cdot c = -c.$$

В величине скорости светового сигнала попросту проявился коэффициент c , который в форме мнимого числа ic характеризует связь (3.24) между двумя единицами измерения времени.

То, что в чувственно воспринимаемом пространстве представляется процессом распространения светового сигнала, расшифровывается в псевдоевклидовом пространстве как процесс сближения мировой точки наблюдателя с соответствующей изотропной прямой. На мировой линии PF звезды точка A , одновременная мировой точке O наблюдателя, недоступна его восприятию, поскольку отрез-

зок OA — неизотропный. Точка A станет доступной восприятию наблюдателя, когда проявляющий процесс перенесет его в точку N , лежащую на одной изотропной с точкой A . Мировую точку O отделяет от мировой точки N отрезок ON , имеющий длину $|\overline{ON}| = iy_N$. Это и есть тот путь, который предстоит реально преодолеть мировой точке наблюдателя в ходе проявляющего процесса до встречи с изотропной AN . Наряду с этим можно рассматривать расстояние по перпендикуляру к мировой прямой наблюдателя, отделяющее его от изотропной AN . Это расстояние для точки O равно длине отрезка $|\overline{OA}| = x_A = x_p$. Прямая AN описывается в координатной системе OXY уравнением

$$y = -x + y_N.$$

Подставляя в него координаты точки A , находим

$$y_A = -x_A + y_N \Leftrightarrow 0 = -x_A + y_N \Leftrightarrow x_A = y_N.$$

По мере уменьшения расстояния от мировой точки наблюдателя до изотропной AN вдоль оси OY уменьшается также расстояние между наблюдателем и изотропной, измеряемое в направлении оси OX . Например, в мировой точке D эти расстояния будут соответственно равны длинам отрезков DN и DB . Отношение таких расстояний сохраняется постоянным в ходе проявляющего процесса и равно тангенсу угла между изотропной и осью OY :

$$\frac{|\overline{DB}|}{|\overline{DN}|} = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{ON}|} = \frac{x_A}{iy_N} = \frac{y_N}{iy_N} = -i = \text{tg}(\overline{ON}, \overline{AN}). \quad (3.25)$$

Если измерять длину отрезка мировой линии в единицах времени:

$$|\overline{ON}| = iy_N = (ic)t_N,$$

то отношение (3.25) приобретет форму и смысл скорости распространения света:

$$\frac{|\overline{OA}|}{|\overline{ON}|} = \frac{x_A}{(ic)t_N} = -i \Rightarrow \frac{x_A}{t_N} = -i(ic) = c. \quad (3.26)$$

Соотношение (3.26) есть не что иное, как перевод геометрического соотношения (3.25) на язык классических представлений о пространстве и времени. Смысл этих соотношений проявится особенно наглядно, если мы положим, что длина отрезка DN мировой линии наблюдателя

соответствует единице времени, т. е. $|\overline{DN}| = ic$. Тогда из (3.25) находим

$$|\overline{DB}| = -i \cdot |\overline{DN}| = -i(ic) = c.$$

Таким образом, можно заменить измерение отрезка \overline{DN} (или пропорционального ему отрезка $\overline{ON} = t \cdot \overline{DN}$) измерением отрезка \overline{DB} (или пропорционального ему отрезка $\overline{OA} = t \cdot \overline{DB}$), который представляет расстояние в чувственно воспринимаемом пространстве. Наиболее точные современные измерения (см. [26]) дают значение

$$c = (299\,792\,458 \pm 1,2) \text{ м/с.}$$

Было бы логической ошибкой говорить о скорости проявляющего процесса на том основании, что истечение каждой единицы времени означает продвижение проявляющего процесса вдоль мировой прямой на расстояние ic . Понятию скорости материальной точки соответствует в геометрической интерпретации Минковского отношение длин *взаимно перпендикулярных* отрезков: один отрезок принадлежит вещественному сектору псевдоевклидовой плоскости и представляет протяженность в чувственно воспринимаемом пространстве, а другой принадлежит мнимому сектору и определяет длительность промежутка времени. Это отношение характеризует наклон мировой линии к оси OY . Такому отношению нет места в равенствах

$$\frac{iy}{t} = ic, \quad \frac{y}{t} = c$$

(см. (3.6), (3.24)). В них промежуток времени сопоставляется не с отрезком вещественного сектора, а с отрезком мнимого сектора, определяющим этот же промежуток времени. Нас вводит в заблуждение то обстоятельство, что величина, измеренная в единицах времени, оказалась по существу своему пространственной протяженностью. Прежде отношение промежутков пространства к промежуткам времени встречалось нам только в явлении движения материальных точек. Столкнувшись с явлением другого типа, в котором аналогичное отношение имеет иной геометрический и физический смысл, мы должны сделать усилие, чтобы освободиться от власти традиционных представлений и увидеть за знакомой

формой новое содержание. Промежуток времени t не имеет самостоятельной количественной определенности, с которой можно было бы соотносить длину отрезка оси ординат. Отношение этой длины к промежутку времени, в сущности, выражает отношение длины самой к себе. Здесь можно говорить об отношении различных единиц измерения (мнимых метров и секунд) одной и той же физической величины, но нельзя говорить о скорости. Коэффициент c в соотношениях (3.6) и (3.24) имеет размерность скорости, но не имеет физического смысла скорости. Таковую же размерность имеет коэффициент перехода от одной единицы к другой: ic единиц длины равнозначны единице времени. Мировой проявляющий процесс есть явление качественно иное, чем явление движения материальных точек. *К мировому проявляющему процессу понятие скорости неприменимо*, он сам порождает явление материальных точек и скорости материальных точек. С явлением движения материальных точек сходно по своей геометрической природе явление распространения светового сигнала. Там и здесь речь идет о восприятии физических объектов, имеющих форму линий, мировых или изотропных. Поэтому коэффициент c приобретает смысл скорости, если он фигурирует в описании явления распространения света.

Как из классических представлений о мире, так и из модели мира, выдвинутой Минковским, следует, что зрительное восприятие в принципе способно открывать нам только *прошлые* картины мира. В обыденной жизни мы этого не замечаем благодаря громадности (по земным масштабам) значения скорости света. Нам кажется, что все доступные взору тела переживают свой настоящий момент времени одновременно с нами. В действительности же требуется определенный и даже технически измеримый промежуток времени для распространения светового сигнала на расстояние в несколько метров или сантиметров. Если буквы этого текста находятся на расстоянии 30 см от глаз читателя, то читатель видит текст таким, каким он был миллиардную долю секунды тому назад:

$$0,3 \text{ м} : (3 \cdot 10^8) \text{ м/с} = 10^{-9} \text{ с.}$$

Современная техника позволяет измерять промежутки времени в сто раз более короткие. А если пользоваться единицей времени, которая применяется в ядерной физике (10^{-24} с), то в таком масштабе текст читаемой книги

виден «из далекого прошлого», отделенного от настоящего момента читателя миллионом миллиардов единиц ядерного времени. Эта иллюстрация с изменением масштаба призвана подчеркнуть, что *в принципе* мы всегда видим только прошлое, сколь бы близким оно ни было.

Глубокое философское различие между классической картиной мира и картиной мира в понимании Минковского заключается в том, как решается вопрос о существовании прошлого. Если мировое пространство совпадает с чувственно воспринимаемым, то в нем найдется место только для событий настоящего момента времени. Лишь о таких событиях мы привыкли говорить как о реально существующих. Прошлые события мы считаем несуществующими, даже если тела, участвовавшие в них, находятся у нас перед глазами. Когда же и тела не сохранились, несуществование прошлого представляется нам совсем бесспорным. Оно было, но его уже нет. Принимая классическую модель мира, мы пользуемся, так сказать, «трехмерным критерием бытия», согласно которому существует только настоящее, а прошлое, как и будущее, не существует, ибо ему нет места в мировом пространстве. Но видим-то мы всегда только прошлое! Стало быть, видим то, чего в мире нет? Разрешение этого парадокса возлагалось классической физикой на мировой эфир — среду, в которой распространяются электромагнитные колебания. Прошлые состояния тел не существуют, но образы их, запечатленные в возбужденных ими электромагнитных колебаниях, бережно сохраняются в мировом эфире и способны достигать наблюдателя даже через годы и миллиарды лет. Так «свет умерших звезд доходит». Поиски этой загадочной среды, которая присутствует всюду, оставаясь неощутимой, привели физику к теории относительности.

В мире Минковского есть место и для настоящих, и для прошлых состояний материальных объектов. В нем *прошлое существует*, но не в смысле «трехмерного критерия бытия», не в «настоящий момент времени», а в смысле «четырёхмерного критерия бытия»: существует то, что имеет место, проявлено, материализовано в псевдоевклидовом мировом пространстве. Зрительные восприятия раскрывают нам то, что в мире действительно имеется, но раскрывают не все, а лишь то, что находится на изотропных линиях, проходящих через нашу мировую точку. На таких изотропных линиях нет ни одной

прошлой мировой точки нашей собственной мировой линии, и потому мы не видим своих прошлых состояний. На изотропных линиях, проходящих через нас, нет и точек соседних мировых линий, которые имеют одинаковую с нами координату времени в какой-либо координатной системе, и потому мы не можем видеть одновременные нам состояния других материальных точек.

До сих пор мы обращали взгляд вдоль изотропных только в прошлое. Но через мировую точку O наблюдателя на рис. 20 проходит, кроме изотропной OP , изотропная OF , пересекающая в точке F продолжение мировой прямой PA звезды. Ордината точки F соответствует более позднему моменту времени по часам наблюдателя, чем его настоящий момент в точке O . Не значит ли это, что можно увидеть будущее состояние звезды? Необходимое для этого геометрическое условие выполнено: длина отрезка OF изотропной равна нулю. Но ни наш повседневный опыт, ни научные эксперименты не дают свидетельств того, чтобы электромагнитное воздействие могло приносить информацию о будущем. Этим подтверждается представление о проявляющем процессе, совершающемся в мире. Можно воспринимать по изотропным воздействию от тех точек мировых линий, которые уже проявлены, реализованы, сформированы. Но в тех областях псевдоевклидова пространства, до которых еще не дошел мировой проявляющий процесс, видеть нечего, ибо там не сформировались мировые точки — источники электромагнитного воздействия.

§ 19. Вектор массы

Пусть уравнение движения материальной точки относительно инерциальной координатной системы OX в чувственно воспринимаемом пространстве имеет вид $x = F(t)$. Тогда в соответствующей ортонормированной системе координат OXY на псевдоевклидовой плоскости форма мировой линии (в общем случае это кривая линия) описывается функцией (3.21):

$$x = F(t) = F(y/c) = f(y)$$

(рис. 22). Первая производная абсциссы x по времени t представляет скорость материальной точки

$$v = \frac{dx}{dt},$$

а вторая производная — ускорение ее

$$w = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Выясним, как эти классические кинематические величины связаны с геометрическими характеристиками мировой линии.

Возьмем на кривой $x = f(y)$ произвольную точку $M(x; y)$ и близкую к ней точку $M'(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Вектор $\overline{MM'}$ образует с координатной осью OY угол $i\varphi'$, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg}(i\varphi') = \frac{\Delta x}{i \cdot \Delta y}.$$

Если положительное приращение ординаты стремится к нулю ($\Delta y \rightarrow 0$), то точка M' подходит сколь угодно близко к точке M и вектор хорды $\overline{MM'}$ превращается в вектор касательной к мировой линии, направленной в сторону ее роста. Угол $i\varphi$ наклона касательной к оси OY определяется предельным соотношением

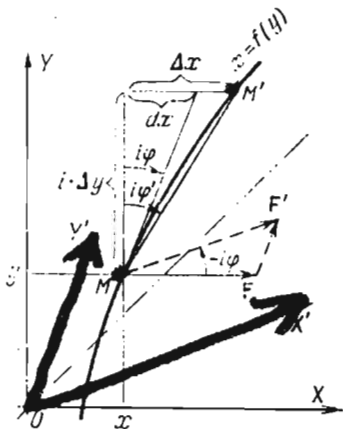


Рис. 22

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{i \cdot \Delta y} = -i \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = -i \frac{dx}{dy}. \quad (3.27)$$

Принимая во внимание соотношение (3.6):

$$y = ct,$$

найдем из (3.27) связь между углом $i\varphi$ наклона мировой линии к оси OY и скоростью v материальной точки:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot c, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{v}{c},$$

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = -i \frac{dx}{dy} = -i \frac{v}{c}. \quad (3.28)$$

Из (3.28) получим с учетом (2.56) соотношение (3.7):

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = i \cdot \operatorname{th} \varphi = -i \frac{v}{c} \Leftrightarrow \operatorname{th} \varphi = -\frac{v}{c}.$$

Этим подтверждается, что соотношения (3.6) и (3.7),

опосредствующие переход от преобразования координат в псевдоевклидовой плоскости к преобразованию Лоренца, не являются взаимно независимыми с точки зрения физики. Равенство (3.6) говорит о том, что время есть форма проявления пространственной протяженности, а равенство (3.7) выводится отсюда в качестве следствия, если графики движения материальных точек решено строить на псевдоевклидовой плоскости или, что вернее выражает существо дела, если материальные точки рассматриваются как чувственно воспринимаемые проявления мировых линий. Поскольку материальная точка не может ни в какой инерциальной системе достигнуть скорости света c , постольку касательная к любой мировой линии в любой ее точке остается вектором, принадлежащим верхнему сектору псевдоевклидовой плоскости.

Согласно (3.28) изменению угла $i\varphi$ наклона мировой линии к оси OY соответствует изменение скорости v материальной точки. Изменение скорости выражается ускорением w , которое таким образом оказывается связанным с искривлением мировой линии:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dy} \cdot c \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \cdot c \right) \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dy^2} \cdot c^2. \quad (3.29)$$

Вторую производную абсциссы x по ординате y , характеризующую искривление линии, мы представим в такой форме, чтобы искривление выражалось как изменение угла наклона касательной. Из (3.28) выразим первую производную через угол:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{-i} \cdot \operatorname{tg}(i\varphi),$$

а затем найдем вторую производную

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dy^2} &= \frac{d}{dy} \left(-\frac{1}{i} \cdot \operatorname{tg}(i\varphi) \right) = -\frac{1}{i} \cdot \frac{d(\operatorname{tg}(i\varphi))}{dy} = \\ &= -\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{\cos^2(i\varphi)} \cdot \frac{d(i\varphi)}{dy} = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi} \cdot \frac{d(i\varphi)}{i \cdot dy}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Величина

$$\frac{d(i\varphi)}{i \cdot dy} = \frac{d(i\varphi)}{d(iy)} =: K_y \quad (3.31)$$

представляет скорость, с которой изменяется угол наклона кривой к оси OY по мере увеличения расстояния iy вдоль этой оси. Так как она зависит от выбора системы

координат (оси OY), мы назовем ее *относительной кривизной* мировой линии. Чтобы получить собственную характеристику искривления линии, не зависящую от выбора координатной системы, нужно сопоставить изменение $\Delta(i\varphi)$ угла не с приращением расстояния вдоль оси OY , а с приращением длины Δl самой мировой линии. Величину

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta(i\varphi)}{\Delta l} = \frac{d(i\varphi)}{dl} = K \quad (3.32)$$

назовем *инвариантной кривизной* мировой линии. Поскольку элемент длины dl мировой линии выражается мнимым числом, как и приращение угла $d(i\varphi)$ на этой длине, инвариантная кривизна K выражается числом вещественным. Кривизна положительна при возрастании угла $i\varphi$ ($d(i\varphi) > i \cdot 0$) и отрицательна при уменьшении его. Как видно на рис. 22, связь между длиной Δl хорды $\overline{MM'}$ и приращением Δy ординаты кривой выражается соотношением

$$\cos(i\varphi') = \frac{i \cdot \Delta y}{\Delta l}.$$

При стремлении точки M' к точке M ($\Delta l \rightarrow 0$) хорда стремится к совпадению с касательной, образуя угол $i\varphi$ с осью OY . Поэтому справедливо равенство

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{i \cdot \Delta y}{\Delta l} = \frac{d(iy)}{dl} = \cos(i\varphi) = \operatorname{ch} \varphi.$$

С учетом его найдем связь между инвариантной кривизной K и относительной кривизной K_y мировой линии (см. (3.31) и (3.32)):

$$K = \frac{d(i\varphi)}{dl} = \frac{d(i\varphi)}{d(iy)} \cdot \frac{d(iy)}{dl} = K_y \cdot \operatorname{ch} \varphi. \quad (3.33)$$

Подставив соотношения (3.30) — (3.33) в (3.29), получаем

$$w = - \frac{c^2 K_y}{\operatorname{ch}^2 \varphi} = - \frac{c^2 K}{\operatorname{ch}^3 \varphi}. \quad (3.34)$$

Хотя равенства (3.34) получены только из кинематических и геометрических соображений, они открывают путь к новым представлениям о *динамике* материальных точек. Материальная точка может приобрести ускорение только в результате внешнего воздействия, причем, согласно второму закону механики Ньютона, существует

прямая пропорциональная зависимость между мерой воздействия (силой F) и величиной ускорения w :

$$F = mw. \quad (3.35)$$

Коэффициент пропорциональности m служит мерой инертности материальной точки и называется ее массой. Коль скоро на роль первичного материального объекта выдвигается вместо материальной точки мировая линия, следует смотреть на массу как на меру инертности мировой линии. Инертность мировой линии проявляется в ее способности сохранять свое направление в псевдоевклидовом пространстве: чем больше масса, тем большая требуется сила для искривления мировой линии.

Так как в каждой одномерной инерциальной системе координат рассматривается движение материальной точки только вдоль единственной (пространственной) оси системы, то и ускорение материальной точки, и сила, сообщающая ускорение, направлены вдоль этой оси. Ось OX нештрихованной инерциальной системы есть ось OX ортонормированной системы координат OXY на псевдоевклидовой плоскости (см. рис. 22). Поэтому с точки зрения нештрихованной координатной системы сила, искривляющая мировую линию $x = f(y)$, есть вектор F , действующий параллельно оси OX . Ввиду равноправия всех ортонормированных систем координат на псевдоевклидовой плоскости мы можем рассматривать мировую кривую $x = f(y)$ в такой координатной системе OXY' , у которой ось OY' параллельна касательной к кривой в произвольной ее мировой точке M . В штрихованной инерциальной системе координат искривление мировой линии в окрестности точки M будет восприниматься как ускоренное движение материальной точки в направлении оси OX' . Поэтому ускорение w' и сила F' будут рассматриваться как направленные вдоль этой оси.

Величину штрихованного ускорения мы получим из соотношений (3.34), учитывая, что в мировой точке M угол между касательной к кривой и осью OY' равен нулю ($\cos(i \cdot 0) = \text{ch } 0 = 1$):

$$w' = -c^2 K'_y = -c^2 K. \quad (3.36)$$

Здесь мы помечаем штрихом не только величину ускорения, но и величину относительной кривизны, чтобы подчеркнуть, что значения этих величин отнесены именно к штрихованной системе координат OXY' . Инвариантная кривизна K (см. (3.32)) не нуждается в штрихе, так как

она не зависит от выбора координатной системы. В точках мировой линии, достаточно близких к точке M , значения угла между касательной и осью OY' малы, и для них равенства (3.36) выполняются приближенно. Даже при такой большой по земным масштабам скорости, как орбитальная скорость нашей планеты ($v = 30$ км/с, $v/c = 1 \cdot 10^{-8}$), величина $\text{ch } \varphi$ практически не отличается от единицы:

$$\text{ch } \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-8} = 1,000000005.$$

А с большими скоростями классическая механика и не имела дела. Поэтому равенства (3.36) можно считать классическим приближением точных соотношений (3.34). И так как второй закон Ньютона найден именно для классического приближения, мы можем записать его в следующей форме:

$$F' = m' w' = (-c^2) \cdot m' K'_y = (-c^2) m' K. \quad (3.37)$$

Величину массы мы тоже помечаем штрихом, поскольку пока не выяснено, как отражается на ее значении изменение системы координат. По существу мы не можем сказать заранее, как преобразуются при изменении координатной системы значения всех трех величин: силы, ускорения и массы. Однако можно высказать на этот счет некоторые соображения, не лишенные логических оснований.

Сначала о силе. Если в классической механике сила рассматривается как причина ускорения материальной точки, то в интерпретации Минковского силу следует рассматривать как причину искривления мировой линии. И поскольку существует инвариантная мера кривизны мировой линии (см. (3.32)), можно ожидать, что существует инвариантная характеристика и искривляющего воздействия, т. е. что сила является *векторной* величиной и в псевдоевклидовом пространстве. Тогда причина, вызывающая ускорение материальной точки в штрихованной инерциальной системе координат OX' , будет составляющей вектора силы F в направлении оси OX' и модуль ее будет проекцией вектора F на ось OX' :

$$F' = |F| \cdot \cos(i\varphi) = F \cdot \text{ch } \varphi. \quad (3.38)$$

В рассуждениях о том, как изменяется величина ускорения при переходе от штрихованной инерциальной системы координат к нештрихованной, перед нами два пу-

ти. Дело в том, что в классическом приближении (3.36) (когда $\cos(i\varphi) \approx 1$) исчезает различие между относительной и инвариантной кривизной мировой линии (см. (3.33)). Но если мы будем исходить из того, что

$$w' = -c^2 K'_y,$$

то по формуле (3.34) получим

$$w = \frac{-c^2 K'_y}{\operatorname{ch}^2 \varphi} = \frac{w'}{\operatorname{ch}^2 \varphi},$$

а если

$$w' = -c^2 K,$$

то та же формула (3.34) даст нам

$$w = \frac{-c^2 K}{\operatorname{ch}^3 \varphi} = \frac{w'}{\operatorname{ch}^3 \varphi}.$$

Правильность того или иного выбора выяснится лишь при сравнении следствий из него с данными экспериментов. Учитывая уже известное науке решение, мы выбираем соотношение

$$w = \frac{w'}{\operatorname{ch}^2 \varphi}, \quad \text{или} \quad w' = w \cdot \operatorname{ch}^2 \varphi. \quad (3.39)$$

Впрочем, оно заслуживает предпочтения и потому, что именно относительная кривизна K'_y отражает роль выбора координатной системы.

Подставляя (3.38) и (3.39) в формулировку (3.37) второго закона Ньютона для штрихованной системы координат, получим

$$F \cdot \operatorname{ch} \varphi = m' \cdot w \cdot \operatorname{ch}^2 \varphi, \quad \text{или} \quad F = (m' \cdot \operatorname{ch} \varphi) w,$$

а сравнивая это выражение с (3.35), видим, что

$$m = m' \cdot \operatorname{ch} \varphi. \quad (3.40)$$

Прежде чем приступить к обсуждению результата (3.40), подчеркнем, что рассуждение, приведшее нас к нему, нельзя принимать за доказательство. Это в лучшем случае наводящие соображения, логически увязанные с представлениями о мире Минковского. Истинность и глубокая плодотворность соотношения (3.40) обнаруживается при сопоставлении его со всей совокупностью надежно установленных экспериментальных фактов.

Обратим внимание на то, что в штрихованной инерциальной системе координат OX' мировая точка M воспринимается как состояние *неподвижности* материальной

точки. Это лишь мгновенное состояние покоя, ибо сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение $w' \neq 0$. Значит, величина m' представляет массу покоящейся материальной точки. Но в нештрихованной инерциальной системе координат OX та же самая мировая точка M воспринимается в виде состояния движения материальной точки со скоростью

$$v = ic \cdot \operatorname{tg}(i\varphi) = -c \cdot \operatorname{th} \varphi.$$

Значит, величина m представляет массу движущейся материальной точки. Согласно (3.40) масса движущейся материальной точки больше массы этой же материальной точки в состоянии покоя, ибо $\operatorname{ch} \varphi \geq 1$. Внося в (3.40) выражение гиперболического косинуса через гиперболический тангенс (см. (2.59)) и учитывая (3.7), получаем

$$m = m' \cdot \operatorname{ch} \varphi = \frac{m'}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \varphi}} = \frac{m'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Это знаменитый релятивистский эффект зависимости массы материальной точки от скорости ее движения, обнаруженный экспериментально Кауфманом [27] и затем объясненный теорией относительности. Принято обозначать массу покоящейся материальной точки символом m_0 , называя ее кратко *массой покоя*, и записывать соотношение (3.40) в виде

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (3.41)$$

Эффект зависимости массы от скорости имеет геометрическое объяснение. В формуле (3.40) бросается в глаза характерное отношение ортогонального проектирования в псевдоевклидовой плоскости. По смыслу рассматриваемой задачи $i\varphi$ есть угол между касательной к мировой линии и осью OY (см. рис. 22). Если существует вектор \mathbf{m} , направленный по касательной в сторону роста мировой линии и имеющий модуль

$$|\mathbf{m}| = im_0 \quad (3.42)$$

(модуль вектора мнимого сектора выражается мнимым числом), то существует проекция этого вектора на ось OY (направление проектирования перпендикулярно к OY):

$$\operatorname{пр}_{OY} \mathbf{m} = |\mathbf{m}| \cdot \cos(i\varphi) = im' \cdot \operatorname{ch} \varphi = im_0 \cdot \operatorname{ch} \varphi.$$

Величина проекции также выражается мнимым числом.

Обозначив ее через im , получаем

$$im = im_0 \cdot \operatorname{ch} \varphi, \text{ или } m = m_0 \cdot \operatorname{ch} \varphi.$$

Это и есть соотношение (3.40) с тем лишь отличием, что масса покоя обозначена символом m_0 вместо m' . Мы подошли к догадке, что масса в качестве динамической характеристики мировой линии является векторной величиной. Вектор массы направлен по касательной к мировой

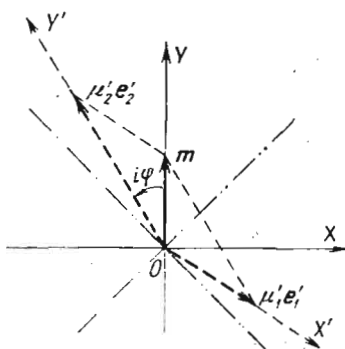


Рис. 23

линии в сторону ее роста. Изменить направление мировой линии — значит изменить направление ее вектора массы. Модуль вектора массы является мерой инертности мировой линии, характеризуя ее неподатливость изменению направления.

Если масса является векторной величиной в двумерном псевдоевклидовом пространстве, то она подчинена его линейным и метрическим свойствам. Прежде всего

вектор массы должен разлагаться по базису пространства:

$$m = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2. \quad (3.43)$$

При переходе от ортонормированного базиса e_1, e_2 к ортонормированному базису e'_1, e'_2 :

$$m = \mu'_1 e'_1 + \mu'_2 e'_2 \quad (3.44)$$

координаты вектора массы должны преобразовываться так же, как и координаты радиус-вектора (см. (2.80) и (2.81)):

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= \mu_1 \cdot \operatorname{ch} \varphi + \mu_2 \cdot \operatorname{sh} \varphi = \frac{\mu_1 + \mu_2 \cdot \operatorname{th} \varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \varphi}}, \\ \mu'_2 &= \mu_1 \cdot \operatorname{sh} \varphi + \mu_2 \cdot \operatorname{ch} \varphi = \frac{\mu_2 + \mu_1 \cdot \operatorname{th} \varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \varphi}}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Рассмотрим материальную точку с массой покоя m_0 , неподвижную относительно инерциальной системы координат OX . Вектор массы m соответствующей мировой линии параллелен оси OY ортонормированной координатной системы OXY в псевдоевклидовой плоскости, и разложение его по базису этой плоскости имеет вид (рис. 23)

$$m = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 = 0 \cdot e_1 + \mu_2 e_2 = \mu_2 e_2.$$

Согласно общему определению модуля вектора (1.29) и с учетом таблицы (2.19) скалярных произведений векторов базиса псевдоевклидовой плоскости вычислим модуль вектора массы \mathbf{m} :

$$\begin{aligned} |\mathbf{m}| &= \sqrt{\langle \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle} = \sqrt{\langle \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2, \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2 \rangle} = \\ &= \sqrt{\mu_1^2 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + \mu_2^2 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle} = \sqrt{\mu_1^2 - \mu_2^2} = \sqrt{0 - \mu_2^2} = \\ &= \mu_2 \sqrt{-1} = i\mu_2. \end{aligned}$$

Координата μ_2 в данном случае равна массе покоя m_0 (см. (3.42)). Подставляя значения координат

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = m_0$$

в формулы (3.45), найдем координаты вектора массы относительно штрихованной координатной системы $OX'Y'$:

$$\mu'_1 = \frac{0 + m_0 \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = - \frac{m_0 (v/c)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (3.46)$$

$$\mu'_2 = \frac{m_0 + 0 \cdot \text{th } \varphi}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \varphi}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (3.47)$$

(здесь использовано соотношение (3.7)). В координате μ'_2 мы узнаем массу движущейся материальной точки (см. (3.41)). Она же определяет модуль вектора $\mu'_2 \mathbf{e}'_2$, который является составляющей вектора массы \mathbf{m} в направлении оси OY' :

$$|\mu'_2 \mathbf{e}'_2| = |\mu'_2| \cdot |\mathbf{e}'_2| = \mu'_2 \cdot i.$$

Найдем превышение массы движущейся материальной точки над массой покоя:

$$\Delta \mu_2 = \mu'_2 - \mu_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - m_0 = m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right). \quad (3.48)$$

Если скорость v материальной точки пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света ($v/c \ll 1$, или $i\varphi \approx 0$ — классическое приближение), то можно пользоваться приближенным равенством

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{v^2}{c^2} \right) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}.$$

Тогда приращение массы $\Delta\mu_2$ представляется в виде

$$\Delta\mu_2 \approx m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{m_0 v^2}{2} \cdot \frac{1}{c^2}.$$

Величина

$$\frac{m_0 v^2}{2} = E_K$$

известна в механике как кинетическая энергия материальной точки. Поэтому равенство (3.48) приобретает следующий смысл:

$$\Delta\mu_2 \approx \frac{E_K}{c^2}, \quad \text{или} \quad E_K \approx c^2 \cdot \Delta\mu_2. \quad (3.49)$$

Это знаменитое открытие Эйнштейна: «масса тела есть мера содержащейся в нем энергии» [28].

Соотношение (3.49) получено как приближенное, поскольку учитывались только два члена разложения функции $(1 - v^2/c^2)^{-0.5}$ в ряд Тейлора. Но и классическое выражение для кинетической энергии не является абсолютно точным, так как не учитывает эффекта возрастания движущейся массы. Приближенное равенство (3.49) помогло найти точную формулу кинетической энергии

$$E_K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right) \quad (3.50)$$

и увидеть в ней универсальный закон природы

$$E_K = c^2 \cdot \Delta\mu_2, \quad (3.51)$$

справедливость которого подтверждена экспериментально с высокой степенью уверенности. На эквивалентности массы и энергии основано практическое использование ядерной энергии: в ядерной реакции освобождается часть энергии, находившейся в связанном состоянии в виде массы покоя исходных ядер. Известны такие взаимодействия элементарных частиц, например реакция аннигиляции электрона и позитрона, когда их масса покоя обращается в нуль, а освободившаяся энергия проявляется в виде квантов электромагнитного излучения [29]. Физики пришли к выводу, что вся масса тела, включая массу покоя, определяется содержащейся в этом теле энергией [30] по закону

$$\mu_2' = E/c^2. \quad (3.52)$$

Составляющая вектора массы по оси OX' , т. е. вектор $\mu'_1 e'_1$ (см. рис. 23), принадлежит вещественному сектору, и, в отличие от модуля вектора m , модуль этой составляющей выражается вещественным числом:

$$|\mu'_1 e'_1| = |\mu'_1| \cdot |e'_1| = |\mu'_1| \cdot 1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \cdot \left| \frac{v}{c} \right|. \quad (3.53)$$

Если вторая координата вектора массы может быть только положительной и имеет *наименьшее* значение, равное массе покоя, то первая его координата может быть положительной, отрицательной и равной нулю. Абсолютная величина обеих координат стремится к бесконечности при стремлении к бесконечности угла $i\varphi$ между вектором m и осью OY' . В выражении координаты μ'_1 (см. (3.46), (3.53)) бросается в глаза хорошо знакомая физическая величина — произведение массы на скорость, называемая количеством движения или импульсом материальной точки. В классическом смысле импульс равен $m_0 v = p_0$, а в релятивистском, т. е. с учетом зависимости массы от скорости, импульс равен

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \cdot v = \mu'_2 v. \quad (3.54)$$

Поэтому первую координату вектора массы (см. (3.46) и (3.47)) можно представить в форме

$$\mu'_1 = - \frac{\mu'_2 v}{c} = - \frac{p}{c}. \quad (3.55)$$

Совершенно естественно, что в проекции вектора массы на ось абсцисс, воспринимаемую нами в виде пространственной протяженности, фигурирует импульс. Ведь вектор массы направлен по касательной к мировой линии, а наклон этой касательной по отношению к оси ординат в псевдоевклидовом пространстве проявляется в чувственно воспринимаемом пространстве как скорость материальной точки относительно оси абсцисс. Рассматривая явление движения лишь в геометрическом и кинематическом аспектах, мы выделяем в нем направление и скорость. Но в природе движутся *материальные* объекты, а самой общей физической характеристикой материального объекта является наличие у него массы. Что разделено в нашем сознании, то едино в природе. В псевдоевклидовом мировом пространстве рост мировой линии (ее

направление и инертность) характеризуется вектором массы, а в чувственно воспринимаемом пространстве этому соответствует движение материальной точки, характеризующееся импульсом. Но как вектор массы в двумерном псевдоевклидовом пространстве определяется проекциями его на обе оси координат, так движение материальной точки характеризуется двумя величинами: импульсом и энергией.

В первой половине XVIII в. разгорелся спор о том, что является истинной мерой движения тела: произведение массы на скорость, как считали Декарт и его последователи, или же произведение массы на квадрат скорости, как считал Лейбниц [3]. Сложившееся в дальнейшем четкое разграничение понятий импульса mv и кинетической энергии $mv^2/2$ воспринималось поколениями физиков уже в процессе получения образования, и проблема двойственности меры движения перестала волновать умы. Удивляться пришлось позже, когда в теории относительности вскрылось глубокое диалектическое единство энергии и импульса. В релятивистской механике импульс и полная энергия материальной точки рассматриваются как проекции вектора энергии-импульса на оси ортонормированной системы координат в псевдоевклидовом мировом пространстве [13].

Термин «вектор энергии-импульса» ярко выражает замечательную связь между двумя важными понятиями классической механики, однако он не вполне точен, поскольку проекции этого вектора на координатные оси чувственно воспринимаемого пространства представляют не импульс как таковой, а величину, пропорциональную импульсу. Если придать чисто энергетический смысл проекции вектора на ось ординат ($E = mc^2$), то проекция его на ось абсцисс будет равна pc (см. (3.52) и (3.55)). Поэтому иногда предпочитают говорить не о векторе энергии-импульса, а о четырехмерном векторе импульса (4-импульсе) [6], проекции которого на координатные оси чувственно воспринимаемого пространства представляют импульс, а проекция на перпендикулярную к ним ось представляет величину E/c , где E — полная энергия. По мнению автора данной книги, для описания модели мира Минковского лучше подходит понятие вектора массы мировой линии. Этот термин не принят в научной литературе, хотя по существу он выражает то же отношение, что и общепринятые термины. Произведение вектора массы на коэффициент c есть 4-вектор импульса, а про-

изведение вектора массы на коэффициент c^2 есть вектор энергии-импульса в энергетическом выражении. Методологически предпочтительнее видеть в энергии и импульсе проявления одной и той же сущности — вектора массы, чем выводить из энергии и импульса, как двух различных сущностей, новое синтезирующее понятие энергии-импульса. Кроме того, учет векторного характера массы позволяет внести большую ясность и в другие вопросы физической теории, оправдывая предвидение Минковского, который сказал: «...по моему мнению, физические законы могли бы найти свое наисовершеннейшее выражение как взаимоотношения между мировыми линиями» [5].

Великий принцип естествознания классического периода — закон сохранения массы — нуждается в переосмыслении после открытия эффекта увеличения массы движущихся тел. В классической механике масса как мера инертности тела имела единственный смысл: коэффициент пропорциональности между ускорением, получаемым телом, и действующей на тело силой. В модели мира Минковского можно говорить о массе в различных аспектах: 1) вектор массы m ; 2) модуль вектора массы $|m| = im_0$; 3) проекция этого вектора на ось, по которой отсчитывается пропорциональная времени величина ct . Именно этой проекции соответствует классическое представление о массе как коэффициенте пропорциональности между силой и ускорением. О постоянстве его теперь можно говорить лишь приближенно при малых скоростях относительного движения.

Модель мира Минковского позволяет увидеть в первом законе механики Ньютона *закон сохранения вектора массы*. Так как по закону инерции материальная точка, не испытывающая внешних воздействий, не изменяет своей скорости, то соответствующая ей мировая линия является прямой. Это значит, что сохраняется по меньшей мере *направление* вектора массы. Модуль вектора массы проявляется в виде массы покоя материальной точки (см. (3.42)). Лучшие свидетельства его сохранения представляют элементарные частицы. Зачастую они наблюдаются в движении с субсветовыми скоростями, при которых изменение массы достаточно заметно. Однако пересчет по формуле (3.41):

$$m_0 = m \sqrt{1 - (v/c)^2},$$

где m — масса движущейся частицы, неизменно приводит к одному и тому же значению массы покоя, характерно-

му для данной элементарной частицы. Таким образом, есть основания полагать, что *при отсутствии внешних воздействий на мировую линию ее вектор массы (направление и модуль) сохраняется неизменным*. Следствия, вытекающие из принципа сохранения вектора массы, также подтверждают его справедливость.

В классической механике тело может рассматриваться как система материальных точек. В модели мира Минковского этому взгляду на тело соответствует система мировых линий. Естественно считать вектор массы такой системы суммой векторов массы мировых линий, входящих в систему. Если система как целое не испытывает

внешних воздействий, то ее суммарный вектор массы сохраняется постоянным, хотя бы векторы массы отдельных мировых линий изменялись при взаимодействиях внутри системы.

Рассмотрим изолированную систему двух мировых прямых, которые сближаются в ходе проявляющего процесса и после столкновения сливаются в одну мировую линию. Пусть перед столкновением мировые прямые характеризуются векторами массы m и l . Примем мировую точку столкновения за

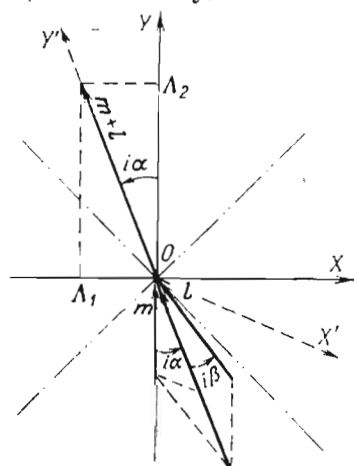


Рис. 24

начало координат O и направим ось OY коллинеарно вектору массы m (рис. 24). Тогда прямая с этим вектором массы будет восприниматься в инерциальной системе координат OX как неподвижная материальная точка с массой покоя m_0 . Другая мировая прямая будет восприниматься в этой же инерциальной системе в виде материальной точки, обладающей массой покоя l_0 и движущейся со скоростью

$$v = (ic) \cdot \operatorname{tg} (i\alpha + i\beta) = -c \cdot \operatorname{th} (\alpha + \beta).$$

Поскольку суммарный вектор массы изолированной системы мировых линий не изменяется при столкновении, объединяющая мировая линия, образовавшаяся в результате столкновения, будет прямой, имеющей направление вектора $m + l$. Она образует с осью OY угол $i\alpha$ и воспри-

нимается в виде объединенной материальной точки, движущейся со скоростью (см. (3.28))

$$V = (ic) \cdot \operatorname{tg}(i\alpha) = -c \cdot \operatorname{th} \alpha. \quad (3.56)$$

Такое столкновение материальных точек называется *абсолютно неупругим*. Запишем разложение всех рассматриваемых векторов массы по базису e_1, e_2 координатной системы OXY :

$$m = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 = 0 \cdot e_1 + m_0 e_2 = m_0 e_2,$$

$$l = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2,$$

$$m + l = \Lambda_1 e_1 + \Lambda_2 e_2 = \lambda_1 e_1 + (m_0 + \lambda_2) e_2.$$

Угол $i\alpha$ между суммарным вектором массы $m + l$ и осью OY определяется соотношением

$$\operatorname{tg}(i\alpha) = \frac{\Lambda_1}{i\Lambda_2} = \frac{\lambda_1}{i(m_0 + \lambda_2)} = -i \frac{\lambda_1}{m_0 + \lambda_2} = i \cdot \operatorname{th} \alpha,$$

или

$$\operatorname{th} \alpha = -\frac{\lambda_1}{m_0 + \lambda_2}.$$

Подставляя это выражение в (3.56), находим общую скорость материальных точек после столкновения:

$$V = c \frac{\lambda_1}{m_0 + \lambda_2} = \frac{c \cdot \frac{-l_0 v}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}}}{m_0 + \frac{l_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} = \frac{-l_0 v}{m_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} + l_0}. \quad (3.57)$$

Здесь координаты вектора массы l выражены через массу покоя l_0 и скорость v материальной точки с помощью очевидных соотношений

$$\lambda_1 = l_0 \cdot \operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \frac{l_0 \cdot \operatorname{th}(\alpha + \beta)}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2(\alpha + \beta)}} = \frac{l_0 (-v/c)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

$$\lambda_2 = l_0 \cdot \operatorname{ch}(\alpha + \beta) = \frac{l_0}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2(\alpha + \beta)}} = \frac{l_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

При $v \ll c$ получаем классическое приближение формулы (3.57):

$$|V| \approx \frac{l_0 |v|}{m_0 + l_0}.$$

Вычислим модуль суммарного вектора массы, а следовательно, и массу покоя объединенной материальной точки:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{m} + \mathbf{l}| &= iM_0 = \sqrt{\lambda_1^2 - (m_0 + \lambda_2)^2} = i \sqrt{(m_0 + \lambda_2)^2 - \lambda_1^2}, \\
 M_0 &= \sqrt{(m_0 + \lambda_2)^2 - \lambda_1^2} = \sqrt{m_0^2 + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + 2m_0\lambda_2} = \\
 &= \sqrt{m_0^2 + l_0^2 + \frac{2m_0 l_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}}. \quad (3.58)
 \end{aligned}$$

Здесь использованы соотношения

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{l}| &= il_0 = \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = i \sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}, \\
 l_0 &= \sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}.
 \end{aligned}$$

При $v \ll c$ получаем классическое приближение формулы (3.58):

$$M_0 \approx \sqrt{m_0^2 + l_0^2 + 2m_0 l_0} = m_0 + l_0,$$

создающее видимость сохранения массы покоя при абсолютно неупругом столкновении тел. Однако в точном смысле масса покоя в этом случае не остается постоянной, а имеет место закон сохранения *вектора* массы в изолированной системе мировых линий. Точная формула (3.58), полученная на основании этого закона, говорит о том, что при абсолютно неупругом соударении материальных точек масса покоя объединенной точки превышает сумму масс покоя исходных точек:

$$M_0 > m_0 + l_0.$$

Чтобы яснее увидеть физический смысл этого превышения, перейдем к системе координат $OX'Y'$, в которой ось OY' коллинеарна вектору $\mathbf{m} + \mathbf{l}$. В штрихованной инерциальной системе координат OX' материальные точки после столкновения неподвижны, а до столкновения двигались со скоростями

$$v_m = (ic) \cdot \operatorname{tg}(-i\alpha) = c \cdot \operatorname{th} \alpha,$$

$$v_l = (ic) \cdot \operatorname{tg}(i\beta) = -c \cdot \operatorname{th} \beta,$$

и их суммарная кинетическая энергия имела величину

(см. (3.50))

$$\begin{aligned} E_m + E_l &= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v_m/c)^2}} - 1 \right) + l_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v_l/c)^2}} - 1 \right) = \\ &= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \alpha}} - 1 \right) + l_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \beta}} - 1 \right) = \\ &= m_0 c^2 (\text{ch } \alpha - 1) + l_0 c^2 (\text{ch } \beta - 1) = \\ &= c^2 [(m_0 \text{ch } \alpha + l_0 \text{ch } \beta) - (m_0 + l_0)]. \end{aligned}$$

Это количество кинетической энергии исчезло в результате столкновения материальных точек, поскольку они стали неподвижными, но величина

$$(m_0 \text{ch } \alpha + l_0 \text{ch } \beta) - (m_0 + l_0) = \frac{E_m + E_l}{c^2} \quad (3.59)$$

в точности равна превышению массы покоя M_0 объединенной материальной точки над суммой $m_0 + l_0$. Действительно, проектируя векторы массы \mathbf{m} и \mathbf{l} на направление вектора $\mathbf{m} + \mathbf{l}$ (см. рис. 24), получим

$$\begin{aligned} |\mathbf{m} + \mathbf{l}| &= iM_0 = |\mathbf{m}| \cdot \cos(i\alpha) + |\mathbf{l}| \cdot \cos(i\beta) = \\ &= im_0 \cdot \text{ch } \alpha + il_0 \cdot \text{ch } \beta, \end{aligned}$$

или

$$M_0 = m_0 \cdot \text{ch } \alpha + l_0 \cdot \text{ch } \beta.$$

Поэтому равенство (3.59) равносильно равенству

$$E_m + E_l = c^2 [M_0 - (m_0 + l_0)]$$

и выражает закон сохранения энергии в самой общей форме: кинетическая энергия, которой обладали материальные точки перед столкновением, пошла на увеличение массы покоя материальной точки, образовавшейся в результате абсолютно неупругого удара.

Законы сохранения энергии и импульса изолированной системы материальных точек являются следствиями закона сохранения суммарного вектора массы изолированной системы мировых линий. Если две мировые линии, образующие такую систему, взаимодействуют между собой, то характеризующие их перед взаимодействием векторы массы \mathbf{m} и \mathbf{l} могут претерпеть изменения и превратиться после взаимодействия в векторы \mathbf{m}^* и \mathbf{l}^* . Однако сумма их останется неизменной:

$$\mathbf{m} + \mathbf{l} = \mathbf{m}^* + \mathbf{l}^*. \quad (3.60)$$

Разложив по базису векторы, входящие в это равенство:

$$(\mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2) + (\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2) = (\mu_1^* \mathbf{e}_1 + \mu_2^* \mathbf{e}_2) + (\lambda_1^* \mathbf{e}_1 + \lambda_2^* \mathbf{e}_2),$$
$$(\mu_1 + \lambda_1) \mathbf{e}_1 + (\mu_2 + \lambda_2) \mathbf{e}_2 = (\mu_1^* + \lambda_1^*) \mathbf{e}_1 + (\mu_2^* + \lambda_2^*) \mathbf{e}_2,$$

получаем закон сохранения импульса

$$\mu_1 + \lambda_1 = \mu_1^* + \lambda_1^* \quad (3.61)$$

и закон сохранения энергии

$$\mu_2 + \lambda_2 = \mu_2^* + \lambda_2^*. \quad (3.62)$$

Можно было бы рассмотреть вариант столкновения двух мировых прямых, отличающийся тем, что при столкновении полностью сохраняется индивидуальность мировых линий, характеризуемая модулем вектора массы. Ни одна из взаимодействующих мировых прямых не увеличивает своего модуля вектора массы за счет другой, и после столкновения модуль каждого вектора остается таким же, каким был до столкновения:

$$|\mathbf{m}^*| = |\mathbf{m}|, \quad |\mathbf{l}^*| = |\mathbf{l}|. \quad (3.63)$$

Сочетание условия (3.63) с общим законом (3.60) позволяет получить из геометрических соображений все формулы, характеризующие абсолютно упругое столкновение материальных точек. Мы не станем останавливаться на этих расчетах.

Особенно интересно применить представление о векторе массы к явлению электромагнитного воздействия, загадки которого дали решающий толчок к созданию теории относительности и квантовой теории. Электромагнитное воздействие сопряжено с изменением энергии и импульса материальных объектов. Поэтому изотропная линия, служащая проводником электромагнитного воздействия, должна тоже характеризоваться вектором массы. Но вектор, имеющий направление изотропной, сам окажется изотропным. Изотропность вектора массы должна заключаться в том, что этот вектор, будучи ненулевым, имеет модуль, равный нулю. Для этого необходимо и достаточно, чтобы координаты вектора массы

$$\mathbf{m} = \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2$$

удовлетворяли условию

$$\mu_1^2 = \mu_2^2. \quad (3.64)$$

Как показывает соотношение (3.55) между координатами вектора массы

$$\mu_1 = -\frac{\mu_2 v}{c},$$

условие (3.64) выполняется именно в тех случаях, когда $|v| = |c|$, т. е. для объектов, которые представляются движущимися со скоростью света относительно инерциальной системы координат, а в модели мира Минковского отождествляются с прямыми, наклоненными на бесконечно большой угол к оси OY :

$$|\operatorname{th} \varphi| = \left| -\frac{v}{c} \right| = \frac{c}{c} = 1, \quad \varphi = \pm \infty, \quad i\varphi = \pm i\infty.$$

Это и есть изотропные прямые.

С изотропной прямой не может быть связана ортонормированная система координат псевдоевклидовой плоскости, так как в ней единственное направление, перпендикулярное к изотропной, есть направление этой же изотропной, и расстояние между любыми точками изотропной равно нулю. Следовательно, при любом выборе координатной системы составляющая изотропного вектора массы вдоль оси OY , т. е. вектор $\mu_2 e_2$, не может совпадать с самим изотропным вектором \mathbf{m} , так что всегда имеется отличная от нуля разность модулей этих векторов (см. (3.48)), определяющая кинетическую энергию светового сигнала (см. (3.50)):

$$|\mu_2 e_2| - |\mathbf{m}| = i\mu_2 - im_0 = i(\mu_2 - m_0) = i \frac{E_K}{c^2}.$$

Но у изотропного вектора массы модуль равен нулю:

$$|\mathbf{m}| = im_0 = i \cdot 0, \quad m_0 = 0.$$

Значит, вся проекция изотропного вектора массы на ось OY проявляется в виде кинетической энергии

$$\mu_2 - m_0 = \mu_2 - 0 = \mu_2 = E_K/c^2. \quad (3.65)$$

Поскольку изотропная прямая не может быть осью ортонормированной системы координат в псевдоевклидовой плоскости, постольку не существует инерциальной системы в чувственно воспринимаемом пространстве, относительно которой световой сигнал был бы неподвижен. Поэтому модуль изотропного вектора массы нельзя истолковать как массу покоя светового сигнала. Отсутствие та-

кой массы покоя не очень удачно выражается словами: масса покоя фотона равна нулю.

Электромагнитное воздействие передается отдельными порциями, квантами, кинетическая энергия которых определяется соотношением Планка

$$E_k = \varepsilon = h\nu, \quad (3.66)$$

где $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, ν — частота излучения. Подставляя (3.66) в (3.65), получаем ординату изотропного вектора массы одного электромагнитного кванта (фотона):

$$\mu_2 = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}. \quad (3.67)$$

Из общего соотношения (3.55) между координатами вектора массы

$$\mu_1 = -\frac{p}{c}$$

с учетом условия изотропности (3.64) находим импульс фотона

$$p = c \cdot |\mu_1| = c\mu_2 = c \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h\nu}{c}. \quad (3.68)$$

Формулы (3.66), (3.67), (3.68) являются основными соотношениями теории, описывающей испускание, поглощение и рассеяние электромагнитного излучения.

К изотропному вектору массы применимы те же соображения, которые были высказаны в § 11 о геометрических изотропных векторах. Там вслед за формулами (2.25) речь шла о несовпадении линейной и метрической мер длины у изотропных векторов: в смысле линейных отношений параллельные изотропные векторы могут иметь различные длины, а в метрическом смысле длина всех изотропных векторов одинакова и равна нулю. Точно так же все изотропные векторы массы в смысле метрических отношений имеют одинаковый модуль, равный нулю, хотя параллельные изотропные векторы массы могут различаться в линейном отношении. Так, если векторы массы фотонов

$$\mathbf{m} = \mu_2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \mu_2 \mathbf{q}_0^+ \quad \text{и} \quad \mathbf{l} = \lambda_2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \lambda_2 \mathbf{q}_0^+$$

(см. (2.25)) связаны линейной зависимостью

$$\mathbf{l} = \eta \mathbf{m}, \quad (3.69)$$

то имеет место такая же зависимость между их координатами:

$$\lambda_2 = \eta \mu_2, \quad (3.70)$$

а это означает, что рассматриваемые фотоны при одинаковости модулей своих векторов массы несут различные количества энергии и обладают различными импульсами. Для актов излучения, поглощения и рассеяния фотонов существенна определенность изотропных векторов массы именно в *линейном* смысле, так как результирующий вектор массы является *суммой* взаимодействующих векторов. Это иллюстрируется рис. 25.

На рис. 25 вектор a изображает вектор массы атома, способного поглотить как фотон с вектором массы m , так и фотон с вектором массы l . Отрицательная часть оси OY представляет мировую линию атома до того, как он воспринял электромагнитное воздействие по изотропной $y = x$ в мировой точке O . Поглощение фотона может рассматриваться как абсолютно неупругое столкновение мировой линии атома с изотропной, после которого фотон перестает существовать как самостоятельный физический объект и соответствующая ему изотропная остается лишь геометрической линией, лишенной динамического свойства (вектора массы). Рассмотрим сначала поглощение атомом фотона с вектором массы m . Перед столкновением изолированная система атом — фотон характеризовалась суммарным вектором массы $a + m$. После столкновения этот суммарный вектор остается таким же, но характеризует уже не систему линий, а одну мировую прямую, представляющую атом в возбужденном состоянии.

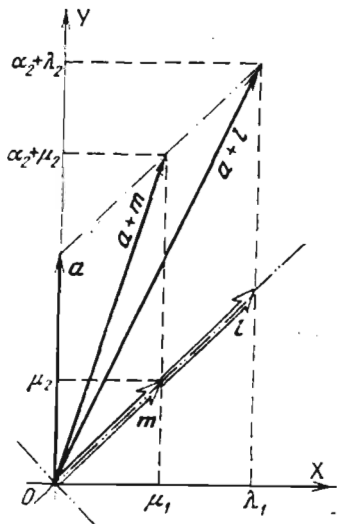


Рис. 25

Запишем закон сохранения вектора массы изолированной системы:

$$\begin{aligned} a + m &= (0 \cdot e_1 + \alpha_2 e_2) + \mu_2 (e_1 + e_2) = \\ &= (0 + \mu_2) e_1 + (\alpha_2 + \mu_2) e_2. \end{aligned}$$

До поглощения фотона атом покоился в рассматриваемой системе координат и импульс его был равен нулю ($p = \alpha_1 c = 0 \cdot c = 0$). Но вектор массы $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{m}$ возбужденного атома имеет отличную от нуля первую координату $\alpha_1' = 0 + \mu_2 = \mu_2$. Значит, возбужденный атом обладает импульсом

$$p = \alpha_1' c = \mu_2 c,$$

который передан ему фотоном. Проекция вектора $\mathbf{a} + \mathbf{m}$ на ось OY превосходит координату α_2 вектора \mathbf{a} на величину μ_2 . Следовательно, кинетическая энергия $\mu_2 c^2$ возбужденного атома воспринята им у фотона. Найдем разность между модулями векторов массы $\mathbf{a} + \mathbf{m}$ и \mathbf{a} :

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{m}| - |\mathbf{a}| &= \sqrt{\mu_2^2 - (\alpha_2 + \mu_2)^2} - \sqrt{0^2 - \alpha_2^2} = \\ &= \sqrt{\mu_2^2 - \alpha_2^2 - \mu_2^2 - 2\alpha_2\mu_2} - \sqrt{-\alpha_2^2} = i\sqrt{\alpha_2^2 + 2\alpha_2\mu_2} - i\alpha_2 = \\ &= i\left(\sqrt{\alpha_2^2 + 2\alpha_2\mu_2} - \alpha_2\right). \end{aligned}$$

Это значит, что масса покоя возбужденного атома превосходит массу покоя невозбужденного атома на величину

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_2 &= \sqrt{\alpha_2^2 + 2\alpha_2\mu_2} - \alpha_2 = \alpha_2 \sqrt{1 + 2\frac{\mu_2}{\alpha_2}} - \alpha_2 = \\ &= \alpha_2 \left(\sqrt{1 + 2\frac{\mu_2}{\alpha_2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Поскольку отношение μ_2/α_2 очень мало по сравнению с единицей, можно воспользоваться приближенным равенством

$$\sqrt{1 + 2\frac{\mu_2}{\alpha_2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(2\frac{\mu_2}{\alpha_2} \right) = 1 + \frac{\mu_2}{\alpha_2},$$

и тогда получим

$$\Delta\alpha_2 \approx \alpha_2 \left[\left(1 + \frac{\mu_2}{\alpha_2} \right) - 1 \right] = \alpha_2 \cdot \frac{\mu_2}{\alpha_2} = \mu_2.$$

Таким образом, приращение массы покоя возбужденного атома приближенно равно проекции изотропного вектора массы \mathbf{m} на ось ординат (соответствует энергии $\mu_2 c^2$ поглощенного фотона). Величина $\Delta\alpha_2 \cdot c^2 \approx \mu_2 c^2$ представляет энергию возбуждения атома.

На рис. 25 изображен также случай поглощения атомом фотона, характеризуемого изотропным вектором массы l . Если вектор l в линейном отношении больше вектора m в η раз (см. (3.69) и (3.70)), то атом приобретет в η раз больший импульс и в η раз большую кинетическую энергию, чем при поглощении фотона с вектором массы m . При этом и приращение массы покоя атома (и энергия возбуждения) будет примерно в η раз больше.

Координаты изотропного радиус-вектора преобразуются при изменении координатной системы по общим формулам (2.80), (2.81), а координаты изотропного вектора массы — по аналогичным формулам (3.45). Запишем эти преобразования для изотропного вектора массы $m = \mu_2 q_0^+ = \mu_2 (e_1 + e_2)$:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_2, \\ \mu'_1 &= \mu_2 \cdot \text{ch } \varphi + \mu_2 \cdot \text{sh } \varphi = \mu_2 \left(\frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{e} + \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} \right) = \mu_2 e^\varphi, \\ \mu'_2 &= \mu_2 \cdot \text{sh } \varphi + \mu_2 \cdot \text{ch } \varphi = \mu_2 e^\varphi, \\ \mu_1 &= \mu'_2. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Геометрическое и физическое истолкование преобразования (3.71) представлено на рис. 26. Здесь PF' — мировая

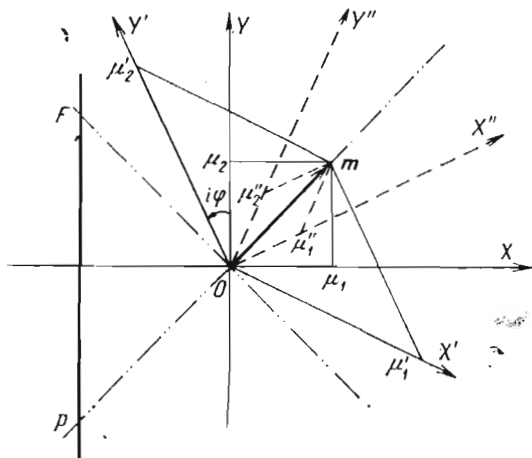


Рис. 26

прямая источника фотонов, например звезды. Изотропный вектор $m = \mu_2 (e_1 + e_2)$ изображен приложенным в точке O , так как нас интересует действие его именно на эту мировую точку. Показаны три характерные возмож-

пости восприятия изотропного вектора массы m наблюдателем в мировой точке O . Если мировая прямая наблюдателя имеет направление OY , параллельное мировой прямой PF звезды, то координаты вектора m по осям OY и OX равны соответственно μ_2 и μ_1 ($\mu_2 = \mu_1$). В этом случае звезда воспринимается в виде материальной точки, неподвижной в инерциальной координатной системе OX одномерного пространства. Если мировая прямая наблюдателя имеет направление OY' , отклоненное на угол $i\varphi$ в положительную сторону отсчета углов ($\varphi > 0$), то наблюдатель движется навстречу звезде (звезда — навстречу наблюдателю). В этом случае координаты изотропного вектора m по осям OY' и OX' равны μ'_1 и μ'_2 , причем, согласно формуле (3.71),

$$\mu'_2 = \mu_2 e^{\varphi} > \mu_2 \quad (\varphi > 0).$$

Наконец, если мировая прямая наблюдателя имеет направление OY'' , отклоненное от OY на угол $i\varphi$ в отрицательную сторону ($\varphi < 0$), то наблюдатель удаляется от звезды (звезда — от наблюдателя) и вектор m имеет по осям OY'' и OX'' координаты $\mu''_2 = \mu''_1$, которые, согласно (3.71), меньше координат μ_2 и μ_1 :

$$\mu''_2 = \mu_2 e^{\varphi} < \mu_2 \quad (\varphi < 0).$$

Согласно формулам (3.66) и (3.67) энергия $\mu_2 c^2$ электромагнитного кванта однозначно характеризуется частотой ν , ибо константы c и h не зависят от выбора координатной системы. Поэтому из (3.67) следует

$$\mu'_2 = \frac{h}{c^2} \nu'$$

и преобразование (3.71) может быть представлено в виде

$$\nu' = \nu e^{\varphi}. \quad (3.72)$$

Выразим зависимость (3.72) через скорость v относительного движения инерциальных систем координат. Для этого воспользуемся соотношениями (2.52) и (3.7):

$$\text{th } \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}, \quad \text{th } \varphi = -\frac{v}{c}.$$

Выполним преобразования:

$$e^\varphi \cdot \operatorname{th} \varphi + e^{-\varphi} \cdot \operatorname{th} \varphi = e^\varphi - e^{-\varphi} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{-\varphi}(1 + \operatorname{th} \varphi) = e^\varphi(1 - \operatorname{th} \varphi), \\ \frac{1 + \operatorname{th} \varphi}{1 - \operatorname{th} \varphi} = e^{2\varphi}, \quad e^\varphi = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{th} \varphi}{1 - \operatorname{th} \varphi}} = \sqrt{\frac{1 - (v/c)}{1 + (v/c)}}.$$

Подставляя последнее выражение в (3.72), получаем

$$v' = ve^\varphi = v \sqrt{\frac{1 - (v/c)}{1 + (v/c)}}. \quad (3.73)$$

Это точное выражение эффекта Доплера, который широко используется в астрофизических исследованиях. Благодаря тому, что определенные сорта атомов способны излучать серии фотонов, характеризующихся строго определенными соотношениями энергий (линейными соотношениями), атомы можно узнавать по их спектрам. Спектры атомов изучают в лабораторных условиях, т. е. при неподвижном источнике, а затем по наблюдаемой частоте v' некоторой известной спектральной линии вычисляют скорость v источника фотонов относительно наблюдателя с помощью формулы (3.73).

§ 20. Одновременность относительная и абсолютная

Понятие одновременности не допускало различных толкований в классической физике: если отсчет времени не зависит от выбора пространственной системы координат (см. (3.3)), то события, совершающиеся в один и тот же момент времени в какой-либо координатной системе, являются одновременными и во всякой другой системе. Одновременность таким образом выступала в качестве абсолютной характеристики событий, не зависящей от выбора системы координат.

В теории относительности понятие одновременности перестает быть однозначным, и модель мира Минковского дает этому простое объяснение. Инерциальным системам координат OX и $O'X'$ в одномерном чувственно воспринимаемом пространстве, движущимся относительно друг друга, соответствуют в псевдоевклидовой плоскости мирового пространства ортонормированные системы координат OXY и $O'X'Y'$ с различными направлениями осей OY и $O'Y'$. Удобно рассматривать системы, имеющие общее начало координат O . В каждой ортонормированной системе координат на псевдоевклидовой плоскости линия

одновременности (прямая, на которой все точки имеют одинаковое значение ординаты $y = ct$) перпендикулярна к оси ординат. На рис. 27 изображены три такие системы: OXY , $OX'Y'$, $OX''Y''$. На осях ординат этих систем выберем три точки A, B, C , имеющие одно и то же значение ординаты $y = y_A$ в системе OXY , т. е. одновременные в нештрихованной координатной системе. Эти же точки

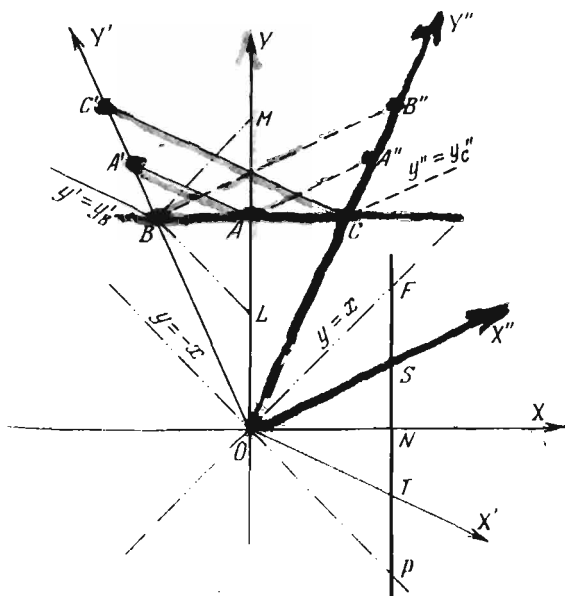


Рис. 27

имеют уже не одинаковые, а различные значения ординаты в штрихованной координатной системе $OX'Y'$. Проведем через точки A, B, C линии одновременности системы $OX'Y'$: $y' = y'_B$, AA' , CC' . Пересечения их с осью OY' указывают значения ординаты y' событий A, B, C в штрихованной координатной системе и последовательность событий во времени с точки зрения этой системы: $B \rightarrow A \rightarrow C$. В дважды штрихованной системе координат $OX''Y''$ линии одновременности $y'' = y''_C$, AA'' , BB'' показывают, что события A, B, C сменяют друг друга в иной последовательности, а именно: $C \rightarrow A \rightarrow B$.

Для наблюдателя, связанного с мировой прямой OY' , цепочка событий $B \rightarrow A \rightarrow C$ обозначает переход от прош-

лого к будущему (возрастание ординаты y'), а для наблюдателя, связанного с мировой прямой OY'' , та же последовательность событий $B \rightarrow A \rightarrow C$ обозначает переход от будущего к прошлому (убывание ординаты y''). Нельзя пройти мимо этого явления, но следует тут же оговориться, что оно не столь парадоксально, как кажется на первый взгляд. И нет достаточных оснований для того вывода, что изменение системы координат способно обратить ход времени вспять.

Теория относительности не отрицает *абсолютного различия* между прошлым и будущим, а напротив, формулирует четкие условия возможности такого различения, которые просто и наглядно интерпретируются в модели мира Минковского. Для того чтобы две мировые точки A и B могли быть одновременными в какой-либо ортонормированной системе координат OXY псевдоевклидовой плоскости, они должны лежать на перпендикуляре к оси ординат этой системы. И поскольку ось OY принадлежит мнимым секторам, прямая, соединяющая точки A и B , должна принадлежать вещественным секторам. Любая ось OY может быть повернута как в положительную, так и в отрицательную сторону, поскольку угол между любым неизотропным вектором верхнего сектора и каждой изотропной прямой, ограничивающей сектор, бесконечно велик. Поэтому всегда найдутся такие координатные системы $OX'Y'$ и $OX''Y''$, у которых оси OY' и OY'' расположены по разные стороны от оси OY . Если вектор \overline{AB} имеет отрицательную проекцию на ось OY' (как на рис. 27), то мировая точка B является более ранней в системе $OX'Y'$, чем точка A . При этом проекция вектора \overline{AB} на ось OY'' , отклоненную в другую сторону от OY , окажется положительной, и мировая точка B будет более поздней в системе $OX''Y''$, чем точка A . Зависимость порядка следования событий от выбора координатной системы возможна лишь для таких мировых точек A и B , расстояние между которыми выражается вещественным числом (вектор \overline{AB} принадлежит вещественному сектору).

Если же мировые точки P и F таковы, что расстояние между ними выражается мнимым числом (вектор \overline{PF} принадлежит мнимому сектору) или равно нулю (точки лежат на одной изотропной прямой), то вектор \overline{PF} не может быть перпендикулярным к какой-либо прямой мнимого сектора. Следовательно, не существует такой системы координат OXY , в которой мировые точки P и F мог-

ли бы быть одновременными. Пусть в какой-нибудь координатной системе точка P является более ранней, чем точка F (вектор \overline{PF} принадлежит *верхнему* сектору или одной из ограничивающих его изотропных прямых). Тогда проекция вектора \overline{PF} на *любое* неизотропное направление верхнего сектора будет положительной и, значит, в любой координатной системе событие F будет более поздним, чем событие P . Другими словами, для мировых точек P и F , определяющих вектор мнимого сектора или изотропный вектор, инверсия времени (обращение вспять последовательности событий) невозможна ни при каком изменении системы координат, так что событие F является *абсолютно* будущим по отношению к событию P .

На рис. 27 все точки верхнего сектора, исходящего из точки O , включая ограничивающие его изотропные прямые $y = x$ и $y = -x$, находятся в области абсолютного будущего по отношению к точке O , а все точки нижнего сектора вместе с ограничивающими его изотропными прямыми — в области абсолютного прошлого. Из каждой точки псевдоевклидовой плоскости исходят два сектора: сектор абсолютного прошлого и сектор абсолютного будущего. Как отмечено в § 19 (между формулами (3.28) и (3.29)), вектор, касательный к любой мировой линии в любой ее точке и направленный в сторону роста мировой линии, принадлежит верхнему сектору. Поэтому какую бы точку на мировой линии мы ни выбрали, вся мировая линия не выйдет за пределы мнимых секторов, имеющих вершину в выбранной точке. А это значит, что *на любой мировой линии различие между прошедшим и будущим не может зависеть от выбора координатной системы и в этом смысле абсолютно*. Для точек любой изотропной прямой различие между прошедшим и будущим тоже абсолютно.

Если в мире Минковского совершается процесс проявления, то существуют два типа отношений одновременности и разновременности, основанные на двух разных критериях. Согласно одному критерию порядок следования событий во времени определяется проекциями соответствующих мировых точек на ось ординат. Этот критерий можно назвать координатно-геометрическим. Им мы и пользовались до сих пор. Согласно другому критерию порядок следования событий во времени определяется очередностью проявления соответствующих мировых то-

чек. Оба критерия приводят к одинаковому результату, когда речь идет о мировых точках одной и той же мировой линии. Вывод об инвариантности различия между прошедшим и будущим на одной мировой линии, полученный на основе координатно-геометрического критерия, прекрасно согласуется с понятием мирового проявляющего процесса. Если прошлые участки мировой линии представляют уже сформировавшийся, проявленный материальный объект, а в будущем такого объекта нет, поскольку процесс проявления туда еще не дошел, то это физическое различие между прошлым и будущим тоже не зависит от выбора координатной системы.

Согласие обоих критериев может нарушиться, когда речь идет о точках, не лежащих на одной мировой линии. На рис. 27 точки P и F лежат на изотропных прямых $y = -x$ и $y = x$, пересекающихся в точке O . Поэтому точка P и все точки, расположенные ниже нее на прямой PF , являются абсолютно прошлыми по отношению к точке O . Точка F и все точки, расположенные выше нее на прямой PF , являются абсолютно будущими по отношению к точке O . Но любая *внутренняя* точка отрезка PF удалена от мировой точки O на расстояние, выражаемое вещественным числом. Поэтому для каждой внутренней точки отрезка PF найдется такая система координат, в которой эта точка одновременна точке O , и найдутся такие системы координат, в которых эта точка является либо более ранней, либо более поздней, чем точка O . Например, в координатной системе OXY мировой точке O одновременна точка N на прямой PF . В координатной системе $OX'Y'$ точке O одновременна точка T на прямой PF , а точка N является будущей. В координатной системе $OX''Y''$ точке O одновременна точка S на прямой PF , а точка N является прошлой. Это знакомая нам относительность одновременности, базпругающаяся на координатно-геометрическом критерии. Другой же критерий, основанный на представлении о проявляющем процессе, не допускает такой многозначности временных отношений. По этому критерию независимо от выбора координатной системы возможно лишь одно из трех отношений: 1) мировая точка N проявляется вместе с точкой O ; 2) точка N проявлена прежде точки O ; 3) точка N проявится после точки O .

Каждый наблюдатель, несомненно, ощущает реальность границы между своим проявленным прошлым и непроявленным будущим. В любое мгновение своей жизни

он переживает акт проявления и справедливо убежден, что в таком же положении находятся все другие наблюдатели и неодушевленные предметы. Какая же точка мировой линии PF проходит акт проявления вместе с точкой O ? Здесь мы заменяем словом «вместе» слово «одновременно», поскольку стало уже привычным понимать одновременность в смысле координатного критерия. Если есть такие состояния мира, в которых существуют (проявлены) обе мировые точки O и N , и есть такие состояния мира, в которых не существует ни одна из них, но нет таких состояний, в которых одна из этих точек существовала бы, а другая не существовала, то мы скажем, что точки O и N проходят акт проявления *вместе*. Точки, проявляющиеся вместе, заслуживают названия *абсолютно одновременных*.

Координатно-геометрический критерий не допускает абсолютной одновременности. Поскольку все инерциальные системы координат в чувственно воспринимаемом пространстве равноправны и равноправны соответствующие им ортонормированные системы координат в псевдоевклидовом мировом пространстве, суждение об одновременности и разновременности мировых точек с позиций одной координатной системы столь же справедливо, как суждение с позиций любой другой системы, хотя бы эти суждения и противоречили друг другу. Раз не существует привилегированной (абсолютной) системы координат, то не может быть и абсолютной одновременности.

Но мы основываем понятие абсолютной одновременности не на координатно-геометрическом критерии и потому не вступаем в логическое противоречие с ним. Больше того, это понятие не вступает в противоречие и с экспериментальными основаниями теории относительности, поскольку экспериментирование с механическими и электромагнитными явлениями не позволяет обнаружить абсолютную одновременность. Предположим, что состояние наблюдателя, связанного с мировой прямой OY на рис. 27, изображается мировой точкой A . Наблюдатель знает, что он находится на границе между проявленным и непроявленным и переживает в свой настоящий момент времени акт проявления. Но восприятию наблюдателя в этот момент недоступна мировая точка B на прямой OY' , и потому он не может знать, проявляется ли она вместе с A , была ли проявлена раньше или будет проявлена позже. Мировая точка B окажется доступной восприятию наблюдателя, когда он будет перенесен ходом проявляющего

процесса вдоль своей прямой в точку M , лежащую па одной изотропной прямой с точкой B . Но это уже не поможет решению интересующего его вопроса. Факт наблюдаемости точки B из точки M будет говорить лишь о том, что точка B проявлена раньше точки M , и ничего не скажет о соотношении моментов проявления точек B и A .

Между тем вполне возможны физические эксперименты, позволяющие наблюдателю, связанному с мировой прямой OY , измерить координаты точки B в его координатной системе OXY . Предположим, что в мировой точке O , где встречаются мировые прямые OY и OY' , наблюдатель из OY произвел установку некоторого отражающего устройства на материальной точке, соответствующей мировой прямой OY' . В последующие моменты времени наблюдатель организует излучение фотонов из мировых точек своей прямой OY таким образом, чтобы в каждом фотоне (серии фотонов) содержалась информация о том, в какой момент времени по часам наблюдателя произошло излучение. Спустя некоторое время наблюдатель на прямой OY начнет принимать отражения своих сигналов с прямой OY' и отмечать моменты приема сигналов. Располагая такими экспериментальными данными, наблюдатель будет рассуждать следующим образом. Если в его мировой точке M принято отражение сигнала, который был испущен t секунд тому назад, то это значит, что сигнал был послан из мировой точки L , отделенной от точки M отрезком длиной $|\overline{LM}| = ict$. Отсюда можно найти ординату точки L :

$$|\overline{LM}| = i(y_M - y_L) = ict, \quad y_M - y_L = ct, \quad y_L = y_M - ct.$$

За время t световой сигнал прошел вдоль оси OX туда и назад расстояние

$$x_B = c \cdot \frac{t}{2},$$

определяющее абсциссу мировой точки B , отразившей сигнал. Ордината точки B равна

$$y_B = y_M - \frac{ct}{2}.$$

На мировой прямой OY такую же ординату имеет точка A :

$$y_A = y_M - \frac{y_M - y_L}{2} = y_M - \frac{ct}{2}.$$

Отсюда наблюдатель делает справедливое заключение, что в его координатной системе мировая точка B одновре-

менна точке *A*. Однако, как показано выше, это ничего не говорит о том, проявлена ли точка *B* раньше, позже или одновременно с точкой *A*.

Может возникнуть вопрос: а стоит ли вообще говорить об абсолютной одновременности, если она экспериментально не обнаруживается? Не следует ли отбросить это понятие как излишнее и признать, что никакой иной одновременности, кроме относительной, в природе нет? В действительности такая точка зрения не столь безупречна, как кажется с первого взгляда. Уже выяснена несостоятельность того представления, что прошлое и будущее в равной мере не существуют, а существует лишь настоящее. Его придерживалась классическая физика, но оно *противоречит относительности одновременности*. Признание же прошлого и будущего существующими наряду с настоящим было бы еще худшей крайностью.

События, совершающиеся в настоящий момент времени, не вносят изменений в прошлое, не влияют на уже реализованные состояния мира, но будущие события формируются под влиянием прошлых и настоящих. Конечно, в известном смысле можно сказать, что будущее влияет на настоящее, поскольку, стремясь реализовать свои планы на будущее, мы подчиняем им свои действия в настоящем. Но, апеллируя к умственным способностям и творческим возможностям человека, мы выходим за рамки того круга явлений, в котором определяющую роль играют законы механики и электродинамики. Да и сам факт, что человек или иное живое существо может посредством целенаправленной деятельности (хотя бы и неосознанной) повлиять на ход будущих событий, направить их в то или иное русло, свидетельствует о том, что будущие события еще не реализованы, не проявлены, не существуют. Если бы будущие мировые точки были проявлены, как и прошлые, то жесткая предопределенность управляла бы развитием событий и наше участие в жизни ограничивалось бы только пассивным просмотром существующих состояний мира в определенной последовательности. Лишилась бы почвы и смысла творческая активность, люди не имели бы возможности даже в малейшей степени быть творцами своего будущего.

Реальность различия между прошедшим и будущим служит необходимой предпосылкой определенной направленности процесса течения времени. Термодинамика характеризует положительное направление времени как такое спонтанное развертывание событий, при котором

возрастает энтропия. Вот пара наглядных примеров процессов, протекающих с возрастанием энтропии. Перед началом бильярдной партии шары собраны в правильный треугольник, а после первого удара они беспорядочно рассеиваются по столу. Обратный ход времени применительно к этой ситуации выразился бы в том, что разбросанные шары должны собраться в исходный треугольник, что означало бы уменьшение энтропии системы. Другой пример. Вещество горячей сигареты рассеивается пеплом и рассеивается в окружающем воздухе в виде частиц дыма и газообразных продуктов горения (возрастание энтропии). Обратный ход времени выразился бы в обратной последовательности событий: не только рассеянные частицы собираются в целую сигарету, но и химические реакции протекают в обратном направлении, синтезируя из продуктов окисления крошки табака и вещество бумаги (уменьшение энтропии).

Признать, что прошлое физически отличается от будущего как существующее от несуществующего, — значит признать реальность перехода от непроявленного к проявленному, т. е. реальность проявляющего процесса. Принимая его для каждой мировой линии в отдельности, мы вынуждены ставить и решать вопрос о связи между процессами проявления различных мировых линий. Вряд ли возможно представить течение времени в мире так, будто проявление каждой мировой линии совершается в полной изолированности, вне всякой связи с другими мировыми линиями. Естественнее полагать, что процесс проявления характеризуется определенными пространственными формами в псевдоевклидовом мире Минковского, что совокупность точек, отделяющих на каждой мировой линии проявленную часть от непроявленной, обрисовывает определенную границу между проявленной и непроявленной областями мирового пространства. Назовем эту границу *проявляющим фронтом*. Каждое фиксированное положение проявляющего фронта включает в себя мировые точки, которые вместе переходят от несуществования к существованию, т. е. являются *абсолютно одновременными*. Поскольку в науке не рассматривался проявляющий процесс в мире Минковского, не возникала мысль и о проявляющем фронте. Но понятие проявляющего фронта с логической необходимостью сопутствует представлению о проявляющем процессе, без него это представление не может обрести достаточной четкости.

До сих пор мы рассуждали только о процессе проявления *мировых линий*, молчаливо допуская, что в промежутках между ними нет материальных объектов и проявляться нечему. Однако, как показано в § 19, вектор массы может характеризовать не только мировую линию, но и изотропную. Конечно, вектор массы характеризует не саму «пустую» линию как геометрический объект, а физический процесс, связанный с линией. Изотропные прямые проходят через каждую точку псевдоевклидовой плоскости, но, возможно, не каждая изотропная служит проводником электромагнитного воздействия. И, по-видимому, подобно тому как имеются проявленные и непроявленные части мировых линий, должны существовать проявленные и непроявленные части изотропных линий. Вспомним, что изотропным свойственна двоякая мера длины (см. § 11 после формул (2.25)). В метрическом отношении длина любого отрезка изотропной равна нулю, и может показаться лишенным смысла представление о процессе, совершающемся на пути нулевой длины. Однако в линейном отношении отрезки одной и той же изотропной различаются своими длинами, что позволяет говорить о распространении процесса вдоль изотропной. Та точка изотропной, до которой дошел процесс проявления, приобретает физическое свойство, характеризующее изотропным вектором массы, благодаря чему в этой точке может быть осуществлена передача энергии и импульса от изотропной к мировой линии, если таковая встретится. В тех же точках, до которых процесс проявления еще не дошел, во-первых, нечего передавать, во-вторых, нечему передавать, поскольку там нет и проявленных точек мировой линии. Изотропные линии в качестве проявляемых объектов заполняют пространство между мировыми линиями, и благодаря этому можно (на макроскопическом уровне) представлять проявляющий фронт в псевдоевклидовой плоскости не в виде множества изолированных точек на мировых линиях, а в виде некоторой сплошной линии, прямой или кривой.

Хотя доступные нам эксперименты не позволяют определить направление проявляющего фронта, можно высказать некоторые теоретические соображения на этот счет. Линия, представляющая проявляющий фронт в псевдоевклидовой плоскости, должна пересекать все без исключения мировые линии, находящиеся в этой плоскости. Таким свойством обладает всякая прямая, принадлежащая вещественным секторам. Им обладает и кривая

липия, у которой касательная в любой точке принадлежит вещественным секторам, или, иначе говоря, положительная нормаль к кривой в любой ее точке принадлежит верхнему сектору. Прямолинейный фронт будет характеризоваться единственным направлением проявляющего движения, перпендикулярным к фронту. Криволинейному фронту отвечает множество перпендикулярных к нему направлений, по которым распространяется проявляющий процесс.

Такое представление о проявляющем фронте не противоречит координатно-геометрическим различиям между абсолютно прошедшим и абсолютно будущим. Для наблюдателя, состояние которого изображается на рис. 27 мировой точкой O , абсолютно будущими являются не только точки его собственной мировой линии, но и точки других мировых линий, находящиеся в верхнем секторе. Например, точка F и все более поздние точки на прямой PF являются абсолютно будущими по отношению к точке O . Но именно такие точки и не могут быть проявлены в тот момент, когда проявляющий фронт проходит через точку O , ибо он не выходит за пределы вещественного сектора. Вместе с тем в этот момент неизбежно оказываются уже проявленными все точки нижнего сектора, исходящего из точки O , в частности точка P и все более ранние точки на прямой PF . При любом допустимом расположении проявляющего фронта, проходящего через точку O , фронт необходимо пересечет отрезок PF в одной из его внутренних точек, которая и будет *абсолютно одновременной* точке O . Выше показано, что для любой внутренней точки отрезка PF найдется ортонормированная система координат, в которой эта точка одновременна точке O . Таким образом, абсолютная одновременность неизбежно примет форму относительной одновременности в какой-нибудь координатной системе, хотя мы и не можем узнать, в какой именно.

Все релятивистские эффекты, в том числе и относительность одновременности, обусловлены наклоном мировых линий друг к другу. Наш обыденный опыт и опыт классической механики ограничен мировыми линиями, имеющими близкие направления («почти параллельными»). В таких условиях проявляющий процесс воспринимается с акцентом на абсолютном характере течения времени, и этим объясняется, почему сначала наука считала одновременность инвариантной. Классическое представление о существовании абсолютной одновременности

правильно отражало фундаментальное свойство мира, и страдало узостью, поскольку не учитывало богатого разнообразия форм абсолютного процесса проявления. Для теории относительности, столкнувшейся с таким разнообразием, была бы грехом односторонности противоположная крайность — отрицание абсолютной одновременности.

Не имея возможности экспериментально определить направление фронта (абсолютно одновременные точки) мы не знаем и направления нормали к нему. Практическому измерению доступны только длины проявленных участков отдельных мировых линий. Хотя не наложено никаких ограничений на численную величину угла между нормальными, направления их ограничены изотропными прямыми, так что всякая положительная нормаль к проявляющему фронту в псевдоевклидовой плоскости принадлежит одному и тому же мнимому сектору (который мы изображаем на рисунках в виде верхнего сектора). Только в этом смысле мы и можем говорить об определенности положительного направления проявляющего процесса.

Если есть какой-либо реальный физический смысл в представлении об обратном направлении течения времени, то это должно быть не что иное, как возвращение проявляющего процесса вспять по всем мировым линиям. Тогда надо представлять мир пульсирующим. Прямое движение проявляющего фронта, в результате которого вырастает космическое «дерево» мировых линий, дойдя до некоторого предела, сменится возвратным движением. Эта отрицательная фаза мирового цикла должна быть фазой «свертывания» проявленного мира. Проявляющий фронт превратится в «стирающий» фронт, который пойдет назад, оставляя за собой (там, где в положительной фазе цикла находилась непроявленная область будущего) наступающую область непроявленности. Все процессы, протекавшие в прямом цикле с возрастанием энтропии, потекут в обратном направлении с уменьшением энтропии. Для того чтобы из рассеявшихся газов, дыма и пепла сгоревшей сигареты могла восстановиться целая сигарета, процесс ее «сборки» должен быть целенаправленным и управляемым информацией о структуре и путях рассеяния исходного объекта. Но вся эта информация естественным образом заключена в проявленных мировых линиях, а целенаправленность обеспечивается тем, что процесс «стирания» идет по проложенным ранее путям и не может привести ни к чему иному, как к тем пунктам, которые были исходными в процессе проявления.

Глава 4

ТРЕХМЕРНОЕ ПСЕВДОВЕКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

§ 21. Строение трехмерного псевдоевклидова пространства

До сих пор мы рассматривали мир Минковского в плоском сечении, что позволило упростить математический аппарат и представить в наиболее наглядной форме геометрическую интерпретацию эффектов специальной теории относительности. Однако, такое упрощение обедняло картину мира. Чтобы понять, почему мировое пространство кажется нам трехмерным и собственно евклидовым, необходимо перейти к четырехмерной модели мира Минковского, но прежде рассмотрим в качестве промежуточной ступени трехмерное псевдоевклидово пространство.

Трехмерное псевдоевклидово пространство является разновидностью трехмерного линейного пространства. Вспомним, что линейное пространство обладает метрическими свойствами, если в нем определена операция скалярного умножения его элементов (см. § 6). Метрические свойства пространства могут быть исчерпывающе характеризованы метрическими отношениями между векторами базиса. Для того чтобы метрические свойства линейного пространства были псевдоевклидовыми, в базисе пространства должны быть как векторы вещественной длины, так и векторы мнимой длины. Для трехмерного пространства это условие может быть выполнено двумя способами:

- 1) два базисных вектора имеют вещественную длину, а третий — мнимую;
- 2) один базисный вектор имеет вещественную длину, а два — мнимую.

По существу оба варианта дают одинаковый тип метрических отношений. Достаточно во втором варианте

умножить длины всех базисных векторов на мнимую единицу, чтобы свести его к первому варианту. По той же причине пространство, в котором все три базисных вектора имеют мнимую длину, обладает метрическими свойствами собственно евклидова пространства.

Итак, на основе трехмерного линейного пространства может быть построен по существу только один тип псевдоевклидова пространства. Мы будем описывать его с помощью ортонормированного базиса, характеризующегося следующей таблицей скалярных произведений:

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \overline{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Таблица (4.1) означает, что векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 являются вещественно-единичными:

$$|\mathbf{e}_1| = \sqrt{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} = \sqrt{1} = 1, \quad |\mathbf{e}_2| = \sqrt{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle} = \sqrt{1} = 1,$$

а вектор \mathbf{e}_3 — мнимоединичным:

$$|\mathbf{e}_3| = \sqrt{\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle} = \sqrt{-1} = i$$

и любые два вектора базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ взаимно перпендикулярны.

Ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в сочетании с фиксированной точкой O (полюсом) образует трехмерную ортонормированную систему координат $OXYZ$ (рис. 28). Координатная плоскость OXY имеет базис, состоящий только из векторов вещественной длины \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , и несет на себе собственно евклидову метрику. В координатных плоскостях OZX и OYZ один из базисных векторов (\mathbf{e}_3) имеет длину, выражаемую мнимым числом, и эти плоскости несут на себе псевдоевклидову метрику.

Запишем разложения произвольных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} трехмерного псевдоевклидова пространства по ортонормированному базису:

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3$$

и вычислим скалярное произведение $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ с учетом таблицы (4.1):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \alpha_1 \beta_1 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + \alpha_1 \beta_2 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle + \alpha_1 \beta_3 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle + \\ &+ \alpha_2 \beta_1 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle + \alpha_2 \beta_2 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle + \alpha_2 \beta_3 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle + \\ &+ \alpha_3 \beta_1 \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle + \alpha_3 \beta_2 \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle + \alpha_3 \beta_3 \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle = \\ &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 - \alpha_3 \beta_3. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Применяя формулу (4.3) к скалярному произведению вектора на самого себя, найдем длину (модуль) вектора

$$|\mathbf{a}'| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2}. \quad (4.4)$$

Координаты радиус-вектора \mathbf{r} в ортонормированной системе координат $OXYZ$ будем обозначать буквами x , y , z и называть их координатами точки M , указываемой радиус-вектором:

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = xe_1 + ye_2 + ze_3. \quad (4.5)$$

Длина радиус-вектора, согласно (4.4), равна

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}. \quad (4.6)$$

Она обращается в нуль, если координаты удовлетворяют условию

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = z^2. \quad (4.7)$$

Соотношение (4.7) определяет в трехмерном псевдоевклидовом пространстве геометрическое место точек, радиус-векторы которых являются *изотропными*. Это геометрическое место точек представляет собой уже не две прямые, как в псевдоевклидовой плоскости, а поверхность. Такой поверхности нет в собственно евклидовом трехмерном пространстве.

Для того чтобы придать хотя бы условную наглядность описанию метрических свойств трехмерного псевдоевклидова пространства, мы будем отображать его на трехмерное собственно евклидово пространство, пользуясь совпадением линейных свойств этих пространств.

Если каждой точке с координатами x , y , z в псевдоевклидовом пространстве мы поставим в соответствие точку с такими же координатами в пространстве собственно евклидовом, то получим взаимно однозначное отображение одного пространства на другое с сохранением линейных свойств. Именно такое отобра-

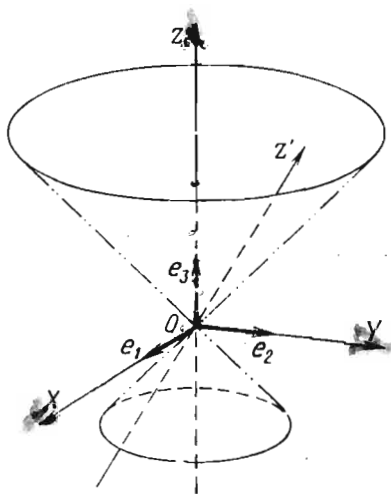


Рис. 28

жение представлено на рис. 28. Метрические свойства псевдоевклидова пространства могут быть переданы в этом отображении лишь условно. Уравнению (4.7), определяющему множество изотропных радиус-векторов в псевдоевклидовом пространстве, соответствует в собственно евклидовом пространстве, отнесенном к ортонормированной системе координат, поверхность прямого кругового конуса с осью OZ . Поэтому и саму отображаемую поверхность (4.7) в псевдоевклидовом пространстве называют конусом, а именно *изотропным конусом*.

Внутренняя область изотропного конуса (4.7), т. е. область, содержащая ось OZ , описывается неравенством

$$x^2 + y^2 - z^2 < 0, \text{ или } x^2 + y^2 < z^2. \quad (4.8)$$

Длина любого радиус-вектора, принадлежащего внутренней области изотропного конуса, выражается мнимым числом. Внутренняя область состоит из двух полостей. Ту полость, точки которой имеют положительную аппликату ($z > 0$), мы будем называть верхней полостью.

Внешняя область изотропного конуса (4.7) описывается неравенством

$$x^2 + y^2 - z^2 > 0, \text{ или } x^2 + y^2 > z^2. \quad (4.9)$$

Длина любого радиус-вектора, принадлежащего внешней области изотропного конуса, выражается вещественным числом.

Соотношения (4.7), (4.8), (4.9) служат классифицирующими признаками, по которым любые векторы трехмерного псевдоевклидова пространства относятся к одному из трех типов. Если вектор

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3,$$

где бы ни находилась точка его начала, коллинеарен некоторому изотропному радиус-вектору \mathbf{r}_0 ($\mathbf{a} = \lambda \mathbf{r}_0$), то координаты вектора \mathbf{a} удовлетворяют соотношению типа (4.7):

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 &= (\lambda x_0)^2 + (\lambda y_0)^2 - (\lambda z_0)^2 = \\ &= \lambda^2 (x_0^2 + y_0^2 - z_0^2) = \lambda^2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

и вектор \mathbf{a} является изотропным. Аналогично, о всяком векторе, коллинеарном какому-нибудь радиус-вектору внутренней области изотропного конуса (4.7), мы будем говорить, что он принадлежит внутренней области (модуль такого вектора выражается мнимым числом). Всякий вектор, модуль которого выражается вещественным

числом, мы будем называть принадлежащим внешней области изотропного конуса.

В трехмерном псевдоевклидовом пространстве, как и в пространстве собственно евклидовом, плоскость однозначно определяется нормалью к ней и точкой, принадлежащей плоскости. Рассмотрим множество всех радиус-векторов $\mathbf{r} = \overline{OM}$, перпендикулярных к вектору \mathbf{a} . Оно описывается уравнением

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle = 0, \quad (4.10)$$

которое в координатной форме, согласно (4.3), принимает вид

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y - \alpha_3 z = 0. \quad (4.11)$$

В собственно евклидовом трехмерном пространстве уравнению (4.11) соответствует плоскость, проходящая через начало координат. Но принадлежность множества точек к одной плоскости является линейным свойством пространства, а линейные свойства у собственно евклидова и псевдоевклидова пространств одинаковы. Значит, точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (4.11), лежат в одной плоскости и в псевдоевклидовом пространстве. Это и есть плоскость, проходящая через начало координат перпендикулярно к вектору \mathbf{a} .

Если вектор \mathbf{a} принадлежит внутренней области изотропного конуса, т. е. для его координат выполняется условие

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 < 0, \quad \text{или} \quad \alpha_3^2 > \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \geq 0, \quad (4.12)$$

то все перпендикулярные к \mathbf{a} радиус-векторы имеют длины, выражаемые вещественными числами, как нетрудно убедиться. Представим уравнение (4.11) в виде

$$z = \frac{\alpha_1 x + \alpha_2 y}{\alpha_3} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} x + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} y. \quad (4.13)$$

Это можно сделать, так как $\alpha_3 \neq 0$ (см. (4.12)). Подставив выражение (4.13) в (4.6), найдем длину радиус-вектора \mathbf{r} произвольной точки плоскости (4.11):

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}|^2 &= x^2 + y^2 - z^2 = x^2 + y^2 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3} x + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} y \right)^2 = \\ &= x^2 \left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2} \right) + y^2 \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} \right) - 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3^2} xy. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Условие (4.12), наложенное на вектор \mathbf{a} , можно переписать в виде

$$1 > \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2}$$

и получить из него равносильные неравенства

$$1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2} > \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2}, \quad 1 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} > \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2}.$$

Внося эти неравенства в (4.14), найдем

$$|\mathbf{r}|^2 > x^2 \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} + y^2 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2} - 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3^2} xy = \left(x \frac{\alpha_2}{\alpha_3} - y \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right)^2.$$

Поскольку выражение в скобках представляет вещественное число, квадрат его не может быть отрицательным числом. Следовательно,

$$|\mathbf{r}|^2 > 0.$$

Это означает, во-первых, что среди радиус-векторов \mathbf{r} , принадлежащих плоскости (4.10), нет таких, длина которых выражалась бы мнимым числом. Во-вторых, среди них нет таких *ненулевых* векторов, длина которых равнялась бы нулю, т. е. нет изотропных векторов. Таким образом, все ненулевые радиус-векторы точек плоскости (4.10) принадлежат внешней области изотропного конуса. Точка начала координат имеет нулевой радиус-вектор и принадлежит изотропному конусу. Поэтому она оказалась исключенной из множества точек, удовлетворяющих неравенству $|\mathbf{r}|^2 > 0$. Однако начало координат принадлежит плоскости (4.10), так как радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{o}$ удовлетворяет уравнению этой плоскости. Итак, мы доказали, что для любого вектора \mathbf{a} , принадлежащего внутренней области изотропного конуса, найдется перпендикулярная к нему плоскость, в которой нет ни векторов мнимой длины, ни изотропных векторов, а есть только векторы вещественной длины. Такая плоскость несет на себе собственно евклидову метрику.

Можно доказать, что плоскость несет на себе псевдо-евклидову метрику, если нормаль к плоскости принадлежит внешней области изотропного конуса.

Плоскость, нормаль к которой является изотропным вектором, содержит в себе эту нормаль (изотропный век-

тор перпендикулярен сам себе) и оказывается касательной к изотропному конусу. Такую плоскость называют *изотропной*. Метрические свойства изотропной плоскости очень своеобразны, они отличаются как от собственно евклидовых, так и от псевдоевклидовых. Описание их дано в Приложении (см. с. 216—222).

Ортонормированная система координат в трехмерном псевдоевклидовом пространстве может быть выбрана с большой степенью произвола. Если иметь в виду физические приложения, следует выбирать мнимое единичный орт e'_3 так, чтобы он принадлежал верхней внутренней полости изотропного конуса. В собственно евклидовой плоскости, перпендикулярной к орту e'_3 , можно выбрать произвольно два взаимно перпендикулярных орта e'_1 и e'_2 .

Так как длина каждого вектора трехмерного псевдоевклидова пространства — величина инвариантная, то свойство определенных ненулевых векторов иметь длину, равную нулю, не зависит от выбора системы координат. Значит, всякий вектор, являющийся изотропным в одной координатной системе, остается изотропным и в любой другой координатной системе. Поэтому изотропный конус является инвариантной конструкцией в трехмерном псевдоевклидовом пространстве. Он обладает замечательным свойством: плоскость, перпендикулярная к любой прямой, принадлежащей внутренней области изотропного конуса, пересекается с этим конусом по обычной собственно евклидовой окружности. Рассмотрим две ортонормированные координатные системы $OXYZ$ и $OX'Y'Z'$ с общим началом в точке O . Изотропный конус с вершиной в точке O описывается в нештрихованной системе координат уравнением

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Плоскость $z = h$, перпендикулярная к оси OZ , несет на себе собственно евклидову метрику и пересекается с изотропным конусом по кривой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = h \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = h^2,$$

которая является окружностью с центром на оси OZ . В штрихованной системе координат $OX'Y'Z'$ этот же

изотропный конус описывается уравнением

$$(x')^2 + (y')^2 = (z')^2.$$

Плоскость $z' = h$, перпендикулярная к оси OZ' , тоже является собственно евклидовой плоскостью и пересекается с изотропным конусом по окружности

$$\begin{cases} (x')^2 + (y')^2 = (z')^2 \\ z' = h \end{cases} \Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = h^2.$$

В собственно евклидовом пространстве конус, основанием которого служит круг, а вершина лежит на перпендикуляре к кругу, восстановленном из его центра, называется прямым круговым конусом. Упомянутый перпендикуляр является осью симметрии, и других осей симметрии прямой круговой конус не имеет. Прилагая этот образ к изотропному конусу, приходим к заключению, что всякая прямая, принадлежащая внутренней области изотропного конуса, является его осью симметрии. И подобно тому как в двумерном псевдоевклидовом пространстве (плоскости) мы имеем право изобразить любую пару взаимно перпендикулярных прямых под углом $\pi/2$ на собственно евклидовой плоскости рисунка (см. рис. 13), так в отображении трехмерного псевдоевклидова пространства на собственно евклидово трехмерное пространство мы имеем право изображать любую ось OZ в виде перпендикуляра к плоскости OXY , а изотропный конус — в виде прямого кругового конуса в этой системе координат.

§ 22. Объяснение эффекта Комптона

В трехмерном псевдоевклидовом пространстве мировая линия обладает тем свойством, что вектор, касательный к ней в любой точке, принадлежит внутренней полости изотропного конуса. Проявляющий фронт в этом пространстве может быть поверхностью, нормаль к которой в каждой точке принадлежит внутренней области изотропного конуса. Касательная плоскость к проявляющему фронту в любой его точке несет на себе собственно евклидову метрику и принадлежит внешней области изотропного конуса. Движение проявляющего фронта можно представлять как перемещение каждой точки его поверхности в направлении положительной нормали, а положительную нормаль мы будем считать направленной

в сторону *верхней* внутренней полости изотропного конуса.

Применим такую геометрическую модель мира к объяснению рассеяния фотонов на свободных электронах, т. е. электронах, не входящих в состав сложной системы (атома или молекулы). Пусть мировая линия свободного электрона характеризуется вектором массы m . Одним из устойчивых отличительных признаков электрона как элементарной частицы является определенная величина его массы покоя. Это означает, что вектор массы m электрона при любых возможных изменениях направления не изменяет своего модуля: $|m| = im_0$. Сталкиваясь с фотоном, электрон не может поглотить его, как поглощает атом, ибо поглощение привело бы к изменению модуля вектора массы электрона. Обозначим через l вектор массы той изотропной прямой, с которой связан фотон перед столкновением, через l^* — вектор массы изотропной прямой, с которой связан фотон после столкновения, через m^* — вектор массы электрона после столкновения. Ключом к решению задачи служит закон сохранения суммарного вектора массы изолированной системы электрон — фотон

$$m + l = m^* + l^* \quad (4.15)$$

и условие сохранения массы покоя электрона

$$|m| = |m^*| = im_0. \quad (4.16)$$

Примем за начало O координатной системы $OXYZ$ трехмерного псевдоевклидова пространства мировую точку столкновения электрона с фотоном и направим ось OZ коллинеарно вектору массы m (рис. 29). Разложение вектора m по базису такой координатной системы имеет вид

$$m = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + m_0 e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_0 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Выберем ось OX так, чтобы изотропная, характеризующая вектором массы l , принадлежала плоскости OXZ и проекция вектора l на ось OX была положительной. Тогда с учетом (3.64) и (3.67) можно представить разложение вектора l по базису следующим образом:

$$l = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \lambda_3 (e_1 + e_3) = \frac{h\nu}{c^2} (e_1 + e_3) = \frac{h\nu}{c^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Здесь ν — частота фотона перед столкновением с электроном.

В выбранной координатной системе азимутальный угол (измеряемый в собственно евклидовой плоскости OXY) вектора l равен нулю, а вектор m , коллинеарный оси OZ , не имеет определенного значения азимутального угла.

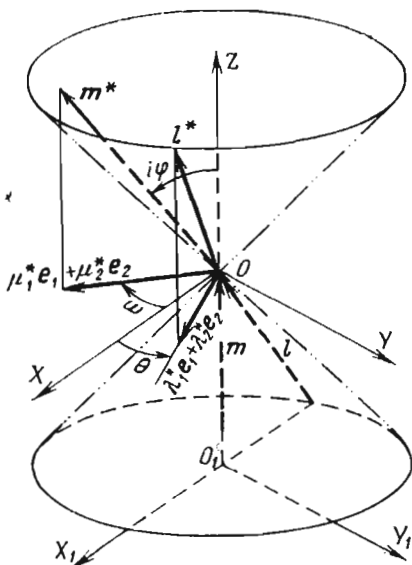


Рис. 29

Суммарный вектор массы $m+l$ принадлежит плоскости OXZ , и его азимутальный угол тоже равен нулю. Столкновение с электроном переводит фотон на другую изотропную, характеризующуюся азимутальным углом θ . Поскольку азимут суммарного вектора массы не изменяется при столкновении (см. (4.15)), отклонение вектора l^* на угол θ по азимуту должно быть компенсировано азимутальным углом ω вектора m^* . Для того же чтобы вектор m^* получил определенное значение азимутального угла в координатной системе $OXYZ$, он должен отклониться от оси OZ на угол $i\varphi \neq i0$ (электрон приобретет скорость). По-видимому, столкновение изменит частоту фотона, и мы обозначим новое значение частоты через ν^* . Тогда разложение изотропного вектора массы l^* по базису e_1, e_2, e_3 примет следующий вид:

$$l^* = \lambda_1^* e_1 + \lambda_2^* e_2 + \lambda_3^* e_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \\ \lambda_3^* \end{pmatrix} = \frac{h\nu^*}{c^2} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Из равенства (4.15) найдем вектор массы m^* :

$$m^* = m + l - l^*$$

и заменим векторы их координатными столбцами (4.17),

(4.18), (4.19):

$$\mathbf{m}^* = \begin{pmatrix} \mu_1^* \\ \mu_2^* \\ \mu_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_0 \end{pmatrix} + \frac{h\nu}{c^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{h\nu^*}{c^2} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим выражения координат вектора \mathbf{m}^* через соответствующие координаты векторов \mathbf{m} , \mathbf{l} , \mathbf{l}^* :

$$\begin{aligned} \mu_1^* &= \frac{h}{c^2} (\nu - \nu^* \cos \theta), & \mu_2^* &= -\frac{h}{c^2} \nu^* \sin \theta, \\ \mu_3^* &= m_0 + \frac{h}{c^2} (\nu - \nu^*). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Координаты вектора \mathbf{m}^* должны удовлетворять условию (4.16) сохранения модуля вектора массы:

$$(\mu_1^*)^2 + (\mu_2^*)^2 - (\mu_3^*)^2 = |\mathbf{m}^*|^2 = (im_0)^2 = -m_0^2.$$

Подставляя сюда выражения (4.20):

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{c^4} (\nu^2 - 2\nu\nu^* \cos \theta + \nu^{*2} \cos^2 \theta + \nu^{*2} \sin^2 \theta) - m_0^2 - \\ - 2m_0 \frac{h}{c^2} (\nu - \nu^*) - \frac{h^2}{c^4} (\nu^2 - 2\nu\nu^* + \nu^{*2}) = -m_0^2, \end{aligned}$$

найдем частоту ν^* фотона после столкновения:

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{c^4} \cdot 2\nu\nu^* (1 - \cos \theta) - 2m_0 \frac{h}{c^2} (\nu - \nu^*) &= 0, \\ \nu^* \left[\frac{h}{c^2} \nu (1 - \cos \theta) + m_0 \right] &= m_0 \nu, \\ \nu^* &= \frac{\nu}{\frac{h\nu}{c^2 m_0} (1 - \cos \theta) + 1}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Внося в соотношение (4.21) выражения частот падающего и рассеянного излучений через длины волн

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \nu^* = \frac{c}{\lambda^*}$$

получим

$$\frac{1}{\lambda^*} = \frac{1}{\lambda \left[\frac{h}{c\lambda m_0} (1 - \cos \theta) + 1 \right]}$$
$$\lambda^* = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) + \lambda,$$
$$\Delta\lambda = \lambda^* - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.22)$$

Соотношение (4.22) нашел американский физик Артур Комптон и проверил его справедливость в экспериментах по рассеянию рентгеновского излучения на электронах графита [31].

Глава 5

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ МИР МИНКОВСКОГО

«... мир богаче, живее, разнообразнее, чем он кажется, ибо каждый шаг развития науки открывает в нем новые стороны.»

В. И. Ленин [4]

§ 23. Гиперплоскости

На основе четырехмерного линейного пространства могут быть построены различные типы псевдоевклидовых пространств. Если среди четырех векторов базиса e_1, e_2, e_3, e_4 этого пространства один вектор имеет длину, выражаемую мнимым числом, а длины остальных трех векторов выражаются вещественными числами, то такому пространству присваивается индекс 1. Умножив на мнимую единицу длины всех базисных векторов четырехмерного псевдоевклидова пространства индекса 1, получим пространство индекса 3, имеющее по существу такие же метрические свойства. Герман Минковский понял, что реальное мировое пространство обладает такими же линейными и метрическими свойствами, как псевдоевклидово четырехмерное пространство индекса 1. Для краткости мы будем называть его также пространством Минковского. Желая принять во внимание не только геометрические свойства, но и физические объекты и процессы в мировом пространстве, мы будем пользоваться термином «мир Минковского».

Ортонормированный базис в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1 будем характеризовать следующей таблицей скалярных произведений

векторов:

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 \rangle & \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Таблица (5.1) говорит о том, что любые два различных вектора в этом базисе взаимно перпендикулярны, а длины их имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}_1| &= \sqrt{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} = \sqrt{1} = 1, & |\mathbf{e}_2| &= 1, \\ |\mathbf{e}_3| &= 1, & |\mathbf{e}_4| &= \sqrt{-1} = i. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Запишем разложения произвольных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} пространства Минковского по ортонормированному базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 + \alpha_4 \mathbf{e}_4, \\ \mathbf{b} &= \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3 + \beta_4 \mathbf{e}_4 \end{aligned} \quad (5.3)$$

и вычислим скалярное произведение $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ с учетом таблицы (5.1):

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 - \alpha_4 \beta_4. \quad (5.4)$$

По общему определению (1.29) модуль вектора есть корень квадратный из скалярного произведения вектора на самого себя. В пространстве Минковского модуль вектора выражается через его координаты следующим образом:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2}. \quad (5.5)$$

Выберем в пространстве одну точку в качестве полюса O . Совокупность ортонормированного базиса, характеризуемого таблицей (5.1), и полюса O образует ортонормированную систему координат $OXYZW$. Координаты радиус-вектора \mathbf{r} в этой системе будем обозначать буквами x, y, z, w и называть координатами точки M , указываемой концом радиус-вектора:

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + w\mathbf{e}_4. \quad (5.6)$$

Рассмотрим, что представляет собой множество точек в четырехмерном пространстве Минковского, у которых

радиус-векторы перпендикулярны к базисному орту e_4 (к оси OW). От векторной записи этого условия перпендикулярности

$$\langle e_4, r \rangle = 0$$

перейдем к координатному выражению

$$\begin{aligned} \langle e_4, xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4 \rangle &= 0, \\ x\langle e_4, e_1 \rangle + y\langle e_4, e_2 \rangle + z\langle e_4, e_3 \rangle + w\langle e_4, e_4 \rangle &= 0, \\ x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 0 + w \cdot (-1) &= 0, \\ \mathbf{w} &= 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Здесь ясно видно, что условием перпендикулярности радиус-вектора r к базисному орту e_4 является равенство нулю четвертой координаты вектора. При этом три первые его координаты x, y, z могут принимать независимо друг от друга любые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Но множество всевозможных линейных комбинаций вида

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 + 0 \cdot e_4 = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

образует трехмерное пространство. Таким образом, геометрическое место точек в четырехмерном пространстве, описываемое уравнением (5.7), представляет собой трехмерное пространство, а так как любой принадлежащий ему вектор перпендикулярен к базисному вектору e_4 , то говорят, что это трехмерное пространство в целом перпендикулярно к направлению e_4 (к оси OW).

Мы не станем делать попытку наглядно изобразить четырехмерное пространство. Можно, конечно, построить некоторый условный чертеж четырех координатных осей, но вряд ли это придаст наглядность геометрическим объектам, которых мы не воспринимаем зрительно. Мы никогда не видели трехмерное пространство «извне» и не представляем, куда направлен перпендикуляр к трехмерному пространству. Лучше избрать другой путь. В аналитических соотношениях, описывающих геометрические объекты четырехмерного мира в векторной или координатной форме, нетрудно заметить сходство с аналитическим описанием знакомых нам объектов трехмерного мира. Вот этими наглядными образами из трехмерного мира мы и будем пользоваться как подспорьем, облегчающим формирование представлений о четырехмерном мире на основе математических формул. Например, уравнение вида (5.7) описывает в случае трехмерного пространства плоскость, перпендикулярную к оси коор-

дипат \bar{W} . По плоскость является двумерным множеством точек, а мы теперь должны иметь дело с трехмерным множеством, описываемым уравнением (5.7). Чтобы подчеркнуть сходство этого множества с плоскостью и отличие от нее, его называют **гиперплоскостью**. Базис плоскости состоит из двух векторов, базис гиперплоскости в четырехмерном пространстве состоит из трех векторов. В частности, для гиперплоскости (5.7) базисом являются векторы e_1, e_2, e_3 , входящие в состав ортонормированного базиса четырехмерного пространства Минковского. Поскольку длины этих трех векторов выражаются вещественными числами, приходим к заключению, что гиперплоскость (5.7) несет на себе собственно евклидову метрику, т. е. является хорошо знакомым нам трехмерным собственно евклидовым пространством.

Возьмем на оси OW какую-нибудь точку P , отличную от точки начала координат O . Три первые координаты точки P равны нулю, а четвертая отлична от нуля: $w_P \neq 0$. Запишем координатный столбец радиус-вектора r_P точки P :

$$r_P = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + w_P \cdot e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_P \end{pmatrix}.$$

Разность любого радиус-вектора $r = \overline{OM}$ и радиус-вектора $r_P = \overline{OP}$ есть связанный вектор, имеющий своим началом точку P :

$$\overline{PM} = \overline{OM} - \overline{OP} = r - r_P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w - w_P \end{pmatrix}.$$

Те из векторов \overline{PM} , которые перпендикулярны к базисному орту e_4 , удовлетворяют векторному уравнению

$$\langle e_4, r - r_P \rangle = 0.$$

Оно выражается в координатной форме следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle e_4, xe_1 + ye_2 + ze_3 + (w - w_P)e_4 \rangle &= 0, \\ x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 0 + (w - w_P)(-1) &= 0, \\ w - w_P &= 0, \end{aligned}$$

$$\boxed{w = w_P} \quad (5.8)$$

Как и в предыдущем примере, условие перпендикулярности векторов \overline{PM} к оси OW свелось к обращению в нуль их четвертой координаты $w - w_p$, а три первые координаты x, y, z этих векторов могут принимать любые значения. Точки, указываемые концами векторов \overline{PM} , подчиненных условию (5.8), образуют трехмерное множество, которое тоже является гиперплоскостью, перпендикулярной к оси OW . В гиперплоскости (5.8) нет ни одной точки гиперплоскости (5.7), так как у всех точек гиперплоскости (5.7) четвертая координата w равна нулю и эти точки не могут удовлетворять уравнению (5.8). Значит, гиперплоскости (5.7) и (5.8) не пересекаются, и их следует назвать взаимно параллельными. Подобно тому как мы представляем трехмерное пространство состоящим из параллельных плоских слоев, или в виде бесконечного множества параллельных плоскостей, навязанных на перпендикулярную к ним прямую, так следует представлять четырехмерное пространство в виде бесконечного множества взаимно параллельных гиперплоскостей (трехмерных пространств), навязанных на перпендикулярную к ним ось OW .

Рассмотрим теперь множество радиус-векторов, перпендикулярных к базисному орту e_1 (к оси OX). В векторной форме это условие перпендикулярности выражается уравнением

$$\langle e_1, r \rangle = 0,$$

а в координатной форме принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 0 + w \cdot 0 &= 0, \\ x &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

У радиус-векторов рассматриваемого множества первая координата равна нулю, а три другие координаты могут принимать независимо одна от другой произвольные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Множество всех линейных комбинаций

$$0 \cdot e_1 + ye_2 + ze_3 + we_4 = ye_2 + ze_3 + we_4$$

представляет трехмерное пространство (гиперплоскость), в котором линейно независимые векторы e_2, e_3, e_4 играют роль базиса. Так как длины векторов e_2 и e_3 выражаются вещественными числами, а длина вектора e_4 — мнимым числом, заключаем, что гиперплоскость (5.9) несет на себе псевдоевклидову метрику, т. е. представляет такое

же трехмерное псевдоевклидово пространство, как описанное в предыдущей главе.

Нетрудно показать, что множество точек, у которых радиус-векторы перпендикулярны к базисному орту e_2 , представляет псевдоевклидову гиперплоскость $OXZW$ с базисом e_1, e_3, e_4 , описываемую уравнением $y = 0$. Уравнению $z = 0$ соответствует в четырехмерном пространстве Мицковского псевдоевклидова гиперплоскость $OXYW$ с базисом e_1, e_2, e_4 , перпендикулярная к координатной оси OZ .

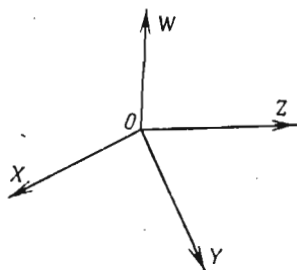


Рис. 30

Теперь понятно, почему условное изображение координатной системы $OXYZW$ в виде четырех осей (рис. 30) практически бесполезно для создания наглядного представления о четырехмерном пространстве. Такой рисунок не помогает нам увидеть какую-либо гиперплоскость как трехмерное пространство,

вне которого существуют другие трехмерные пространства. Мы сможем увидеть в лучшем случае лишь четыре плоскости OXY, OYZ, OZW, OXW , а не координатные гиперплоскости. Каждая из указанных плоскостей представляет лишь пересечение двух координатных гиперплоскостей. Например, гиперплоскость $w = 0$ ($OXYZ$) пересекается с гиперплоскостью $x = 0$ ($OYZW$) по плоскости OYZ . Действительно, гиперплоскости $w = 0$ принадлежат все радиус-векторы, являющиеся линейными комбинациями вида

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 + 0 \cdot e_4 = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

где x, y, z — любые вещественные числа. Гиперплоскость $x = 0$ представляет множество радиус-векторов, являющихся линейными комбинациями вида

$$0 \cdot e_1 + ye_2 + ze_3 + we_4 = ye_2 + ze_3 + we_4,$$

где y, z, w — любые вещественные числа. Обеим гиперплоскостям принадлежат лишь те радиус-векторы, которые являются линейными комбинациями вида

$$0 \cdot e_1 + ye_2 + ze_3 + 0 \cdot e_4 = ye_2 + ze_3.$$

Но множество таких радиус-векторов и есть плоскость, параллельная базисным ортам e_2, e_3 и проходящая через точку O , т. е. плоскость OYZ .

Рис. 30 демонстрирует замечательную черту четырехмерного мира, о которой мы не имеем представления в мире трехмерном. Плоскости OYZ и OXY , изображенные на рис. 30, пересекаются по прямой OY , что для нас привычно. Но плоскость OYZ пересекается с плоскостью OHW в одной-единственной точке O . Представить наглядно этот удивительный факт мы не можем, но в справедливости его легко убедиться аналитическим путем. Различие этих двух случаев пересечения плоскостей связано с тем, что плоскости OYZ и OXY принадлежат одному и тому же трехмерному пространству (гиперплоскости $OXYZ$), а плоскости OYZ и OHW не умещаются в одном трехмерном пространстве (принадлежат различным гиперплоскостям).

§ 24. Изотропный гиперконус

Согласно (5.5) длина радиус-вектора (5.6) равна

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - w^2}. \quad (5.10)$$

Она обращается в нуль, если координаты радиус-вектора удовлетворяют условию

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 0, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 + z^2 = w^2. \quad (5.11)$$

Соотношение (5.11) определяет в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1 геометрическое место точек, радиус-векторы которых являются изотропными. Что представляет собой это геометрическое место точек?

Прежде всего замечаем, что уравнение (5.11) по своей структуре похоже на уравнение (4.7) изотропного конуса в трехмерном псевдоевклидовом пространстве. За формальным сходством этих уравнений обнаруживается глубокое геометрическое родство описываемых ими объектов. Рассмотрим пересечение геометрического места точек (5.11) с координатной гиперплоскостью $OYZW$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 + z^2 = w^2. \quad (5.12)$$

Гиперплоскость $OYZW$ является трехмерным псевдоевклидовым пространством, а уравнение (5.12) представля-

ет изотропный конус этого пространства. Аналогичным образом пересечения геометрического места точек (5.11) с двумя другими псевдоевклидовыми координатными гиперплоскостями $OXYW$ и $OXZW$ являются изотропными конусами этих гиперплоскостей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = w^2,$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + z^2 = w^2.$$

Но с *собственно* евклидовой координатной гиперплоскостью $OXYZ$ множество точек, удовлетворяющих уравнению (5.11), пересекается в одной-единственной точке:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0, \\ w = 0. \end{cases}$$

Это точка начала координат, служащая вершиной трех рассмотренных выше изотропных конусов в псевдоевклидовых координатных гиперплоскостях.

Естественно считать множество точек, удовлетворяющих уравнению (5.11), обобщением конической поверхности на случай большего числа измерений и назвать его *изотропным гиперконусом*. Гиперконус представляет трехмерное множество точек в четырехмерном пространстве, аналогичное двумерной конической поверхности в трехмерном пространстве.

Продолжая аналогию между изотропным конусом и изотропным гиперконусом, назовем *внутренней* областью гиперконуса (5.11) множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 < 0, \text{ или } x^2 + y^2 + z^2 < w^2. \quad (5.13)$$

Согласно (5.10) длина радиус-вектора любой точки внутренней области изотропного гиперконуса выражается мнимым числом. Недостаток наглядности в представлении о четырехмерной внутренней области изотропного гиперконуса мы можем частично восполнить, рассматривая пересечения этой области с псевдоевклидовыми коор-

динатными гиперплоскостями:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 < w^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 + z^2 < w^2,$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 < w^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + z^2 < w^2,$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 < w^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 < w^2.$$

Оказывается, внутренняя область изотропного гиперконуса пересекается с каждой псевдоевклидовой гиперплоскостью, проходящей через вершину гиперконуса, по внутренней области изотропного конуса этой гиперплоскости.

Здесь будет полезна наглядная иллюстрация с понижением размерности: вместо четырехмерного псевдоевклидова пространства индекса 1 рассмотрим трехмерное псевдоевклидово пространство индекса 1, а вместо псевдоевклидовой гиперплоскости — псевдоевклидову плоскость. Как видно на рис. 31, внутренняя область изотропного конуса пересекается с плоскостью по внутренней области мнимых секторов плоскости. Если не выходить из псевдоевклидовой плоскости, то за пределами мнимых секторов можно найти только вещественные секторы. Но, выйдя из плоскости в трехмерное пространство, мы найдем вне мнимых секторов плоскости внутреннюю область изотропного конуса (в частности, мнимые секторы другой плоскости). Аналогичным образом, оставаясь в трехмерном пространстве, мы обнаруживаем за пределами внутренней области изотропного конуса только его внешнюю область. Но если выйти из трехмерного пространства в четырехмерное, то вне внутренней области изотропного конуса найдется внутренняя область изотропного гиперконуса (в частности, внутренняя область изотропного конуса другой гиперплоскости).

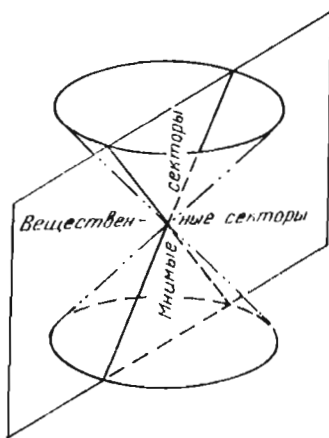


Рис. 31

Аналогичное сравнение можно провести для внешних областей изотропного гиперконуса четырехмерного пространства Минковского, изотропного конуса трехмерного псевдоевклидова пространства и вещественных секторов псевдоевклидовой плоскости. Внешняя область изотропного гиперконуса состоит из точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 > 0, \text{ или } x^2 + y^2 + z^2 > w^2. \quad (5.14)$$

Все векторы четырехмерного псевдоевклидова пространства индекса 1 независимо от точки их приложения можно разбить на три класса по признаку их принадлежности к одной из трех областей. Мы будем говорить, что произвольный вектор

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 + \alpha_4 \mathbf{e}_4$$

принадлежит внутренней области изотропного гиперконуса, если его координаты удовлетворяют условию

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 < 0,$$

аналогичному условию (5.13) для радиус-векторов. Длина (модуль) всякого вектора внутренней области выражается мнимым числом (см. (5.5)). Мы будем говорить, что произвольный вектор \mathbf{a} принадлежит внешней области изотропного гиперконуса, если его координаты удовлетворяют условию

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 > 0,$$

аналогичному условию (5.14) для радиус-векторов. Длина (модуль) всякого вектора внешней области выражается вещественным числом. Наконец, если координаты вектора \mathbf{a} удовлетворяют условию

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 = 0,$$

то вектор \mathbf{a} является изотропным и коллинеарным некоторому радиус-вектору, принадлежащему изотропному гиперконусу (5.11).

Рассмотрим в четырехмерном пространстве Минковского множество всех радиус-векторов $\mathbf{r} = \overline{OM}$, перпендикулярных к ненулевому вектору \mathbf{a} . Это множество определяется уравнением

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle = 0, \quad (5.15)$$

которое в координатной форме, согласно (5.4), принимает вид

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z - \alpha_4 w = 0. \quad (5.16)$$

Уравнение (5.16) линейное (все переменные входят в него только в первой степени), как и уравнение плоскости (4.11), но в уравнении (5.16) больше переменных, причем три из них могут принимать независимо друг от друга любые значения. Это говорит о том, что уравнение (5.16) определяет в четырехмерном пространстве трехмерное множество точек, аналогичное плоскости, т. е. гиперплоскость общего положения (проходящую через начало координат). Вектор \mathbf{a} в уравнении (5.15) называют *нормалью к гиперплоскости*, потому что всякий радиус-вектор, принадлежащий этой гиперплоскости, перпендикулярен к вектору \mathbf{a} .

Проводя такие же рассуждения, как в § 21 (см. формулы (4.12) — (4.14)), но уже для четырех переменных, нетрудно доказать, что если нормаль \mathbf{a} к гиперплоскости (5.16) принадлежит внутренней области изотропного гиперконуса, то гиперплоскость несет на себе собственно евклидову метрику, т. е. является трехмерным собственно евклидовым пространством. Можно также доказать, что гиперплоскость, нормаль к которой принадлежит внешней области изотропного гиперконуса, несет на себе псевдоевклидову метрику, т. е. является трехмерным псевдоевклидовым пространством такого же типа, как рассмотренное в главе 4. Наконец, гиперплоскость, перпендикулярная к изотропному вектору, содержит в себе этот вектор и обладает специфическими метрическими свойствами, отличными от собственно евклидовых и псевдоевклидовых свойств. Такую гиперплоскость называют *изотропной*. В ней содержатся векторы вещественной длины, но нет ни одного вектора мнимой длины и имеется только одно изотропное направление. Это значит, что изотропная гиперплоскость не проникает во внутреннюю область изотропного гиперконуса и имеет с ним только одну общую прямую, т. е. является касательной гиперплоскостью к изотропному гиперконусу.

§ 25. Наблюдаемое пространство

На основе четырехмерного псевдоевклидова пространства индекса 1 может быть построена такая модель мира, которая всецело согласуется со специальной теорией относительности, даже объясняет ее и постулаты Эйнштейна, и при этом ни в чем не противоречит той картине мира, которую рисуют нам чувственные восприятия.

На протяжении предшествующих глав мы формировали представление о псевдоевклидовых метрических отношениях. Хотя они и недоступны непосредственному зрительному восприятию, удастся с помощью математических формул и условных графических построений создать достаточно наглядные образы мировых линий в двумерном и трехмерном псевдоевклидовых пространствах. В этом нам оказывает помощь то обстоятельство, что линейные свойства у псевдоевклидовых и собственно евклидовых пространств одинаковой размерности совпадают.

Но переход к четырехмерной модели мира Минковского выдвигает принципиально новые трудности в формировании образных геометрических представлений, потому что теперь пересмотру подлежит более глубокое геометрическое свойство — *линейное* свойство размерности пространства. Наши глаза никогда не видели четырехмерных предметов, и представлять четырехмерное собственно евклидово пространство нам ничуть не легче, чем представлять четырехмерное пространство с псевдоевклидовой метрикой. Пожалуй, это даже труднее, поскольку четырехмерное псевдоевклидово пространство индекса 1 как адекватная математическая модель реального мирового пространства имеет объяснимую связь с воспринимаемым чувствами пространством, а для собственно евклидова четырехмерного пространства мы не находим никакой связи с физическим миром. Вот почему мы вовсе не будем обращаться к четырехмерному пространству с собственно евклидовой метрикой.

В четырехмерном мире Минковского мы будем иметь дело с двумя типами физических объектов: мировыми линиями и изотропными, по которым передаются электромагнитные воздействия. Ассортимент тех и других богаче, чем в двумерном и трехмерном сечениях мира Минковского. Мировая линия в четырехмерном пространстве должна удовлетворять тому требованию, что вектор касательной к мировой линии в любой ее точке принадлежит внутренней области изотропного гиперконуса. Проявляющий фронт в четырехмерном мире Минковского может быть гиперповерхностью, нормаль к которой в каждой точке принадлежит внутренней области изотропного гиперконуса.

Изотропный гиперконус играет решающую роль в формировании зрительно воспринимаемого образа окружающего мира. Ведь электромагнитные воздействия от других мировых точек передаются каждому наблюдате-

лю по изотропным прямым, а все изотропные прямые, проходящие через мировую точку наблюдателя, образуют изотропный гиперконус. Наблюдатель воспринимает мир с позиций связанной с ним координатной системы. Это означает, что ось OW ортономированной системы координат $OXYZW$ направлена по мировой прямой наблюдателя (или по касательной к мировой кривой) в сторону ее роста. Если принять за начало координат O мировую точку, представляющую состояние наблюдателя в его настоящий момент времени, то изотропный гиперконус, по образующим которого наблюдатель видит мир, будет описываться уравнением (5.11):

$$x^2 + y^2 + z^2 = w^2.$$

Поскольку наблюдаться могут только прошлые мировые точки (см. конец § 18), нас будет интересовать та часть изотропного гиперконуса, в которой координата $w = ct$ отрицательна:

$$w = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (5.17)$$

Назовем эту часть задней (или прошлой) полостью изотропного гиперконуса, в отличие от передней (будущей) полости, внутрь которой устремлен рост мировой линии наблюдателя.

Когда ходом проявляющего процесса наблюдатель будет перенесен вдоль своей мировой прямой OW из точки O начала координат в точку $Q(0; 0; 0; w_0)$, он сможет видеть в окружающем четырехмерном пространстве только такие точки $M(x; y; z; w)$, расстояние которых от точки Q равно нулю:

$$|QM| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 - (w - w_0)^2} = 0.$$

Для этих точек выполняется условие

$$(w - w_0)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

А если учесть, что наблюдаемые точки M являются абсолютно прошлыми по отношению к точке Q , т. е. что $w - w_0 < 0$, то придем к соотношению

$$w - w_0 = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

или

$$w = w_0 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (5.18)$$

Это уравнение задней полости изотропного гиперконуса, исходящего из точки Q как из вершины. Создается впе-

чатление, будто вершина изотропного гиперконуса перемещается вместе с мировой точкой наблюдателя в ходе проявляющегося процесса. На самом же деле каждая точка четырехмерного пространства Минковского является вершиной своего изотропного гиперконуса, и куда бы ни попал наблюдатель, он оказывается на перекрестии всех изотропных образующих гиперконуса.

Для того чтобы выяснить, каким будет представляться окружающий мир наблюдателю, связанному с мировой прямой OW , рассмотрим объект наблюдений, имеющий наиболее простую конструкцию с точки зрения математического описания. Предположим, что ось OW окружена со всех сторон сплошным «забором», состоящим из параллельных ей мировых прямых, и пусть эти прямые будут расположены на одинаковых расстояниях от оси OW . На языке привычных нам трехмерных геометрических образов мы назвали бы подобную конструкцию прямым круговым цилиндром. Посмотрим, что скажут математические формулы об этом объекте в четырехмерном пространстве.

В § 5 было выведено векторно-параметрическое уравнение прямой (1.26), относящееся к наблюдаемому пространству. Примененные там рассуждения можно повторить для точечно-векторного линейного пространства любой размерности. Метрические свойства пространства не играют здесь никакой роли, поскольку в уравнении прямой используются только *линейные* операции над векторами. В векторной записи уравнение прямой в четырехмерном пространстве Минковского не отличается от уравнения (1.26). Различие размерностей пространств скажется только при записи уравнения прямой в координатной форме. Пусть интересующая нас прямая проходит через точку M_1 , указываемую радиус-вектором

$$\mathbf{r}_1 = \overline{OM_1} = x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2 + z_1 \mathbf{e}_3 + w_1 \mathbf{e}_4.$$

Направляющим вектором прямой, параллельной оси OW , служит базисный орт \mathbf{e}_4 . Обозначая через

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3 + w \mathbf{e}_4$$

радиус-вектор произвольной точки на прямой, запишем уравнение прямой в виде

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda \mathbf{e}_4, \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{e}_4. \quad (5.19)$$

Здесь λ — параметр, который может принимать любые вещественные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Подставляя в

уравнение (5.19) вместо векторов их координатные столбцы (см. (1.21) — (1.24))

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

получим параметрические уравнения прямой

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1, \quad w = w_1 + \lambda. \quad (5.20)$$

Расстояние прямой (5.20) от оси OIV измеряется по перпендикуляру к обеим прямым. Гиперплоскость $w = w_1$ перпендикулярна к оси OW и содержит в себе все перпендикуляры к ней (см. (5.8)). В этой гиперплоскости находится точка $M_1(x_1; y_1; z_1; w_1)$, так как координаты точки удовлетворяют уравнению гиперплоскости. С осью OW гиперплоскость $w = w_1$ пересекается в точке $P_1(0; 0; 0; w_1)$. Запишем разложение вектора $\overline{P_1M_1}$ по базису четырехмерного пространства Минковского:

$$\begin{aligned} \overline{P_1M_1} &= (x_1 - 0)\mathbf{e}_1 + (y_1 - 0)\mathbf{e}_2 + (z_1 - 0)\mathbf{e}_3 + \\ &\quad + (w_1 - w_1)\mathbf{e}_4 = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3 + 0 \cdot \mathbf{e}_4. \end{aligned}$$

Согласно (5.5) длина вектора $\overline{P_1M_1}$ равна

$$|\overline{P_1M_1}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \rho.$$

Это и есть расстояние прямой (5.20) от оси OIV . Мы вводим для него обозначение ρ , так как хотим на таком же расстоянии расположить вокруг оси OW всевозможные параллельные ей прямые в виде сплошного «забора». Аналитические условия, которым удовлетворяют все точки «забора», и только его точки, формулируются следующим образом:

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho. \end{cases} \quad (5.21)$$

Здесь выражено и то обстоятельство, что на каждой прямой, параллельной оси OIV , координата w может принимать любые значения, и то, что расстояние точки $M(x; y; z; w)$ от оси OIV (измеренное по перпендикуляру к ней) должно равняться ρ .

Геометрическое место точек, удовлетворяющих условиям (5.21), представляет форму, не знакомую нам по

опыту чувственных восприятий. Чтобы составить о ней хотя бы отчасти наглядное представление, воспользуемся методом сечений. Пересечение координатной гиперплоскости $OXYW$ ($z=0$) с множеством точек (5.21) описывается системой уравнений

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\infty < w < \infty, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \rho. \end{cases} \quad (5.22)$$

Давая координате w какое-нибудь фиксированное значение, например w_1 , мы определяем в трехмерном псевдоевклидовом пространстве гиперплоскости $OXYW$ плоскость $w = w_1$, перпендикулярную к оси OW и несущую на себе собственно евклидову метрику. Эта плоскость параллельна плоскости OXY . Пересечение плоскости $w = w_1$ с множеством точек (5.22) представляет обычную окружность радиуса ρ с центром на оси OW . Такие же окружности получаются во всех других плоскостях, параллельных OXY . Значит, множество точек (5.22) является круговым цилиндром. Он отличается от привычного нам прямого кругового цилиндра только тем, что расстояние, измеряемое вдоль оси и образующих, выражается мнимым числом и плоскости окружностей перпендикулярны к оси цилиндра в псевдоевклидовом смысле.

Координатная гиперплоскость $OYZW$ ($x=0$) пересекается с множеством точек (5.21) по цилиндрической поверхности

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\infty < w < \infty, \\ \sqrt{y^2 + z^2} = \rho. \end{cases} \quad (5.23)$$

В пространстве этой гиперплоскости уравнением $w = w_1$ определяется плоскость, также перпендикулярная к оси OW , но параллельная уже не плоскости OXY , а плоскости OYZ (плоскость OXY не принадлежит пространству $OYZW$).

Наконец, координатная гиперплоскость $OZXW$ пересекается с множеством точек (5.21) по цилиндрической поверхности

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\infty < w < \infty_1 \\ \sqrt{x^2 + z^2} = \rho_1 \end{cases} \quad (5.24)$$

у которой плоскости, перпендикулярные к оси OW , параллельны плоскости OXZ .

Круговые цилиндры (5.22), (5.23), (5.24) имеют общую ось — прямую OW , но плоскости окружностей, перпендикулярных к оси, ориентированы в них по-разному. В частности, такие плоскости, проведенные через начало координат, совпадут соответственно с плоскостями OXY , OYZ , OZX . Они лежат в различных псевдоевклидовых гиперплоскостях, но в одной и той же собственно евклидовой гиперплоскости $OXYZ$, которая вся перпендикулярна к оси OW (см. (5.7)). Рассмотрим пересечение гиперплоскости $OXYZ$ с множеством точек (5.21):

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho. \end{cases} \quad (5.25)$$

Условия (5.25) определяют в трехмерном собственно евклидовом пространстве гиперплоскости $w = 0$ сферическую поверхность радиуса ρ с центром в начале координат O . Она содержит в себе все окружности, являющиеся сечениями цилиндров (5.22), (5.23), (5.24) плоскостями, перпендикулярными к оси OW и проходящими через начало координат. Вообще каждая окружность, принадлежащая сфере (5.25), является перпендикулярным к оси OW сечением цилиндра, расположенного в некоторой псевдоевклидовой гиперплоскости. Геометрическое место точек, удовлетворяющих условиям (5.21), содержит в себе все такие цилиндры и, следовательно, представляет обобщение цилиндрической поверхности на случай большего числа измерений. Поэтому множество точек (5.21) называют гиперцилиндром. Если мы будем представлять четырехмерное пространство Минковского состоящим из гиперплоскостей $w = w_1$, параллельных перпендикулярную к ним ось OW (см. § 23), то каждая такая гиперплоскость пересечет гиперцилиндр (5.21) по сфере

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho \\ w = w_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = w_1, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho, \end{cases} \quad (5.26)$$

радиус которой равен ρ , а центр находится в точке $P_1(0; 0; 0; w_1)$, являющейся точкой пересечения гиперплоскости $w = w_1$ с осью OW .

Формальное сходство сферы с окружностью и гиперцилиндра с цилиндром вызывает желание воспользоваться знакомым образом сферы для формирования представления о гиперцилиндре. Однако с первых же шагов обнаруживается, что мы недостаточно хорошо знаем сферу, вернее, не представляем, как она выглядит в четырехмерном пространстве. В этом отношении нам более понятна окружность. Мы видим, что все точки окружности помещаются в одном двумерном пространстве, но рядом с плоскостью окружности видим и другие плоскости. Нас не удивляет, что через область плоскости, ограниченную окружностью, можно проводить различные прямые, не пересекающие самой окружности (например, перпендикулярные к плоскости). По аналогии следует ожидать, что и через область трехмерного пространства, заключенную внутри сферы, проходят прямые, не пересекающие сферу. Но этого мы уже не можем вообразить, хотя совсем нетрудно указать такие прямые аналитическим способом.

Начнем с координатной оси OW . Она проходит через центр сферы (5.25) (начало координат), но не имеет со сферой ни одной общей точки. Ведь у всех точек оси OW координаты x, y, z равны нулю и не удовлетворяют уравнению $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho$ сферической поверхности. Можно рассудить иначе: все точки сферы (5.25) принадлежат гиперплоскости $w = 0$, а ось OW пересекается с этой гиперплоскостью в одной-единственной точке $O(0; 0; 0; 0)$, которая не лежит на сфере. Вся внутренняя область сферы (5.25) в гиперплоскости $w = 0$ определяется условием

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \rho. \quad (5.27)$$

Прямая, проходящая через любую точку $S(x_s; y_s; z_s; 0)$ этой области в направлении базисного орта e_4 (см. (5.19) и (5.20)), пересечет гиперплоскость $w = 0$ *только* в самой точке S . Но по условию точка S принадлежит внутренней области (5.27) сферы (5.25), т. е. не может лежать на сфере. Можно брать прямые, проходящие через внутренние точки сферы (5.25) в других направлениях, отличных от OW . Это могут быть прямые, принадлежащие как внутренней области изотропного гиперконуса, так и внешней области. Если только прямая не принадлежит всеми своими точками трехмерному пространству гиперплоскости $w = 0$, она пройдет через внутреннюю область сферы (5.25), не пересекая самой сферы. Таких

ветствовать плоскость OXY , и ось OZ следует мысленно отбросить как не принадлежащую этой плоскости. В гиперплоскости $OYZW$ уравнению $w = 0$ будет соответствовать плоскость OYZ и отбрасывается ось OX , а в гиперплоскости $OZXW$ содержится плоскость OZX и отсутствует ось OY . Таким образом, в рис. 32 можно видеть синтез трех трехмерных псевдоевклидовых гиперплоскостей, а для усиления наглядного впечатления рассматривать каждую из них в отдельности. С изображенным на рис. 32 изотропным конусом можно мысленно связать как каждый из изотропных конусов трехмерных пространств $OXYW$, $OYZW$, $OZXW$, так и изотропный гиперконус четырехмерного пространства. С изображенным на рис. 32 цилиндром можно мысленно связать гиперцилиндр (5.21) либо каждый из цилиндров (5.22), (5.23), (5.24). Пересечения этих цилиндров с координатными плоскостями, перпендикулярными к оси OW , являются окружностями, из которых мы синтезируем образ гиперокружности (сферы), представляющей пересечение гиперцилиндра с гиперплоскостью $w = 0$.

Из мировой точки O (начала координат) наблюдатель может видеть лишь точки гиперцилиндра (5.21), в которых тот пересекается с задней полостью изотропного гиперконуса (5.17), исходящего из точки O как из вершины:

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho \\ w = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho, \\ w = -\rho. \end{cases} \quad (5.28)$$

Множество точек (5.28) представляет собой сферу радиуса ρ , расположенную в собственно евклидовой гиперплоскости $w = -\rho$. Центром сферы является точка $T_1(0; 0; 0; -\rho)$, в которой гиперплоскость $w = -\rho$ пересекается с осью OW . Когда ходом проявляющего процесса наблюдатель будет перенесен вдоль прямой OW в точку $Q(0; 0; 0; w_0)$, он сможет видеть только пересечение гиперцилиндра (5.21) с задней полостью изотропного гиперконуса (5.18), имеющего своей вершиной точку Q :

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho \\ w = w_0 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho, \\ w = w_0 - \rho. \end{cases} \quad (5.29)$$

Множество точек (5.29) представляет собой сферу радиуса ρ , расположенную в собственно евклидовой гиперплоскости $w = w_0 - \rho$ и имеющую центр на оси OW в точке $T_2(0; 0; 0; w_0 - \rho)$. В каждый момент времени восприятию наблюдателя доступны только те точки гиперцилиндра (5.21), которые лежат на сферической поверхности, представляющей пересечение гиперцилиндра с задней полостью изотропного гиперконуса, исходящего из мировой точки наблюдателя как из вершины.

Можно ли сделать отсюда вывод, что в каждый момент времени наблюдатель видит *вокруг себя* сферу? Сомнение связано с тем обстоятельством, что наблюдатель находится не в центре сферы, а в совсем другой гиперплоскости. Например, из точки начала координат O он видит точки сферы (5.28), центр которой находится в *прошлой* мировой точке $T_1(0; 0; 0; -\rho)$. Привычка нашего сознания к трехмерным формам восстает против отождествления центра T_1 сферы с точкой O , лежащей вне сферы. Но вместе с тем нам близка и понятна позиция наблюдателя, строящего свое представление о мире на основании чувственных восприятий. Не имея возможности видеть мировые линии в их протяженности (см. с. 128—129); он не воспринимает различия значений координаты w как различия пространственного положения. Но точка O отличается от точки T_1 лишь значением координаты w , а первые три координаты у них имеют совпадающие значения. Поэтому, на взгляд неподвижного наблюдателя, место, которое он занимает в пространстве в настоящий момент времени, ничем не отличается от того места, которое он занимал в прошлом. Нам необходимо подробно разобраться в этом механизме подмены центра сферической поверхности.

Из центра T_1 сферы (5.28) во всевозможные ее точки M направлены радиусы, ориентация которых в трехмерном собственно евклидовом пространстве гиперплоскости $w = -\rho$ характеризуется значениями углов η и θ (рис. 33). Но наблюдатель видит точки сферы (5.28) не из центра T_1 , а из мировой точки O (см. рис. 32) по образующим изотропного гиперконуса, и для него различия видимых положений точек обусловлены различиями соответствующих изотропных направлений. Значит, нужно понять, каким образом ориентация изотропной по отношению к другим изотропным обретает определенное численное выражение и почему оно совпадает с выражением ориентации радиуса, исходящего из центра сферы.

Сначала упростим задачу, ограничившись трехмерным псевдоевклидовым сечением мира Минковского. Будем смотреть на рис. 32 как на изображение трехмерного пространства координатной гиперплоскости $OXYW$, мысленно отбрасывая ось OZ ($z=0$). Эта гиперплоскость пересекается со сферой (5.28) по окружности

$$\begin{cases} w = -\rho \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = -\rho, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \rho. \end{cases} \quad (5.30)$$

Пусть точка A окружности (5.30) лежит на радиусе T_1A , параллельном оси OX , а точка B расположена на окружности так, что радиус T_1B образует с T_1A угол $\widehat{AT_1B} = \eta$.

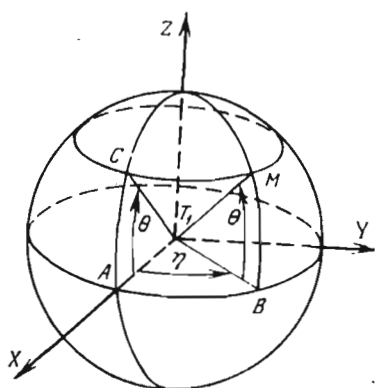


Рис. 33

Наблюдатель видит точки A и B по изотропным OA и OB (см. рис. 32). Можно ли говорить о величине угла между изотропными? Определяемая им плоскость AOB несет на себе псевдоевклидову метрику и не имеет иных изотропных направлений, кроме OA и OB (или параллельных им). Угол между неколлинеарными изотропными в псевдоевклидовой плоскости выражается бесконечно большой мнимой величиной

(см. рис. 14), т. е. не определен. Да и не мог бы наблюдатель заняться измерением этого угла, потому что изотропные, служа путями передачи световых сигналов, сами остаются недоступными зрительному восприятию. Однако в координатной системе, связанной с осью OW , имеет

определенную величину двугранный угол $\widehat{A(OW)B}$ между плоскостями AOW и BOW (см. рис. 32). Мерой двугранного угла является линейный угол между перпендикулярами к ребру двугранного угла, восстановленными в обеих плоскостях (гранях) из одной точки. Окружность (5.30) лежит в плоскости $w = -\rho$, которая перпендикулярна к оси OW и несет на себе собственно евклидову метрику.

Отсюда следует, во-первых, что угол $\widehat{AT_1B} = \eta$ является мерой двугранного угла $\widehat{A(OW)B}$ и, во-вторых, что этот угол выражается вещественным числом, принадлежащим интервалу $[0; 2\pi[$. Видя мировые точки A и B по изотропным OA и OB , наблюдатель вынужден оценивать различие этих направлений в своей координатной системе углом $\widehat{AT_1B}$, потому что чувственно воспринимаемый образ трехмерного псевдоевклидова пространства, лишенный пространственной протяженности в направлении оси OW , оказывается как бы спроектированным на плоскость, перпендикулярную к OW . При другом выборе оси OW различие изотропных направлений OA и OB характеризовалось бы другим двугранным углом.

Перейдем к иному взгляду на рис. 32. Условимся видеть в нем изображение трехмерного псевдоевклидова пространства координатной гиперплоскости $OZHW$, мысленно отбрасывая ось OY ($y = 0$). Эта гиперплоскость пересекается со сферой (5.28) по окружности

$$\begin{cases} w = -\rho \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = -\rho \\ \sqrt{x^2 + z^2} = \rho. \end{cases} \quad (5.31)$$

Точка $A(x_A; 0; 0; -\rho)$ принадлежит окружности (5.31), поскольку координаты этой точки удовлетворяют уравнению окружности. Возьмем на окружности (5.31) мировую точку C и обозначим через θ угол между радиусами T_1A и T_1C . На рис. 33 сфера (5.28) изображена в трехмерном пространстве, и там есть возможность показать, что плоскости окружностей (5.30) и (5.31) взаимно перпендикулярны. На рис. же 32 мы изобразили условно все трехмерное пространство гиперплоскости $w = -\rho$ в виде плоскости, что лишило нас возможности наглядно показать взаимную перпендикулярность плоскостей AT_1B и AT_1C . Поэтому мы прибегаем к приему отдельного рассмотрения гиперплоскостей $OXYW$ и $OZHW$. Итак, в трехмерном пространстве гиперплоскости $OZHW$ различие изотропных направлений OA и OC характеризуется величиной двугранного угла $\widehat{A(OW)C}$, мерой которого служит линейный угол $\widehat{AT_1C} = \theta$.

Окружности (5.30) и (5.31), принадлежащие сфере (5.28), могут быть положены в основу системы координат, позволяющей указать любую точку M на сфере двумя угловыми координатами η и θ (см. рис. 33). На рис. 32 точка M не показана, потому что условность рисунка делает положение этой точки неопределенным. При взгляде на рис. 32 как на изображение трехмерного пространства гиперплоскости $OXYW$ точку $M(\eta; \theta)$ пришлось бы совместить с точкой $B(\eta; 0)$, так как у них совпадают значения угловой координаты η , измеряемой в плоскости OXY . Если же видеть в рис. 32 изображение гиперплоскости $OZXW$, то точку M следует совместить с точкой C . Каждый из этих вариантов приемлем в том случае, когда мы смотрим на рис. 32 как на условное изображение четырехмерного мира Минковского.

Взаимно однозначное соответствие между образующими изотропного гиперконуса и упорядоченными парами $(\eta; \theta)$ значений углов, характеризующими эти направления в координатной системе $OXYZW$, позволяет существенно прояснить представление о сфере. Все возможные направления, которые исходят из мировой точки T_1 и принадлежат гиперплоскости $w = -\rho$, исчерпываются радиусами T_1M точек сферы (5.28). Для того чтобы перебрать все эти направления, достаточно дать угловым координатам η и θ независимо друг от друга любые вещественные значения от 0 до 2π . Выходя за пределы указанного интервала, мы не получим новых точек на сфере, а будем возвращаться к тем, которые уже определены при условиях $0 \leq \eta < 2\pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$. В четырехмерном пространстве из точки T_1 исходит, помимо этих, бесконечно много иных направлений, не принадлежащих гиперплоскости $w = -\rho$, но они уже не упираются в точки сферы (5.28), так как этой сферы нет вне гиперплоскости $w = -\rho$. Каждая образующая задней полости изотропного гиперконуса (5.17), исходя из мировой точки O как из вершины гиперконуса, проходит через одну из точек сферы (5.28). Для наблюдателя, находящегося в вершине изотропного гиперконуса, зрительно воспринимаемый мир состоит только из точек этой сферы. Иных направлений вокруг себя он не видит и не может представить наглядно. Поэтому наблюдателю кажется, что он окружен со всех возможных сторон сферой, и сфера представляется ему такой замкнутой поверхностью, за пределы которой нет выхода, не пересекаю-

щего поверхности. Величины двугранных углов, характеризующие всевозможные изотропные направления гиперконуса (5.17), представляются наблюдателю угловыми характеристиками всех возможных направлений в окружающем мире.

Постараемся придать описываемым отношениям еще бóльшую наглядность с помощью следующего мысленного эксперимента. Представим, что гиперцилиндрический «забор» (5.21) действительно состоит из материальных объектов — мировых линий. Тогда наблюдателю, связанному с мировой прямой OW , будет казаться, что он изолирован материальной сферической оболочкой от всего окружающего мира. Предположим, что ось OW является общей мировой прямой двух наблюдателей вплоть до того момента времени, которому соответствует точка начала координат O . Затем один из наблюдателей (назовем его первым) предпринимает попытку вырваться за пределы гиперцилиндра (5.21), что представляется обоим наблюдателям как попытка вырваться за пределы окружающей сферы. Второй наблюдатель остается на месте (его мировая линия остается совпадающей с осью OW) и ведет наблюдение за этой попыткой. Когда второй наблюдатель увидит, что первый движется к сферической оболочке, реально это будет означать, что мировая линия первого наблюдателя отклонилась от оси OW , перестала быть параллельной ей. Такая мировая линия неминуемо придет в столкновение с одной из образующих прямых гиперцилиндра (5.21). Если эта образующая достаточно прочно связана с соседними мировыми прямыми «забора», то она не испытает существенной деформации и после столкновения останется параллельной оси OW , а мировая линия первого наблюдателя отразится внутрь гиперцилиндра (или сольется с образующей «забора»). Для наблюдателей это означало бы невозможность прорвать окружающую материальную сферическую оболочку. Если же в результате столкновения одна из мировых прямых «забора» отклонилась от направления параллельности оси OW , то мировая линия первого наблюдателя может выйти за пределы гиперцилиндра (5.21) и это будет воспринято обоими наблюдателями как прорыв через оболочку сферы.

После прорыва в гиперцилиндре (5.21) будет недоставать одной образующей мировой прямой. Пересечение такого «взломанного забора» с изотропным гиперконусом, имеющим вершину в мировой точке второго наблюдате-

ля на оси OW , будет сферой, в которой одна точка пуста, т. е. не заполнена материальной точкой. Второй наблюдатель будет видеть здесь отверстие в сферической оболочке, через которое вышел первый наблюдатель. Пусть теперь первый наблюдатель предпримет наружное обследование покинутого места заключения. Цепляясь снаружи за мировые прямые, образующие гиперцилиндр (5.21), он будет перебирать их одну за другой и как-нибудь пометать, например, краской. Имеющаяся у исследователя баночка с краской представляет тоже некоторую мировую линию в четырехмерном мире Минковского. Беря каплю краски, наблюдатель-путешественник отделит от этой мировой линии более тонкую нить, которая отныне сольется с той мировой прямой — образующей гиперцилиндра (5.21), которую путешественник пометил. Если в дальнейшем он снова встретится с этой прямой, то найдет ее окрашенной и воспримет как окрашенную материальную точку. Предположим, что гиперцилиндрический «забор» обладает некоторой прозрачностью. Тогда второй наблюдатель, оставшийся внутри, будет видеть первого, перемещающегося снаружи. Когда первый наблюдатель закончит перебирать все образующие гиперцилиндра (5.21), второй подтвердит это, сообщив, что путешественник побывал в каждой точке сферы, окружающей наблюдателя. Путешественник и сам убедится в этом, не найдя снаружи оболочки ни одной неокрашенной материальной точки. И оба наблюдателя останутся при том мнении, что в мире нет иных направлений, кроме направлений от наблюдателя к точкам окружающей сферы, и что обследованная материальная сферическая оболочка *со всех сторон* окружена пустым пространством, «висит» в пустоте. Но мы понимаем, что в действительности мировая линия первого наблюдателя только сделала виток вокруг гиперцилиндрического «забора» (5.21), выстроенного из «столбов» проявленных прямолинейных образующих. Не так ли люди, летающие на космических кораблях вокруг земного шара, считают его большой каплей вещества, парящей в пустоте, и не замечают, что они только плетут некоторый узор из своих мировых линий вокруг гиперцилиндра, который в космических масштабах представляет мировую линию планеты Земля в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве?

Мы рассматривали парочку простую симметричную конструкцию — гиперцилиндр (5.21), окружающий миро-

вую прямую наблюдателя, чтобы легче было разобраться с помощью формул в зрительно воспринимаемой картине окружающего мира. Теперь можно отказаться от искусственных ограничений. Пусть мировые прямые, параллельные мировой прямой наблюдателя OW , расположены не на одинаковых расстояниях ρ от нее, а на различных расстояниях в разных направлениях. Тогда точки пересечения прямых с изотропным гиперконусом, имеющим вершину в мировой точке наблюдателя, будут принадлежать сферическим поверхностям различных радиусов, расположенным в различных гиперплоскостях. Но направления образующих изотропного гиперконуса все равно будут характеризоваться в координатной системе $OXYZW$ величинами η и θ двугранных углов, и наблюдатель все равно будет ощущать себя центром каждой сферы, так что весь окружающий мир будет представляться ему спроектированным на сферическую поверхность. Условие параллельности других мировых линий с осью OW тоже не обязательно. Мировые линии, прямые или кривые, не лежащие в одной плоскости с осью OW , будут восприниматься наблюдателем в виде точек, перемещающихся со временем на фоне окружающей сферы.

Мировые точки, проектирующиеся в одну точку видимой сферы, лежат на одной изотропной, и расстояние между ними равно нулю. Но они служат представителями различных материальных объектов — пространственно разделенных мировых линий. При ином расположении наблюдателя по отношению к этим линиям на них будут видны другие точки, лежащие на различных изотропных и проектирующиеся в различные точки сферы. Для ближайшего окружения наблюдателя достаточно заметное изменение точки зрения возникает уже при рассмотривании объектов то правым, то левым глазом, а наложение зрительных впечатлений от обоих глаз создает стереоскопический эффект. Кроме того, наблюдатель имеет возможность искривлять свою мировую линию. Это позволяет ему достигать более существенных изменений положения по отношению к окружающим объектам, а также переходить от одной мировой линии к другой. Так мы осознаем, что видимый мир имеет протяженность вдоль луча зрения, притом протяженность неограниченную. Поэтому окружающий мир представляется нам шаром бесконечного радиуса, т. е. трехмерным пространством.

Поскольку различия значений координаты w не воспринимаются зрительно, видимый мир представляется лишенным протяженности в направлении оси OW . Фиксация координаты w , т. е. условие $w = \text{const}$, выделяет из четырехмерного мира Минковского трехмерное собственно евклидово пространство гиперплоскости, состоящей из точек, одновременных в координатной системе $OXYZW$. Гиперплоскости, различающиеся значением постоянной в уравнении $w = \text{const}$, взаимно параллельны, не совмещаются, но те точки этих гиперплоскостей, которые доступны зрительному восприятию наблюдателя, кажутся ему принадлежащими одному и тому же воспринимаемому чувствами трехмерному пространству. Такое впечатление обусловлено двумя обстоятельствами. Во-первых, только различие значений *трех* координат x, y, z имеет для чувственных восприятий вид и смысл пространственных различий. Во-вторых, геометрические условия механизма зрительных восприятий исключают наложение друг на друга точек, имеющих совпадающие значения координат x, y, z , но расположенных в различных гиперплоскостях. Ведь в каждой отдельно взятой гиперплоскости $w = \text{const}$ наблюдению доступны только точки сферы, по которой пересекается эта гиперплоскость с изотропным гиперконусом, исходящим из мировой точки наблюдателя как из вершины. Весь остальной зрительно воспринимаемый мир состоит из точек других сфер, принадлежащих другим собственно евклидовым гиперплоскостям и различающихся величиной радиуса. Например, если в настоящий момент времени (в мировой точке O) восприятию наблюдателя доступны точки сферы (5.28), принадлежащей гиперплоскости $w = -\rho$, то в этот момент он не может видеть точек сферы $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho$ *такого же радиуса*, расположенной в другой гиперплоскости, определяемой уравнением $w = -(\rho + \Delta\rho)$. Таким образом, каждая гиперплоскость $w = -\rho$ ($0 \leq \rho < \infty$) четырехмерного мира Минковского вносит свой вклад в виде сферического слоя $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho$ в синтетический образ наблюдаемого трехмерного пространства.

Пока наблюдатель остается связанным с одной и той же мировой прямой OW (с одной и той же инерциальной системой координат в воспринимаемом чувствами пространстве), метрические отношения между доступными его восприятию мировыми точками из различных па-

раллельных гиперплоскостей формируются в терминах трехмерного пространства так, как если бы все точки принадлежали одной собственно евклидовой гиперплоскости, перпендикулярной к оси OW . Но с изменением направления мировой линии наблюдателя (при переходе к другой инерциальной системе координат, движущейся относительно первоначальной) изменяются и перпендикулярные к ней гиперплоскости, вносящие вклад в чувственно воспринимаемое пространство. В этом новом синтетическом образе пространства наблюдаемые точки мировых линий находятся в иных метрических отношениях между собой, чем в прежнем, связанном с первой системой координат пространстве. Наблюдателю же кажется, что вследствие изменения координатной системы изменились метрические характеристики одних и тех же материальных объектов. При достаточной точности измерений он обнаружит зависимость длин, промежутков времени и массы от выбора инерциальной системы координат. Эти парадоксы относительности были бы невозможны, если бы мировое пространство объективно было трехмерным и собственно евклидовым. На самом деле оно лишь кажется таким, а объективные линейные и метрические свойства мира, не зависящие от выбора координатной системы, мы находим в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве.

Приложение

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ

В трехмерном псевдоевклидовом пространстве рассмотрим геометрическое место точек, радиус-векторы \mathbf{r} которых перпендикулярны к изотропному радиус-вектору

$$\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{e}_1 + y_0 \mathbf{e}_2 + z_0 \mathbf{e}_3 \quad (x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 0). \quad (6.1)$$

Условием перпендикулярности является обращение в нуль скалярного произведения векторов

$$\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{r} \rangle = 0, \quad (6.2)$$

что в координатной форме выражается так (см. (4.3)):

$$x_0 x + y_0 y - z_0 z = 0. \quad (6.3)$$

В отображении псевдоевклидова трехмерного пространства на собственно евклидово трехмерное пространство уравнению (6.3) соответствует плоскость, проходящая через начало координат. Поскольку линейные свойства этих пространств одинаковы, а принадлежность точек к плоскости является линейным свойством (см. с. 33—34), заключаем, что и в псевдоевклидовом пространстве уравнением (6.3) определяется плоскость. По условию построения (6.2) плоскость (6.3) содержит в себе *все* радиус-векторы, перпендикулярные к \mathbf{r}_0 , а так как \mathbf{r}_0 , будучи изотропным, перпендикулярен сам к себе, то и он содержится в плоскости (6.3). В этом легко убедиться, подставляя в уравнение (6.3) координаты радиус-вектора \mathbf{r}_0 и принимая во внимание условие его изотропности (см. (6.1)):

$$x_0 x_0 + y_0 y_0 - z_0 z_0 = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 0.$$

С другой стороны, в плоскости (6.3) нет ни одного радиус-вектора, не перпендикулярного к \mathbf{r}_0 . Значит, в ней нет ни одной образующей изотропного конуса (4.7), неколлинеарной \mathbf{r}_0 . Таким образом, плоскость (6.3) имеет одну, и только одну, общую прямую с изотропным конусом (4.7), т. е. является *касательной* к конусу. Она называется *изотропной плоскостью*.

Изотропная плоскость не является собственно евклидовой плоскостью, поскольку в ней имеется изотропная прямая, вернее, бесконечно много изотропных прямых одинакового направления (*параллельных*). Но изотропная плоскость не является и псевдоевклидовой, так как в ней имеется только одно изотропное направление, а не два, как в псевдоевклидовой плоскости. Кроме того, изотропная плоскость не содержит ни одного вектора мнимой длины, поскольку она не проникает во внутреннюю область изотропного конуса, а лишь касается его. Докажем последнее утверждение более строго аналитически.

Допустим противное: будто в изотропной плоскости (6.3) найдется хотя бы один радиус-вектор

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3,$$

принадлежащий внутренней области (4.8) изотропного конуса. Это допущение выражается следующей системой условий:

$$\begin{cases} z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 & \text{— изотропность вектора } \mathbf{r}_0, \\ z_0 z = x_0 x + y_0 y & \text{— уравнение плоскости (6.3),} \\ z^2 > x^2 + y^2 & \text{— принадлежность вектора } \mathbf{r} \text{ внутренней} \\ & \text{области изотропного конуса.} \end{cases} \quad (6.4)$$

Доказав несовместимость условий (6.4), мы докажем, что в изотропной плоскости нет ни одного вектора мнимой длины.

Преобразуем систему условий (6.4), возводя в квадрат второе уравнение:

$$\begin{cases} z_0^2 = x_0^2 + y_0^2, \\ z_0^2 z^2 = x_0^2 x^2 + y_0^2 y^2 + 2x_0 y_0 xy, \\ z^2 > x^2 + y^2. \end{cases} \quad (6.5)$$

Здесь последнее условие равносильно каждому из неравенств

$$x^2 < z^2 - y^2, \quad y^2 < z^2 - x^2,$$

которые, будучи применимы ко второму уравнению, приводят к неравенству

$$z_0^2 z^2 < x_0^2 (z^2 - y^2) + y_0^2 (z^2 - x^2) + 2x_0 y_0 xy,$$

или

$$z_0^2 z^2 < (x_0^2 + y_0^2) z^2 - (x_0 y - y_0 x)^2.$$

Последнее неравенство можно разделить на z^2 (поскольку для точек внутренней области (4.8) изотропного конуса $z^2 > 0$):

$$z_0^2 < x_0^2 + y_0^2 - \left(\frac{x_0 y - y_0 x}{z} \right)^2.$$

Таким образом, из системы (6.5) следует система условий

$$\begin{cases} z_0^2 = x_0^2 + y_0^2, \\ z_0^2 < x_0^2 + y_0^2 - \left(\frac{x_0 y - y_0 x}{z} \right)^2. \end{cases} \quad (6.6)$$

Второе условие системы (6.6) несовместимо с первым, так как при

$$z_0^2 = x_0^2 + y_0^2$$

получим

$$0 < - \left(\frac{x_0 y - y_0 x}{z} \right)^2.$$

Здесь выражение в правой части может быть только либо отрицательным числом, либо нулем, и не может быть больше нуля. Значит, и система (6.5) несовместима, а отсюда следует, что несовместима и система условий (6.4), т. е. вектор мнимой длины не может принадлежать изотропной плоскости.

Аналогичным путем доказывается, что в изотропной плоскости (6.3) имеются векторы, принадлежащие внешней области (4.9) изотропного конуса. Этого и следовало ожидать от плоскости, касательной к изотропному конусу. Все изотропные прямые, имеющиеся в изотропной плоскости, являются взаимно параллельными образующими других изотропных конусов, которых касается данная плоскость.

Итак, в изотропной плоскости имеются только неизотропные векторы вещественной длины и взаимно параллельные изотропные векторы. Те и другие перпендикулярны к изотропному радиус-вектору \mathbf{r}_0 согласно уравнению (6.2) плоскости. Для нас уже привычно, что взаимно параллельные изотропные векторы вместе с тем взаимно перпендикулярны, поскольку каждая изотропная прямая перпендикулярна к самой себе (см. с. 77). Теперь надлежит понять, что в *изотропной* плоскости все векторы вещественной длины перпендикулярны к изотропному направлению. Напомним для сравнения, что в *псевдоевклидовой* плоскости нет ни одной прямой, неколлинеарной изотропному направлению, которая была бы перпендикулярна к нему.

Рисунок 34 представляет попытку изобразить метрические свойства изотропной плоскости в наглядной форме. Конечно, это *условное* изображение, так как плоскость рисунка является собственно евклидовой. Здесь точка O — полюс трехмерного псевдоевклидова пространства, $\overline{OL} = \mathbf{r}_0$ — тот самый изотропный радиус-вектор, который служит нормалью к плоскости (6.3) и по которому плоскость касается изотропного конуса (4.7). Тонкие прямые, параллельные вектору \overline{OL} , изображают другие изотропные прямые изотропной плоскости (6.3). Вектор

$$\overline{OM} = \mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

неколлинеарен изотропному направлению \mathbf{r}_0 и, следовательно, имеет вещественную длину

$$|\overline{OM}| = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}, \quad (6.7)$$

$$x^2 + y^2 - z^2 > 0.$$

Вектор

$$\overline{LM} = \overline{OM} - \overline{OL} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0)\mathbf{e}_1 + (y - y_0)\mathbf{e}_2 + (z - z_0)\mathbf{e}_3$$

тоже неколлинеарен вектору \mathbf{r}_0 и тоже имеет вещественную длину

$$|\overline{LM}|^2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 =$$

$$= \langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 =$$

$$= (x^2 + y^2 - z^2) + (x_0^2 + y_0^2 - z_0^2) - 2(xx_0 + yy_0 - zz_0) =$$

$$= (x^2 + y^2 - z^2) + 0 - 2 \cdot 0 = x^2 + y^2 - z^2 > 0. \quad (6.8)$$

Сравнивая (6.8) с (6.7), видим, что

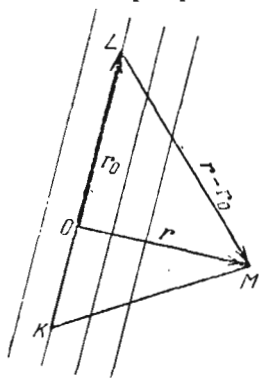
$$|\overline{LM}| = |\overline{OM}| = |\mathbf{r}|$$

— длины отрезков LM и OM одинаковы!

Изотропная плоскость является замечательный пример противопоставления линейных и метрических свойств пространства. В ней линейные свойства сочетаются с метрическими совершенно непривычным для нас образом, формируя две различные системы взглядов как две самостоятельные логические линии в геометрических суждениях.

Начнем с изотропного вектора \mathbf{r}_0 . По своим метрическим свойствам это вектор нулевой длины ($|\mathbf{r}_0| = 0$). По своим линейным свойствам это ненулевой вектор. Определение нулевого вектора дается третьей аксиомой линейного пространства (см. 3° на с. 27):

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}.$$



$$|\overline{OM}| = |\overline{LM}| = |\overline{KM}|$$

Рис. 34

У нулевого геометрического вектора точка начала совпадает с точкой конца. У изотропного вектора $\mathbf{r}_0 = \overline{OL}$ начало и конец находятся в различных точках и он не удовлетворяет определению нулевого вектора:

$$\mathbf{r}_0 + \overline{LM} = \overline{OM} \neq \overline{LM}.$$

Векторы \overline{OM} и \overline{LM} неколлинеарны изотропному вектору $\overline{OL} = r_0$ и друг другу, но оба они перпендикулярны к r_0 . В собственно евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях два вектора, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны друг другу. В изотропной плоскости этот «обычай», как видим, нарушен, однако имеется метрический суррогат параллельности: величина угла между векторами \overline{OM} и \overline{LM} выражается числом нуль. Действительно, согласно общему определению величины угла (см. с. 38) формулой (1.30) имеем

$$\cos(\widehat{OM, LM}) = \frac{\langle \overline{OM}, \overline{LM} \rangle}{|\overline{OM}| \cdot |\overline{LM}|} = \frac{\langle r, r - r_0 \rangle}{|r| \cdot |r|} = \frac{\langle r, r \rangle - \langle r, r_0 \rangle}{|r|^2} = \frac{|r|^2 - 0}{|r|^2} = 1 \quad (6.9)$$

(здесь учтены соотношения (6.2), (6.7), (6.8)). Но функция косинус принимает вещественное значение 1 только при обращении аргумента в нуль, будет ли это комплексное число $(0; 0) = 0 + i \cdot 0$, вещественное число 0 или мнимое число $i \cdot 0$ (см. (2.35), (2.36)). Поскольку в изотропной плоскости нет векторов, длина которых выражалась бы мнимыми числами, следует считать, что в соотношении (6.9) аргумент косинуса принимает *вещественное* значение

$$\widehat{OM, LM} = 0. \quad (6.10)$$

Учитывая широкий произвол в выборе векторов \overline{OM} и \overline{LM} , заключаем, что равенство (6.10) справедливо для *любых* векторов вещественной длины в изотропной плоскости. Этот вывод вполне соответствует логике *метрических* отношений: раз векторы перпендикулярны к одному изотропному направлению r_0 , то и угол между ними равен нулю.

Своеобразно разрешается в изотропной плоскости вопрос о величине угла между вектором вещественной длины и изотропным вектором. В псевдоевклидовой плоскости, где нам впервые встретились изотропные прямые, этот угол не имеет определенной величины, характеризуясь бесконечно большим мнимым числом $i \cdot \infty$. В изотропной плоскости угол не может выражаться мнимым числом, потому что в ней нет векторов мнимой длины. Применяя универсальное аналитическое определение (1.30) косинуса угла через скалярное произведение векторов, получим для каждого из углов \widehat{LOM} и \widehat{OLM} на рис. 34 неопределенность вида $\frac{0}{0}$:

$$\cos(\widehat{LOM}) = \cos(\widehat{OL, OM}) = \cos(\widehat{r_0, r}) = \frac{\langle r_0, r \rangle}{|r_0| \cdot |r|} = \frac{0}{0 \cdot |r|} = \frac{0}{0},$$

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{OLM}) &= \cos(\widehat{LO}, \widehat{LM}) = \cos(-\widehat{r_0}, \widehat{r-r_0}) = \\ &= \frac{-\langle r_0, r-r_0 \rangle}{|r_0| \cdot |r-r_0|} = \frac{-\langle r_0, r \rangle + \langle r_0, r_0 \rangle}{|r_0| \cdot |r|} = \frac{-0+0}{0 \cdot |r|} = \frac{0}{0}. \end{aligned}$$

Эту неопределенность можно раскрыть, пользуясь геометрическим определением косинуса как отношения длин сторон в треугольнике, в котором есть взаимно перпендикулярные стороны. Имея в виду, что в треугольнике LOM на рис. 34 сторона OM перпендикулярна стороне OL , находим

$$\cos(\widehat{OLM}) = \frac{|\overline{OL}|}{|\overline{LM}|} = \frac{|r_0|}{|r|} = \frac{0}{|r|} = 0.$$

Функция косинус обращается в нуль только при вещественных значениях аргумента, равных $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где n — любое целое число. Отсюда заключаем, что

$$\widehat{OLM} = \pi/2. \quad (6.11)$$

Точно так же можно показать, что $\widehat{LOM} = \pi/2$, причем для наглядности следовало бы начертить отрезок \overline{LM} в виде перпендикуляра к \overline{OL} , а отрезок \overline{OM} в виде наклонной. Такое изменение в условном изображении не будет противоречить истинным метрическим отношениям на изотропной плоскости, потому что векторы \overline{LM} и \overline{OM} , как и все неизотропные векторы изотропной плоскости, перпендикулярны к изотропной прямой OL . Но на собственно евклидовой плоскости рисунка лишь один из бесчисленного множества перпендикуляров, опущенных из точки M на прямую OL , может быть изображен под прямым углом к OL .

Противоречия истинных метрических отношений на изотропной плоскости с их видимым изображением на рис. 34 снимаются тем обстоятельством, что длина любого отрезка изотропной прямой равна нулю. Проводя из точки M прямые через произвольные точки L и K , лежащие на одной изотропной, не проходящей через M , мы получим треугольник KLM , в котором длина основания KL равна нулю. Поэтому по логике метрических отношений из перпендикулярности сторон ML и KL должна вытекать перпендикулярность сторон MK и KL . В треугольнике KLM на изотропной плоскости углы \widehat{MKL} и \widehat{MLK} при основании равны $\pi/2$ каждый, а угол \widehat{KML} равен нулю. Сумма всех внутренних углов треугольника оказывается равной π (как в собственно евклидовой плоскости!), и равенство углов при основании сопровождается равенством боковых сторон ($|\overline{KM}| = |\overline{LM}|$).

Вообще на изотропной плоскости угол между векторами может принимать лишь одно из двух значений: угол между любыми неизотропными векторами равен нулю (см. (6.10)), угол между любым неизотропным вектором и изотропным равен $\pi/2$. Все изотропные прямые на изотропной плоскости параллельны между собой, но отношение параллельности, как линейное свойство пространства, само по себе не характеризуется величиной угла. Вместе с тем изотропные прямые изотропной плоскости перпендикулярны одна другой и каждая самой себе. Метрическому отношению перпендикулярности изотропных не соответствует определенная величина угла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркс К.* К критике политической экономии. Собр. соч., т. 13, с. 43.
2. *Маркс К.* Капитал, т. III, гл. 48. Собр. соч., т. 25, ч. 2, с. 384.
3. *Энгельс Ф.* Диалектика природы. Мера движения. Работа. Собр. соч., т. 20, с. 408.
4. *Ленин В. И.* Материализм и эмпириокритицизм, гл. 2, § 4. Полн. собр. соч., т. 18, с. 130.
5. Принцип относительности. Сборник работ по специальной теории относительности.— М.: Атомиздат, 1973, с. 173, 167, 168.
6. *Угаров В. А.* Специальная теория относительности.— М.: Наука, 1977, с. 315—332, 146.
7. *Эйнштейн А.* К электродинамике движущихся тел. Собр. научн. трудов, т. 1.— М.: Наука, 1965, с. 10.
8. *Шоке Г.* Геометрия.— М.: Мир, 1970, с. 14, 10.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия.— М.: Наука, 1981, с. 46.
10. *Дубнов Я. С.* Основы векторного исчисления, ч. 1.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950, с. 21.
11. *Сойер У. У.* Прелюдии к математике.— М.: Просвещение, 1972, с. 8, 54.
12. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.— М.: Наука, 1984, с. 41, 82.
13. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ.— М.: Наука, 1967, с. 86, 296.
14. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения.— М.: Наука, 1985, с. 83.
15. *Барсуков А. И.* Алгебра, ч. 1.— М.: Учпедгиз, 1958, с. 50.
16. Алгебра, геометрия. Пробные учебники для 7 класса средней школы.— М.: Просвещение, 1983, с. 72.
17. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, т. 1.— М.: Наука, 1968, с. 16.
18. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ, ч. 1.— М.: Наука, 1985, с. 5.
19. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры.— М.: Гостехиздат, 1952, с. 9.
20. *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // УФН.— 1968.— Т. 94, вып. 3.— С. 537, 540.
21. *Савельев П. В.* Курс общей физики, т. 1.— М.: Наука, 1986, с. 51.
22. *Храмов Ю. А.* Физики. Биографический справочник.— М.: Наука, 1983, с. 169, 278, 225.

23. *Эйнштейн А.* О принципе относительности и его следствиях. Собр. научн. трудов, т. 1.— М.: Наука, 1965, с. 74.
24. *Эйнштейн А., Инфельд Л.* Эволюция физики. Собр. научн. трудов, т. 4.— М.: Наука, 1967, с. 477.
25. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля.— М.: Наука, 1973, с. 20—21.
26. Таблицы физических величин/Под ред. И. К. Кикоина.— М.: Атомиздат, 1976, с. 31.
27. *Шпольский Э. В.* Атомная физика, т. 1.— М.: Наука, 1984, с. 37.
28. *Эйнштейн А.* Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии? Собр. научн. трудов, т. 1.— М.: Наука, 1965, с. 38.
29. *Вихман Э.* Квантовая физика. Берклевский курс физики, т. 4.— М.: Наука, 1986, с. 159.
30. *Хайкин С. Э.* Физические основы механики.— М.: Физматгиз, 1963, с. 143.
31. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики.— М.: Наука, 1983, с. 18—21.

ПРОБЛЕМЫ НАУКИ
И ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА

А. А. САЗАНОВ

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ МИР МИНКОВСКОГО

70 коп.

