И.А. Курилин

Несимметричная аффинная связность в “ТЕОРИИ ПОЛЕЙ ВРЕМЕНИ” и реализация программы Эйнштейна по поиску геометрии для построения теории единого грави-электромагнитного поля

“Сам Эйнштейн понимал, что его пространство на самом деле может оказаться неадекватным, потому что совсем по-разному включает гравитационное поле и поле электромагнитное.…Построение пространства, которое объединило бы гравитационное и электромагнитное поле, до сих пор остается одной из фундаментальных проблем физики”.

П.А.М. Дирак

Введение

Предлагаемая вниманию работа содержит дальнейшее развитие идей и уточнение предварительных результатов, первоначально сформулированных в работе 1992-1994 годов: **“Об одном возможном подходе к вопросу построения Единой физической теории”**, основные выводы которой были изложены в феврале 1996 года в докладе на межвузовской научной конференции и опубликованы в межвузовском сборнике научных трудов в 1997 году, а также в докладе с аналогичным названием на Девятой Международной научной конференции в апреле 2008 года в “Российском Новом Университете” (РосНОУ, г. Москва) и опубликованных в сборнике трудов конференции: **“Цивилизация знаний: инновационный переход к обществу высоких технологий”**.

Настоящая концепция, определяемая автором как **“Теория полей времени”** (ТПВ), целиком основана на нетрадиционных представлениях о геометрической структуре и свойствах “пространства-времени”, которые позволяют сформулировать основополагающие принципы для нового подхода к задаче построения Единой теории классического (не квантованного) поля, как поля несимметричной аффинной связности на четырехмерном многообразии с дефинитной метрикой Римана (т.е. знакопостоянной квадратичной формой на векторах, нигде, или по крайней мере в конечной и достаточно обширной области четырехмерного многообразия, не обращающейся в ноль), которая определенным образом согласована с ковариантным дифференцированием (согласованность по Э. Шредингеру, **[1]**). Не следует, однако, думать, что речь идет о некоторой модификации или даже частном случае какой-либо из рассматривавшихся в специальной литературе теорий: симметричная теория Вейля, несимметричная теория Эйнштейна-Штрауса, чисто аффинная теория Эддингтона-Эйнштейна, а также теории на основе геометрии абсолютного параллелизма, например, теория “Торсионных полей” Г.И. Шипова (существенную роль в этой теории играет кручение Риччи - несимметричная часть связности геометрии абсолютного параллелизма), которая с точки зрения представлений о структуре “пространства-времени”, а также природе самого времени, не продвинулась дальше традиционных представлений специальной теории относительности (СТО) А. Эйнштейна. Все названные здесь теории оставляют незыблемыми исходные постулаты и принципы Эйнштейновской СТО относительно “пространства-времени” и по этой причине не являются конкурентами для ТПВ. Последнее означает, что ТПВ предполагает далеко идущую “модификацию” принципов СТО, которая с формальной точки зрения сводится:

1) к замене группы Лоренца полной группой ортогональных преобразований **O(4)** в четырехмерном пространстве;

2) к замене индефинитной метрики Минковского дефинитной евклидовой метрикой.

Иначе говоря, в рамках таким образом “модифицированной” СТО (будем всюду далее для определенности и отличия от эйнштейновской специальной теории относительности называть ее МСТО) речь идет об однородном и изотропном четырехмерном пространстве, в котором все координаты и направления – равноправны. При переходе к общековариантному описанию ТПВ евклидова метрика, очевидно, заменяется дефинитной римановой метрикой.

Столь радикальная модификация СТО ставит целый ряд вопросов:

1) возможно ли в принципе подобное изменение СТО с учетом того обстоятельства, что *“Специальная теория относительности является общепринятой научным сообществом и составляет краеугольный камень базиса современной физики”*, или та же мысль, сформулированная У. Бёрке: *“Специальная теория относительности стала в наши дни по сути инженерной наукой, так как ни один из современных ускорителей заряженных частиц не может быть спроектирован и построен без ее привлечения”* (**[2]**);

2) возможно ли примирить идеи, положенные в основание МСТО с богатым экспериментальным материалом, на котором покоится уверенность в незыблемости принципов СТО;

3) для чего вообще следует предпринимать столь далеко идущую модификацию СТО?

На последний вопрос ответ дает Дирак, точка зрения которого сводится к следующему: *“Я бы сказал, что с задачей приведения в соответствие обычной квантовой механики и четырехмерной теории относительности Эйнштейна пока не удалось справиться. Над этой задачей много трудились, но она все еще не решена, если не считать нескольких простых случаев, с участием одной частицы. Современные физики проявляют большую изобретательность, пытаясь закрыть глаза на бесконечности, которые возникают естественным образом при обычных вычислениях. Мне все же кажется, что такой путь неправилен по своей сути. Работа такого рода наверняка не понравилась бы Эйнштейну”* (**[3]**). Далее: *“Такая точка зрения оправдывается явной нелогичностью уравнений стандартной квантовой механики в том смысле, что при попытке применить их к некоторым частным задачам возникают бесконечности. Большинство физиков были вполне довольны достигнутой точностью теории, но Эйнштейн не сдавался. Он, конечно, знал об этой точности, но все же считал, что теория неверна в самой основе, а потому выбранный путь не приведет к серьезным успехам в физике”* (там же). И наконец: *“Очевидно, что* ***современная ситуация далеко не удовлетворительна, так как совместить квантовую теорию с теорией относительности не удалось”*** (там же, выделено мной).

Что же касается успехов на пути “Великого объединения”, суперсимметрии и супергравитации, то Дирак говорит: *“Это очень сложная задача, исследованием которой уже очень много занимались,* ***но мне не кажется, что работа в целом идет по правильному пути.*** *Я не одобряю такой путь, потому что при этом* ***все равно сохраняется уже упоминавшаяся мною трудность в достижении согласия хотя бы между специальной теорией относительности и законами квантовой механики”*** (там же, выделено мной). И последнее: *“Мы должны, конечно, понимать, что задача еще не решена и что все недостатки и неудачи современной теории следует относить на счет ее* *несовершенства. Необходимо изучить это несовершенство и попытаться от него избавиться"* (там же).

Итак, вслед за Дираком зададим вопрос: *"Здесь шла речь о двух достижениях физики: теории относительности и квантовой механике. Как же их совместить?* ***Физика должна быть единой****. Мы должны иметь единственную теорию, согласную как с принципами теории относительности, так и с принципами квантовой теории.* ***Как построить такую теорию?"*** (там же, выделено мной).

Ответ на этот вопрос, по-видимому, связан с тем, что раз не удается решить проблему со стороны квантовой теории, надо пробовать решать ее с другой стороны, изменяя представления о структуре пространства-времени и природе самого времени. Речь идет о том, чтобы в рамках специальной теории относительности (точнее в рамках МСТО) оперировать временем так, как это принято в классической механике, т.е. вернуть времени статус **"абсолютного"** (в понимании Ньютона) времени $\boldsymbol{\tau}$, рассматривая его как независимый временной параметр, дифференциал которого является полным. Это "абсолютное" время определяет мировую линию частицы четырьмя параметрическими уравнениями в полной аналогии с классической механикой. Тем самым намечается путь преодоления противопоставления релятивистской механики и квантовой механики, в которой время также носит характер параметра, а не координаты. Более того, на этом пути напрашивается естественное обобщение предложенной здесь схемы: считать все тензорные поля зависящими не только от четырехмерных координат, но также явно зависящими от временного параметра $\boldsymbol{\tau}$. Таким образом, все динамические переменные становятся функциями **пяти** переменных, а инварианты кривизны **R** и **G** становятся функциями параметра $\boldsymbol{\tau}$. При этом подходе еще в большей степени достигается согласие с классическим и в частности гидродинамическим подходом, когда частица материи интерпретируется как специфическое решение уравнений поля, отвечающее локализации векторного поля скорости на **"поверхности частицы"**. При таком "квази-пятимерном" подходе квантовую механику, по-видимому, можно будет снова рассматривать как **"**классическую**"** волновую теорию, уравнения которой должны описывать волновые движения некоторой непрерывной четырехмерной "среды" с заданными граничными (краевыми) условиями.

И последнее, появляется надежда избавиться от "бесконечностей" всех видов, поскольку в МСТО нет расходимости массы, энергии, импульса в релятивистском приближении.

Вопрос о необходимости глубокой модификации СТО имеет еще один (неожиданный с точки зрения автора) аспект, который нужно отметить, чтобы расставить все точки над **i**. В своей книге (**[2]**) У. Берке сформулировал это так: *"Из всех разделов физики только термодинамика привлекает большее число чудаковатых ниспровергателей истин, чем специальная теория относительности. Правильно ли поступают ученые, игнорируя их критику? Не следует ли проанализировать каждое критическое замечание в соответствии с его научной ценностью, чтобы из-за присущего нам консерватизма не прозевать следующую научную революцию? Нет, не следует".* Разумеется, У. Берке волен поступать так, как считает нужным, но делать заявления от имени всех ученых ему бы не следовало. Трудно себе представить, что присущий ему консерватизм нашел поддержку у Дирака или самого Эйнштейна.

Предварительные исследования автора (в работе 1992-1994 годов) показали, что на первые два вопроса, сформулированные выше, можно дать вполне конкретные положительные ответы. Однако, рассмотрение этих вопросов не является предметом настоящей статьи в первую очередь потому, что помимо изложения собственных результатов и выводов МСТО (связанных с возможностью построения такой альтернативной концепции, которая не вступает в противоречие с накопленным на настоящий момент времени экспериментальным материалом) требуется подвергнуть детальному сравнительному анализу выводы самой СТО, а также логику, которая приводит к этим выводам (на основе анализа опубликованных различными авторами материалов – статей, монографий, учебных пособий для студентов физических специальностей и т.д.) и посвятить этому отдельную работу. Более того, такого рода масштабная работа по полноценному анализу непротиворечивости МСТО всем известным экспериментальным фактам, по-видимому, не может быть выполнена одним человеком, а требует коллективных усилий многих заинтересованных в этом исследователей. Автором в этом направлении были предприняты в 1992-1994 годах некоторые скромные усилия, в результате которых стало ясно, что поставленная задача не является призрачным фантомом и может быть реально достигнута. В заключении отметим важный для МСТО с нашей точки зрения вывод, который делает Макс Джеммер, обсуждая в своей книге (**[4]**) вопрос об интерпретации опытных данных в СТО. В частности, рассматривая вопрос о том, действительно ли масса движущегося тела зависит от скорости, Макс Джеммер приходит к заключению о необходимости иметь в виду следующие обстоятельства:

1) Интерпретация опытных данных является сложной проблемой и *"сама может быть неоднозначной даже в рамках принятой теоретической схемы"* (имеется в виду Эйнштейновская СТО).

2) "*Подобно тому, как дорелятивистское определение инертной массы было частью и областью физической теории как целого, экспериментальное определение массы в теории относительности чрезвычайно* ***тесно связано с множеством операций и интерпретаций и не должно рассматриваться в качестве изолированного факта***" (здесь и далее выделено мной).

3) "*То, что основные понятия* ***имеют характер определения****, имеет свою аналогию в интерпретации экспериментальных результатов...* ***Масса в теории относительности является просто результатом некоторых операций, определения****..., которые внутренне связаны с* ***пространственно-временными представлениями****. Только благодаря этим связям результат измерительных операций действительно зависит от скорости*".

Таким образом, понятие массы (и в общем случае иные фундаментальные физические понятия), во-первых, тесно связано с системой определений и операций, включаемых в ту или иную теоретическую схему в виде исходных, во-вторых, с конкретной интерпретацией опытных данных, которая сама может быть неоднозначной даже в рамках принятой теоретической схемы. Естественно, заменяя одну теоретическую схему другой, построенной на иных исходных принципах (в частности, на иных пространственно-временных представлениях), следует заботиться не о том, чтобы экспериментальные данные интерпретировались привычным и традиционным образом, а о том, чтобы эти данные получили новую непротиворечивую интерпретацию в рамках новых теоретических представлений. Этот принцип будем называть **"Обобщенным принципом соответствия"**.

I. Геометрическая структура пространства-времени ТПВ

Итак, предлагаемая вниманию работа содержит реализацию программы А. Эйнштейна по поиску подходящей геометрической модели, позволяющей осуществить подход к вопросу описания гравитации и электромагнетизма на основе введения на четырехмерном многообразии двух согласованных геометрических структур: дефинитной метрики Римана (определяемой симметричным тензорным полем g_{ij}) и Γ^{k}_{ij} - несимметричной аффинной связности, на которые накладывается условие согласованности в форме теоремы Э. Шредингера (**[1]**). Это формализованное математическое содержание теории будет далее представлено в виде УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ, получаемых из вариационного принципа.

В специальной литературе фигурирует понятие: "*согласованность метрики и ковариантного (абсолютного) дифференцирования*". При этом, как правило, под такого рода согласованностью понимается факт равенства нулю ковариантной производной фундаментального метрического тензора. Последнее верно только для весьма специального частного случая метрической (или иначе кристоффелевой) связности, каковым и является Эйнштейновская теория относительности (ОТО) 1915 года. В рамках аффинной теории согласованность метрики и абсолютного дифференцирования, строго говоря, означает нечто иное. Для подробного ознакомления с данным вопросом отсылаем читателя к книге Э. Шредингера **[1]**, из которой здесь без доказательства будут приведены только необходимые факты.

Первый факт состоит в том, что произвольная аффинная связность сама по себе уже порождает инвариант **dS** на каждой геодезической линии. Становится возможным сравнение «длин» или «интервалов» вдоль геодезических, даже если на многообразии не задана метрика Римана. Правда, последнее возможно только на одной и той же геодезической, сравнение «длин» разных геодезических - невозможно.

Теперь представим себе, что помимо аффинной связности на многообразии задана и метрика Римана. Эта метрика также делает возможным сравнение «длин» вдоль геодезических. Напрашивается естественный вопрос: «Какова связь между этими двумя видами метрики?» Вполне разумно потребовать, чтобы примитивная Г-метрика, индуцируемая аффинной связностью, образовывала бы часть метрики Римана, то есть, другими словами, вдоль фиксированной геодезической эти метрики должны совпадать.

Следует отдавать себе отчет в том, что такое требование налагает значительные ограничения на произвольную аффинную связность, о которой в этом случае говорят, что она **«согласована с метрикой Римана»**. В частном случае метрической или кристоффелевой связности такого рода согласованность, в самом деле, означает равенство нулю ковариантной производной метрического тензора. В общем случае равенство нулю ковариантной производной является достаточным, но отнюдь не необходимым и достаточным условием. В упомянутой книге **[1]** этот второй факт формулируется и доказывается в виде следующей теоремы:

Теорема Шредингера

Примитивная Г-метрика для несимметричной аффинной связности Γ^{k}_{ij} и метрика Римана g_{ij} согласованы в указанном выше смысле тогда и только тогда, когда аффинная связность имеет вид:

$$\textbf{(1.1)} \qquad \Gamma^{k}_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\} + g^{ks} T_{sij} + W^{k}_{ij}$$

где: $\left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{s}} \right)$ - Кристоффелева (метрическая) связность;

тензор $\mathbf{T}_{\mathbf{sij}}$ удовлетворяет двум условиям симметрии:

$$\mathbf{(1.2)} \qquad \mathbf{T}_{\mathbf{sij}} = \mathbf{T}_{\mathbf{sji}}$$

$$\mathbf{(1.3)} \qquad \mathbf{T}_{\mathbf{sij}} + \mathbf{T}_{\mathbf{ijs}} + \mathbf{T}_{\mathbf{jsi}} = \mathbf{0},$$ а в остальном этот тензор - совершенно произвольный;

тензор: $\mathbf{W}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{k}} = -\mathbf{W}_{\mathbf{ji}}^{\mathbf{k}}$ - произвольный антисимметричный тензор кручения.

Отметим, что наличие в (1.1) этого антисимметричного добавка (кручения) не влияет на вид геодезических линий.

Прежде чем перейти к дальнейшему формальному построению теории, выводу уравнений поля и их интерпретации, начнем с обсуждения физических оснований новой теории, оставив за рамками данной статьи (по указанным во введении причинам) вопросы экспериментальной доказуемости предложенной модели.

В качестве исходных отправных постулатов предлагается исходить из следующего:

А). Физическое пространство – суть четырехмерное пространство (4-пространство) **однородное и изотропное по всем четырем направлениям** (что, следовательно, полностью исключает идею о так называемой *“Стреле времени”*).

В). Любое движение в этом 4-пространстве описывается в терминах четверки систем параметрических уравнений (**“мировых линий”**), каждая из которых содержит по четыре параметрических уравнения, зависящих от некоторого временного параметра τ, собственно и определяющих в параметрической форме “мировую линию” с номером **m**:

$$\mathbf{X}^{\mathbf{k}}_{(\mathbf{m})} = \mathbf{X}^{\mathbf{k}}_{(\mathbf{m})}(\tau), \quad \text{где: } \mathbf{k, m = 0,1,2,3}$$

таким образом, что:

а). “Нетензорный” индекс m = 0,1,2,3 (всюду далее эти индексы будут заключаться в круглые скобки, чтобы иметь возможность отличать их от “тензорных” индексов) определяет координату, по отношению к которой мировая линия является **“времениподобной”** (если использовать привычную терминологию СТО) в том смысле, что касательный вектор к ней в любой точке составляет угол с координатной осью $\mathbf{X_m}$, не превышающий $\mathbf{45^0}$. Другими словами, соответствующая “мировая линия” лежит внутри конуса, угол раствора которого с осью конуса (координатной осью $\mathbf{X_m}$) составляет $\mathbf{45^0}$ (см. Рис.1). Этот конус в некотором смысле подобен **"световому конусу"** СТО, но его поверхность не образована изотропными геодезическими, поскольку такие геодезические в МСТО отсутствуют из-за дефинитности метрики. Тем не менее, мы сохраним привычную терминологию и по-прежнему будем называть этот конус "световым конусом". Внутри "светового конуса" можно перейти к новой естественной параметризации, взяв вместо параметра τ в качестве нового временного параметра саму координату $\mathbf{X_m}$. При этом, надлежащим выбором системы координат можно добиться того, чтобы "мировая линия" была **координатной линией $\mathbf{X_m}$** и, следовательно, можно говорить о мировой линии **"системы отсчета"** со своим внутренним для нее **"координатным временем"**, направленным вдоль "временной оси" $\mathbf{X_m}$, и движущейся (при надлежащем выборе системы координат) только вдоль этой координатной оси с индексом **m** (остальные координаты не изменяются).

Последнее, очевидно, означает, что для каждой точки 4-пространства можно говорить о четырех различных "мировых линиях" со своими собственными “временными координатами” и о четырех отождествляемых с этими "мировыми линиями" системах отсчета, или, если угодно, о четырех различных трехмерных подпространствах (3-пространствах), определяемых как дуальные соответствующему вектору скорости (1.4.A) :

$$\text{(1.4.A)} \qquad V^i_{(m)} = \frac{dx^i_{(m)}}{d\tau} \quad ; \quad (m = 0,1,2,3)$$

$$\text{(1.4.B)} \qquad g_{ij} \frac{dx^i_{(m)}}{d\tau} \frac{dx^j_{(m)}}{d\tau} = c^2_{(m)}(x^s) \quad ; \quad (m = 0,1,2,3)$$

трехмерные объемы. Эти дуальные 4-вектору скорости объемы можно интерпретировать как четыре различных трехмерных “ФИЗИЧЕСКИХ ВСЕЛЕННЫХ” со своим собственным “координатным временем” в каждой из них.

При соответствующем выборе системы координат и "абсолютной" параметризации вместо (1.4.A) можно написать:

$$\text{(1.4.C)} \qquad dx^i_{(m)} = -\frac{C_{(m)}}{\sqrt{g_{mm}}} \delta^i_m \, d\tau \quad ; \quad (m = 0,1,2,3)$$

Таким образом, общий глобальный временной параметр τ является абсолютным в смысле Ньютона временем, позволяющий ввести “единую синхронизацию часов” для всего 4-пространства. Совершенно очевидно, что этот параметр является независимой переменной, и по этой причине ее малые изменения можно считать “полным дифференциалом”. Более того, в каждой трехмерной “ВСЕЛЕННОЙ” будем рассматривать свой собственный натуральный параметр $S_{(m)}$:

$$\text{(1.4.D)} \qquad dS_{(m)} = C_{(m)}(x^S)\, d\tau \qquad (s, m = 0,1,2,3)\,, \quad C_{(m)} - \text{некоторые функции 4 - точки,}$$

малые изменения (1.4.D) которого являются полным дифференциалом, в соответствии с чем равенство (1.4.B) может быть записано в виде:

$$\text{(1.4.E)} \qquad g_{ij} \frac{dx^i_{(m)}}{dS_{(m)}} \frac{dx^j_{(m)}}{dS_{(m)}} = 1 \quad \text{или :} \quad dS^2_{(m)} = g_{ij}\, dx^i_{(m)} dx^j_{(m)} \quad ; \quad (m = 0,1,2,3)$$

Всюду далее в качестве некоторой выделенной (например, тем фактом, что в ней живут автор этой статьи и ее читатели) ВСЕЛЕННОЙ будем рассматривать систему отсчета с координатным временем X_0 (временной осью X_0). Тогда три оставшиеся координаты (m=1,2,3) будут обычными трехмерными пространственными координатами "нашей вселенной". Проекция 4-вектора скорости (1.4.A) некоторой материальной точки на трехмерный дуальный объем "нашей вселенной" дает обычный трехмерный вектор скорости материальной точки. Подчеркнем, что этим МСТО принципиально отличается от СТО, в которой трехмерная скорость есть производная по "координатному времени", а не по абсолютному параметру τ . Впрочем, выделенность “нашей вселенной” совершенно условна в силу постулата (A) об изотропности 4-пространства.

б). Можно описать ту же пространственно-временную структуру (а) в терминах **"Гамильтоновых систем"** и тесно с ними связанных, так называемых **"Градиентных систем"**. Далее для простоты и лаконичности изложения зафиксируем индекс $\mathbf{m}$, положив, например: $\mathbf{m = 0}$ (т.е. речь будет идти только об одной "нашей вселенной") и опустим его во всех формулах, где он должен был присутствовать.

Проблема одновременности событий в разных 3-точках этой "вселенной" (этого 3-пространства) решается с помощью однопараметрического (параметр $\boldsymbol{\tau}$) семейства гипер-поверхностей, такого, что через каждую точку проходит одна и только одна поверхность семейства:

$$\textbf{(1.5.A)} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}},\ \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}) \quad ; \ (\mathbf{k} = 0,1,2,3 \ ; \ \boldsymbol{\alpha} = 1,2,3) \ ; \quad \mathbf{dS} = \mathbf{C}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}$$

Здесь уравнение семейства гиперповерхностей (1.5.А) записано в неоднородной форме через некоторую функцию $\boldsymbol{\Phi}$ пространственных координат (3-точек). Разумеется, можно было бы не выделять этот член в правой части (1.5.А) и написать уравнение семейства в однородной форме ($\sigma = \mathbf{0}$), однако последняя форма записи для наших целей более удобна.

Изменение временного параметра $\boldsymbol{\tau}$ соответствует перемещению в 4-пространстве "фронта волны", задаваемого функцией σ, в направлении нормали к гиперповерхности. По аналогии с классической гидродинамикой формально можно вести речь о двух скоростях, во-первых:

$$\textbf{(1.6.A)} \quad \mathbf{W} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C}\ , \quad \text{где в общем случае :} \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})\ ; \quad (\mathbf{k} = 0,1,2,3)$$

Это скорость фронта волны в направлении нормали к гиперповерхности. Во-вторых:

$$\textbf{(1.6.B)} \quad \mathbf{U} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}} \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{W} - \mathbf{V}$$

Это скорость распространения фронта волны относительно **"среды"**, имеющей собственное поле скоростей:

$$\textbf{(1.6.C)} \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}} \frac{\mathbf{dx}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}} = -\mathbf{C}$$

Очевидно, с учетом (1.6.А) - (1.6.С):

$$\textbf{(1.6.E)} \quad \mathbf{U} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}} \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{2C}\ , \quad \text{где в общем случае :} \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})$$

Теперь для того, чтобы установить связь "гамильтонова" формализма с "формализмом Лагранжа" пункта (а), потребуем выполнения равенств (**"градиентная система"**):

$$\textbf{(1.7)} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{i}}} = -\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{ik}} \frac{\mathbf{dx}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}} \qquad \text{или :} \quad \frac{\mathbf{dx}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}} = -\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{g}^{\mathbf{ki}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{i}}}$$

Функцию σ следует рассматривать как функцию переменных:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\tau}, \breve{\mathbf{x}}^{\mathbf{i}}),\ \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})) \quad ; \ (\mathbf{k}, \mathbf{i} = 0,1,2,3)\ ,$$

отождествляя ее с действием в форме Якоби. Здесь: $\breve{\mathbf{x}}^{\mathbf{i}}$ соответствует положению системы в начальный момент времени τ_0, а x^k – в момент времени τ, причем: $\breve{x}^k = x^k(\tau_0, \breve{x}^i)$

Отображение: $\breve{x}^k \mapsto x^k(\tau, \breve{x}^i)$ является однопараметрической группой диффеоморфизмов - сдвиг на время τ вдоль интегральных кривых градиентной системы. Таким образом, (1.7) означает, что рассматривается целый “пучок” траекторий градиентной системы. Из (1.7) и (1.4) сразу получаем уравнение геодезических материальной точки в форме Гамильтона-Якоби:

$$\textbf{(1.8)} \qquad g^{ki} \frac{\partial \sigma}{\partial x^k} \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = q^2$$

Заметим, что первое равенство в (1.7) можно рассматривать как преобразование Лежандра с производящей функцией σ, которое позволяет перейти от описания движения материальной точки в терминах “мировая линия” и “4-скорость” к эквивалентному описанию движения в терминах скалярного поля и импульса частицы.

Из (1.4.С) и (1.7) сразу следует:

$$\textbf{(1.9)} \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x^k} = \frac{q}{\sqrt{g_{00}}} g_{0k} \qquad ; \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x^0} = q \cdot \sqrt{g_{00}}$$

Соотношения (1.9) можно получить и другим путем (без привлечения (1.4.С)) - из рассмотрения ограничения римановой метрики g_{ij} на гиперповерхности σ, заданной соотношением (1.5).

Известно утверждение:

Лемма о существовании геодезической системы координат

Лемма №1. Вдоль любой наперед заданной не самопересекающейся линии, например, вдоль координатной линии X^0, можно выбрать систему координат так, чтобы символы Кристоффеля обращались в нуль вдоль всей координатной линии X^0.

Однако, следующее утверждение, которое будем называть ***"Леммой о существовании глобальной инерционной системы отсчета"***, в специальной литературе не встречается:

Лемма №2. В условиях Леммы №1, при условии выполнения равенств (1.9), а также следующих двух условий:

$$\textbf{(1.10.A)} \qquad \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = 0 \quad \text{или :} \quad g_{00} = g_{00}(x^\alpha) \quad \text{где :} \quad \alpha = 1,2,3$$

$$\textbf{(1.10.B)} \qquad \sigma(x^k, \tau) = q(x^k, \tau)$$

существует система координат, в которой интегральные кривые градиентной системы (1.7) удовлетворяют уравнению:

$$\textbf{(1.10.C)} \qquad \frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(-\frac{C_{(0)}}{\sqrt{g_{00}}} \delta^i_0 \right) = 0 \quad \text{или :} \quad \frac{dx^0}{d\tau} = -\frac{C_{(0)}}{\sqrt{g_{00}}} = \mathbf{Const} = \mathbf{C}$$

или просто: $\mathbf{dx^0 = C \cdot d\,\tau}$, где: $\mathbf{C = 3x10^8}$ **м/сек** - электродинамическая постоянная или в более общем случае величина, пропорциональная с некоторым числовым коэффициентом электродинамической постоянной (например: $C/\sqrt{2} = 2{,}12x10^8$ или $\sqrt{2}C = 4{,}24x10^8$ м/сек, см. Рис.1а, Рис.1б, где радиус окружности соответствует: $\sqrt{2}C = 4{,}24x10^8$ м/сек).

Не приводя здесь всех выкладок доказательства леммы №2, укажем только ключевые моменты, на которые оно опирается. Исходя из логики доказательства леммы №1 (см. например **[5], [6]**), достаточно показать, что в наших условиях всюду (а не только вдоль координатной линии) будет выполнено равенство:

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ 00 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{ks} \left(2 \frac{\partial g_{0s}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^s} \right) = 0 \quad ; \quad (k = 0,1,2,3)$$

Отсюда немедленно следует условие (1.10.A). Учитывая далее равенства (1.9), несложно убедиться в том, что для обращения в ноль остальных членов в круглых скобках необходимо и достаточно выполнение условия (1.10.B), что и доказывает лемму №2.

Еще раз специально отметим, что соотношения (1.10.C) получены для метрической (кристоффелевой) связности, тем не менее, с этого момента и всюду далее будем считать, что равенство (1.10.B) имеет место и для случая несимметричной аффинной связности.

Из условия (1.10.A) и (1.10.B) следует (опять же для кристоффелевой связности):

$$\textbf{(1.10.D)} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} (\ln \sigma) = 0 \quad \text{или :} \quad q = \sigma = \theta(x^\alpha, \tau) \cdot e^{\psi(x^\alpha, \tau) \cdot x^0} \;, \quad \text{где :} \; \alpha = 1,2,3$$

и уравнение (1.5.A), определяющее семейство движущихся гиперповерхностей, получает вид:

$$\textbf{(1.5.B)} \quad e^{\psi(x^\alpha, \tau) \cdot x^0} = \Phi(x^\alpha, \tau) \quad ; \quad (\alpha = 1,2,3)$$

Учитывая далее (1.6.E), получаем (по крайней мере для кристоффелевой связности):

$$\textbf{(1.10.E)} \quad q = \sigma = e^{-2 \cdot \int C(x^k(\tau)) d\tau} = e^{-2S(x^k)} \; ; \; -2S(x^k) = \psi(x^\alpha, \tau) \cdot x^0 \quad (\alpha = 1,2,3)$$

Здесь: **S** – натуральный параметр – длина “мировой линии” в 3-точке x^α (см. (1.5.A)).

Наконец в качестве ответа рецензенту редакции журнала ***"Теоретическая и математическая физика"*** на его замечание, суть которого сводится к утверждению, что при положительно определенной квадратичной метрической форме $\mathbf{g_{ij}}$ уравнения электродинамики в силу уравнения Гамильтона-Якоби не имеют волновых решений, заметим следующее. С помощью чисто формальных выкладок (которые здесь не приведены в силу их очевидности и малой значимости для понимания сути вопроса), использующих уравнения Гамильтона-Якоби (1.8) и другие приведенные в этом разделе соотношения, не составляет большого труда показать, что имеет место, по крайней мере для кристоффелевой связности, **волновое уравнение** (которое с учетом равенств (1.6) удовлетворяется тождественно):

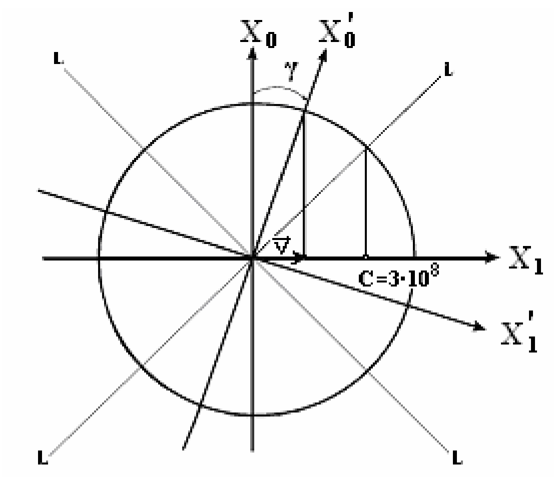
$$\textbf{(1.10.F)} \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_0^2} - \frac{1}{u_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} = 0 \quad ; \quad u_0^2 = \frac{C_{(0)}^2}{g_{00}} = C^2 = \mathrm{Const}$$

То есть, уравнение Гамильтона-Якоби (1.8) эквивалентно волновому уравнению (1.10.F).

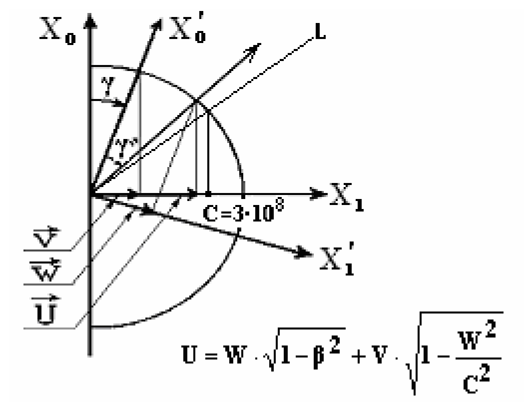
в). Движущиеся друг относительно друга прямолинейно и равномерно (инерциальные) системы отсчета связаны преобразованием координат, принадлежащим полной группе ортогональных преобразований четырехмерного пространства **O(4)**. Действительно, в отсутствии гравитации ($\mathbf{g_{00} = 1}$) из (1.10.C) следует, что величина с размерностью скорости: $\mathbf{S\ /\ \tau = C}$ – **сохраняется**. Ниже на рисунке (Рис.1а) в графическом виде представлена ситуация, соответствующая равномерному движению “штрихованной” системы отсчета вдоль положительного направления пространственной оси $\mathbf{X^1}$ “не штрихованной” системы отсчета со скоростью (3-скоростью) **V ,** а также правило **“сложения скоростей”** (Рис.1б) для движущейся со скоростью **W** вдоль пространственной оси штрихованной системы отсчета материальной точки.

$$\textbf{(1.11)} \qquad \mathbf{U = W \cdot \sqrt{1-\beta^2} + V \cdot \sqrt{1 - \delta^2}} \quad ; \quad \text{где : } \mathbf{\beta = \frac{V}{C}} \ \text{ и } \ \mathbf{\delta = \frac{W}{C}}$$

Скорость **U** этой материальной точки в исходной (не штрихованной) системе координат определяется по формуле (1.11).



/Рис. 1а/



/Рис. 1б/

Здесь предполагается, что радиус окружности равен: $\sqrt{2}C = 4{,}24\text{x}10^8$ м/сек. Это соответствует длине проекции "биссектрисы" **L** (прямые, обозначенные на рисунке буквой **L**, изображают **"гиперповерхность светового конуса"**, о котором речь шла выше в пункте (а)) на ось $\mathbf{X_1}$ равной $C = 3\text{x}10^8$ м/сек - скорость света в вакууме. Заметим, что равенство (1.11) представляет собой хорошо известное из элементарной тригонометрии тождество - синус суммы двух углов:

$$\mathbf{sin(\gamma + \gamma') = sin(\gamma)cos(\gamma') + sin(\gamma')cos(\gamma)}, \quad \text{где при этом:} \quad \mathbf{sin\,\gamma = \frac{V}{\sqrt{2}C} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}}$$

Очевидно, обратное преобразование - это тождество для синуса разности двух углов:

$$\mathbf{sin(\gamma') = sin(\gamma + \gamma')cos(\gamma) - sin(\gamma)cos(\gamma + \gamma')}$$

Теперь необходимо уточнить описанную и представленную на Рис.1а-1б ситуацию для “релятивистского предела”: $V = C = 3\text{x}10^8$ м/сек (что соответствует в СТО изотропным геодезическим, т.е. фотонам света, при $\mathbf{\beta = 1}$). Потребуем, чтобы поворот оси времени $\mathbf{X'_0}$ штрихованной системы отсчета относительно временной оси $\mathbf{X_0}$ "неподвижной" системы отсчета на угол 45^0 определял синус этого угла таким образом, чтобы было выполнено:

$$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\ \text{при}:\quad 0 \le \gamma \le \frac{\pi}{4}\ ,\ \text{где}:\ \sin 2\gamma = \beta = \frac{V}{C}\ ;\ \cos 2\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$$

(1.12)

$$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\ \text{при}:\quad \frac{\pi}{4} \le \gamma \le \frac{\pi}{2}\ ,\ \text{где}:\ \sin 2\gamma = \beta = \frac{V}{C}\ ;\ \cos 2\gamma = -\sqrt{1-\beta^2}$$

(при выполнении (1.12) радиус окружности на Рис.1а-1б равен $\sqrt{2}C$ и $\beta = 1$ при $\gamma = 45^0$).

При этом никаких катастроф, вроде возникновения бессмысленных бесконечных величин: массы, энергии, импульса - не случается.

Необходимость введения именно такого рода ортогональных преобразований евклидовой плоскости можно прокомментировать следующим образом. Изотропность пространства-времени, которая выражается, в частности, в равноправии координатных осей X^0 и X^1 по отношению к углу поворота, может быть достигнута только если **"ортогональные вселенные"** (с временными осями X^0 и X^1 соответственно) разделены гиперповерхностью "светового конуса", переход через которую при угле более 45^0 означает для материальной частицы также и переход из одной вселенной (3-пространства с координатным временем X^0) в ортогональную вселенную (т.е. 3-пространство с координатным временем X^1). При этом, пространственная и временная оси X^1 и X^0 - **меняются местами** (то, что было пространственным направлением, становится направлением времени и наоборот).

Образующая **L** "светового конуса" сама является временной осью еще одной вселенной (3-пространства), которая не "ортогональна" первым двум и может рассматриваться как некоторая их "суперпозиция" (формальный смысл сказанного будет определен ниже) в том смысле, что медленно движущаяся в этой вселенной материальная точка, в первых двух вселенных является **"релятивистской частицей"**, а в пределе (неподвижная частица) - "превращается в фотон", что и оправдывает использование в МСТО термина "световой конус". Соответственно эта вселенная имеет также свое "ортогональное дополнение" с временной осью в виде второй образующей "светового конуса" (ортогональной первой). Таким образом, в 2-мерном "пространстве-времени" существует **4** одномерных вселенных с временными осями, направленными вдоль координатных осей X^0 и X^1, а также вдоль обоих взаимно-ортогональных образующих **L** "светового конуса".

Итак, преобразование координат, связывающее движущуюся систему отсчета с "неподвижным наблюдателем" в исходной системе отсчета для случая $V < C$, определяет ортогональная матрица:

$$\textbf{(1.13.A)}\qquad A_0 = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix},\quad \text{где}:\ (1.12)\ \text{определяет}\ \sin\gamma\,.$$

В случае, если угол γ лежит в интервале от 45^0 до 90^0, т.е. $(45^0+\gamma)$, то преобразование снова принадлежит собственной подгруппе **SO(2)** и задается матрицей:

$$\textbf{(1.13.B)}\qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix},\quad \text{где}:\ (1.12)\ \text{определяет}\ \sin\gamma.$$

Здесь введены обозначения: $A_2 = -E_2\cdot A$, ортогональные матрицы:

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

являются действительным аналогом матриц Паули - операторов спина и удовлетворяют соотношениям:

$$\mathbf{det\,E_1 = -1 \;= det\,E_3 = -1}$$

$$\mathbf{E_1E_2 = -E_3 = E_1E_2} \qquad \mathbf{E_2E_3 = -E_1 = E_3E_2} \qquad \mathbf{E_1E_3 = -E_2 = E_3E_1}$$

$$\mathbf{E^2{}_1 = E_0}\ , \quad \mathbf{E^2{}_2 = -E_0}\ , \quad \mathbf{E^2{}_3 = E_0}\ , \quad \text{где: } \mathbf{E_0} \text{ - единичная матрица}$$

Легко видеть, что при таком преобразовании после поворота на угол больше $\mathbf{45^0}$ пространственная и временная оси "меняются местами". При этом разрыва преобразования на поверхности "светового конуса" (т.е. при угле поворота равном $\mathbf{45^0}$) не происходит.

г). Теперь нетрудно обобщить рассуждения пункта (в) на четырехмерный случай евклидова 4-пространства. Преобразования координат при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой принадлежат полной группе ортогональных преобразований **O(4)**. При этом предполагается, что для них имеет место равенство (1.12) и матрицы вида:

$$\mathbf{E_{nm}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E_n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E_m} \end{pmatrix}$$ соответствуют 16 спинорным операторам (n, m = 0,1,2,3).

Не трудно убедиться в том, что в 4-пространстве помимо четырех **"ортогональных"** 3-пространств (с координатным временем вдоль соответствующих осей координат) имеется 12 трехмерных "вселенных" (по удвоенному числу различных двумерных направлений в 4-пространстве, т.е. 2х6=12), время в которых определяется направлением двух взаимно ортогональных образующих "светового конуса", соответствующего своему "ортогональному" пространству. Таким образом, имеется всего 16 различных трехмерных объемов, дуальных соответствующему направлению времени, и отождествляемых с 16-ю трехмерными "вселенными". Единственное отличие от описанной выше двумерной модели, которое будет иметь место при формальном описании четырехмерного пространства-времени, связано не с различиями двух рассматриваемых случаев, а с принятой автором методологией изложения материала настоящей статьи ("от простого к сложному") с целью максимально ясного изложения логики и физического содержания ТПВ. Эти расхождения будут касаться несущественных различий в интерпретации трехмерных "вселенных", которые уже нельзя будет рассматривать как трехмерные гиперплоскости с ортогональным координатным временем. Напротив, как будет видно из ниже следующего описания, эти 3-пространства следует отождествлять с коническими гиперповерхностями "световых конусов". Другими словами, гиперповерхность "светового конуса" и есть трехмерная вселенная, время в которой направлено по оси конуса.

Формально это можно представить следующим образом. Будем считать, что для косинуса угла между соответствующими координатными осями с индексами **m** и **n** имеет место, по крайней мере в предположении отсутствия гравитационного поля (что совершенно естественно для рассмотрения вопроса в рамках МСТО), равенство:

$$\textbf{(1.14.A)}\quad \mathbf{C_m \cdot C_n \cdot \cos\gamma = g_{ij}\frac{dx^i_{(m)}}{d\tau}\frac{dx^j_{(n)}}{d\tau}} = \begin{cases} \mathbf{C_m \cdot C_n = C^2_m = C^2_n} & \text{при : } \mathbf{m = n} \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{C_m \cdot C_n} & \text{при : } \mathbf{m \neq n} \end{cases}$$

где в соответствии с (1.12): $\mathbf{\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\beta^2}}}$

Можно рассматривать 12 векторов ($\mathbf{t}^k_{+(mn)}$ и $\mathbf{t}^k_{-(mn)}$), построенных из касательных векторов (1.4.A) и из четырех ковариантных векторов $\mathbf{U}_{(m)k}$ (см. равенства (1.7) и (1.10.B)):

$$\mathbf{U}_{(m)k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\ln \sigma_{(m)}\right) = -\frac{1}{C_m}\cdot g_{ik}\frac{dx^i_{(m)}}{d\tau} \; ; \quad (m = 0,1,2,3)$$

по правилу:

$$\text{(1.15.A)} \quad \tau^k_{+(mn)} = (V^i_{(m)} - V^i_{(n)})g_{ij}(U^k_{(m)}U^j_{(n)} - U^k_{(n)}U^j_{(m)}) \; ; \quad (m,\ n = 0,1,2,3)$$

$$\text{(1.15.B)} \quad \tau^k_{-(mn)} = (V^i_{(m)} + V^i_{(n)})g_{ij}(U^k_{(m)}U^j_{(n)} - U^k_{(n)}U^j_{(m)}) \; ; \quad (m,\ n = 0,1,2,3)$$

Легко видеть, что:

$$\text{(1.15.C)} \quad \tau^k_{+(mn)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{C_n}{C_m}\right)V^k_{(m)} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{C_m}{C_n}\right)V^k_{(n)} \; ; \quad (m,\ n = 0,1,2,3)$$

$$\text{(1.15.D)} \quad \tau^k_{-(mn)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{C_n}{C_m}\right)V^k_{(m)} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{C_m}{C_n}\right)V^k_{(n)} \; ; \quad (m,\ n = 0,1,2,3)$$

$$\text{(1.15.E)} \quad \mathbf{t}^k_{+(mn)} = \frac{\tau^k_{+(mn)} + \tau^k_{-(mn)}}{2} = \frac{V^k_{(m)}}{\sqrt{2}} - \frac{C_m}{C_n}V^k_{(n)}$$

$$\text{(1.15.F)} \quad \mathbf{t}^k_{-(mn)} = \frac{\tau^k_{+(mn)} - \tau^k_{-(mn)}}{2} = \frac{V^k_{(n)}}{\sqrt{2}} - \frac{C_n}{C_m}V^k_{(m)}$$

$$\text{(1.15.G)} \quad g_{ik}\,\mathbf{t}^i_{+(mn)}\cdot\mathbf{t}^k_{+(mn)} = \left(\frac{C_m}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\text{(1.15.H)} \quad g_{ik}\,\mathbf{t}^i_{-(mn)}\cdot\mathbf{t}^k_{-(mn)} = \left(\frac{C_n}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\text{(1.15.J)} \quad g_{ik}\,\mathbf{t}^i_{+(mn)}\cdot V^k_{(m)} = 0 \; ; \quad g_{ik}\,\mathbf{t}^i_{+(mn)}\cdot V^k_{(n)} = -\left(\frac{C_m}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{C_n}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{(1.15.K)} \quad g_{ik}\,\mathbf{t}^i_{-(mn)}\cdot V^k_{(m)} = -\left(\frac{C_m}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{C_n}{\sqrt{2}}\right) \; ; \quad g_{ik}\,\mathbf{t}^i_{-(mn)}\cdot V^k_{(n)} = 0$$

И, наконец, косинус угла между координатным временем и соответствующим вектором $\mathbf{t}^i_{\pm(mn)}$ равен:

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$, как и ожидалось для образующей "светового конуса", т.е. $\gamma \sim 45^0$.

На этом мы закончим описание пространственно-временной структуры ТПВ и, имея в виду все выше изложенное относительно этой структуры, перейдем к формальному описанию единого **грави-электромагнитного** поля, как поля несимметричной аффинной связности вида (1.1), согласованной по Шредингеру со знакоопределенной (дефинитной) римановой метрикой. Такое описание будет представлено в виде уравнений поля, полученных из вариационного принципа. Но перед этим сделаем последнее замечание касательно существующего, но оставленного без внимания в пункте (б), случая, который в классической гидродинамике соответствует характеристической поверхности, получившей название **"поверхность частицы"** (на этой поверхности сосредоточено поле скоростей):

$$U = -\frac{1}{q}\cdot\frac{d\sigma}{d\tau} = V = \frac{1}{q}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial x^k}\frac{dx^k}{d\tau} = W = -\frac{1}{q}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} = 0$$

При этом остается в силе уравнение геодезических материальной точки в форме Гамильтона - Якоби (1.8). Есть все основания предполагать, что этот случай соответствует решению уравнений поля ТПВ, которое можно назвать **"частицеподобным"** решением. Впрочем, это тема для отдельной статьи и здесь она больше не затрагивается.

II. Основные соотношения между полевыми переменными ТПВ

Во-первых, уточним вид аффинной связности (1.1), конкретизировав выбор тензора кручения (который, как ранее отмечалось, может быть любым в (1.1)) следующим образом:

$$\text{(2.1.A)}\qquad \Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\} - \frac{2}{3} g^{ks}(T_{ijs} - T_{sij}) = \Gamma^k_{\underline{ij}} + \Gamma^k_{\underline{\underline{ij}}}$$

Здесь симметричная и антисимметричная части связности соответственно имеют вид:

$$\text{(2.1.B)}\qquad \Gamma^k_{\underline{ij}} = \left\{ {k \atop ij} \right\} + g^{ks} T_{sij}$$

$$\text{(2.1.C)}\qquad \Gamma^k_{\underline{\underline{ij}}} = W^k_{ij} = -\frac{1}{3} g^{ks}(T_{ijs} - T_{jis})$$

Легко видеть, что ковариантная производная фундаментального метрического тензора в этом случае (о котором всюду далее будем говорить как о **"согласованности в узком смысле"**) равна нулю:

$$\text{(2.2)}\qquad g_{ij;k} = 0 \quad ; \qquad (\sqrt{g})_{;k} = 0$$

Отметим, что при выборе аффинной связности (2.1.A) имеется значительный произвол, единственное требование, которому мы хотели удовлетворить - это равенства (2.2), т.е. согласованность в узком смысле. В общем случае можно было бы рассматривать аффинную связность вида:

$$\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\} + \mu\cdot g^{ks}\left[T_{sij} - \frac{\chi}{3}(T_{ijs} - T_{jis}) \right],$$ где : μ, χ - произвольн ые константы.

Для определенной таким образом аффинной связности согласованности в узком смысле, вообще говоря, нет:

$$g_{ij;\,k} = \mu(1-\chi)\cdot T_{kij}$$, при : $\chi = 1$ получаем связность (2.1.A).

Итак, несимметричная аффинная связность (2.1.A) целиком определяется 10 независимыми компонентами метрического тензора g_{ij} и 20 независимыми компонентами тензора T_{sij}. Теперь сделаем следующее предположение, которое еще более конкретизирует аффинную связность и уменьшит число неизвестных функций. Утверждается, что тензор T_{sij} имеет вид:

$$\textbf{(2.3)}\qquad T_{kij} = \frac{1}{4}(\varphi_i g_{kj} + \varphi_j g_{ki}) - \frac{1}{2}\varphi_k g_{ij}$$, где : φ_k – некоторый ковектор.

Легко проверить и убедиться в том, что в этом случае имеют место равенства:

$$\textbf{(2.4.A)}\qquad \Gamma_k = \frac{1}{2}(\Gamma^s_{ks} - \Gamma^s_{sk}) = g^{ij}T_{ijk} = -\frac{1}{2}g^{ij}T_{kij} = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^k}(\lg\sqrt{g})$$

$$\textbf{(2.4.B)}\qquad \frac{1}{2}\Gamma^s_{sk} = \Gamma^s_{ks} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}(\lg\sqrt{g})$$

$$\textbf{(2.4.C)}\qquad \varphi_k = -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^k}(\lg\sqrt{g}) \quad ; \quad \varphi_{k;\,s} = \varphi_{s;\,k}$$

Теперь можно констатировать, что несимметричная аффинная связность целиком определяется компонентами фундаментального метрического тензора:

$$\textbf{(2.4.D)}\qquad \Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\} - \frac{1}{2}(g_{ij}g^{ks}\varphi_s - \varphi_i\delta^k_j)$$

и тензор кручения получает вид:

$$\textbf{(2.4.E)}\qquad W^k_{ij} = \frac{1}{4}(\varphi_i\delta^k_j - \varphi_j\delta^k_i) = \frac{1}{12}\left(\delta^k_i\frac{\partial}{\partial x^j}(\lg\sqrt{g}) - \delta^k_j\frac{\partial}{\partial x^i}(\lg\sqrt{g})\right)$$

Хочется отметить, что соотношения (2.3) и (2.4.D) были подсказаны видом аффинной связности Вейля (H. Weyl), которая в его полевой теории имеет вид:

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\} + \frac{1}{2}(\varphi_j\delta^k_i + \varphi_i\delta^k_j - g_{ij}g^{ks}\varphi_s)$$, (см. например **[6]**, стр. 269).

Кроме того, (2.3) является частным случаем выражения гораздо более общего вида:

$$\tilde{T}_{kij} = a_0\cdot T_{kij} + a_1\cdot\Theta_{kij} + a_2\cdot\Theta'_{kij}$$, где : a_k – некоторые константы ,

тензоры Θ_{kij} и Θ'_{kij} имеют вид (здесь: e_j - единичные векторы базиса):

$$\Theta_{kij} = \frac{1}{4}(\varphi_i\varphi_{k;\,j} + \varphi_j\varphi_{k;\,i}) - \frac{1}{2}\varphi_k\varphi_{i;\,j}$$

$$\Theta'_{kij} = \frac{1}{4}(\varphi_i e_k + \varphi_k e_i)\varphi_j + \frac{1}{4}(\varphi_j e_k + \varphi_k e_j)\varphi_i - \frac{1}{2}(\varphi_i e_j + \varphi_j e_i)\varphi_k \quad ,$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только частного случая (2.3).

Введем четыре тензорные величины, положив по определению:

$$\textbf{(2.5.A)}\qquad F_{(m)ij} = (T_{ijs} - T_{jis}) \cdot V^{s}_{(m)} = -3W^{k}_{ij} g_{ks} V^{s}_{(m)} \quad ; \quad (m = 0,1,2,3)$$

С учетом соотношения для тензора кручения (2.4.E) получаем:

$$\textbf{(2.5.B)}\qquad F_{(m)ij} = \frac{1}{4} g_{ks} V^{s}_{(m)} \cdot \left(\delta^{k}_{j} \frac{\partial}{\partial x^{i}}(\lg\sqrt{g}) - \delta^{k}_{i} \frac{\partial}{\partial x^{j}}(\lg\sqrt{g})\right)$$

Физическая интерпретация четырех тензорных полей (2.5) может быть следующая. Соотнесем каждый из этих антисимметричных тензоров с электромагнитным полем в 3-пространстве, направление времени в котором определяется вектором скорости $V^{i}_{(m)}$; (m=0,1,2,3). При таком подходе физическую интерпретацию должна иметь также сумма любых трех полей (2.5) из четырех в различных комбинациях. Это естественным образом вытекает из предположения, что трехмерные подпространства не являются изолированными друг от друга, а напротив активно взаимодействуют, например, через свои электромагнитные поля. Итак, если (2.5) определяют тензоры электромагнитных полей, то мы вправе ожидать:

$$\textbf{(2.6.A)}\qquad \varepsilon^{ksij} \frac{\partial}{\partial x^{s}}(F_{(m)ij}) = 0$$

Разумеется, это - тензорное соотношение, поскольку его левая часть может быть записана в виде обычной дивергенции контравариантной антисимметричной тензорной плотности. В случае симметричной аффинной связности эта обычная дивергенция была бы точно равна ковариантной (абсолютной) дивергенции той же тензорной плотности. В нашем случае (несимметричной аффинной связности) такого равенства конечно же не будет из-за добавочных членов, но тензорный характер соотношения безусловно сохранится и в этом случае. Совершенно очевидно, что эти уравнения могут быть переписаны в привычном трехмерном виде, как **"первые пары уравнений Максвелла"** для каждого из 3-пространств. В самом деле, введем для этого 3-векторы **"магнитной индукции"** $\mathbf{B}_{(m)}$ и **"напряженности электрического поля"** $\mathbf{E}_{(m)}$, положив по определению:

$$\textbf{(2.7.A)}\qquad \vec{B}_{(0)} = (B^{(0)}_{1}, B^{(0)}_{2}, B^{(0)}_{3}) = (F_{(0)23}, F_{(0)31}, F_{(0)12})$$

$$\vec{B}_{(1)} = (B^{(1)}_{0}, B^{(1)}_{2}, B^{(1)}_{3}) = (F_{(1)23}, F_{(1)30}, F_{(1)02})$$

$$\vec{B}_{(2)} = (B^{(2)}_{0}, B^{(2)}_{1}, B^{(2)}_{3}) = (F_{(2)13}, F_{(2)30}, F_{(2)01})$$

$$\vec{B}_{(3)} = (B^{(3)}_{0}, B^{(3)}_{1}, B^{(3)}_{2}) = (F_{(3)12}, F_{(3)20}, F_{(3)01})$$

$$\textbf{(2.7.B)}\qquad \vec{E}_{(0)} = (E^{(0)}_{1}, E^{(0)}_{2}, E^{(0)}_{3}) = (F_{(0)10}, F_{(0)20}, F_{(0)30})$$

$$\vec{E}_{(1)} = (E^{(1)}_{0}, E^{(1)}_{2}, E^{(1)}_{3}) = (F_{(1)01}, F_{(1)21}, F_{(1)31})$$

$$\vec{E}_{(2)} = \left(E_0^{(2)}, E_1^{(2)}, E_3^{(2)}\right) = \left(F_{(2)02}, F_{(2)12}, F_{(2)32}\right)$$

$$\vec{E}_{(3)} = \left(E_0^{(3)}, E_1^{(3)}, E_2^{(3)}\right) = \left(F_{(3)03}, F_{(3)13}, F_{(3)23}\right)$$

Тогда уравнения (2.6.A) могут быть записаны в виде:

$$\textbf{(2.6.B)} \qquad \mathrm{rot}_{(m)} \vec{E}_{(m)} + \frac{\partial \vec{B}_{(m)}}{\partial x^m} = 0 \quad ; \quad (m = 0,1,2,3)$$

$$\textbf{(2.6.C)} \qquad \mathrm{div}_{(m)} \vec{B}_{(m)} = 0 \quad ; \quad (m = 0,1,2,3)$$

Здесь индекс **“m”** указывает переменную, выполняющую роль времени в каждом из четырех 3-мерных подпространств. При этом операторы ротора и дивергенции для различных значений **m** имеют вид:

$$\left(\mathrm{rot}_{(0)} \vec{E}_{(0)}\right)_{x^1} = \frac{\partial E^0_{(3)}}{\partial x^2} - \frac{\partial E^0_{(2)}}{\partial x^3} \qquad \left(\mathrm{rot}_{(0)} \vec{E}_{(0)}\right)_{x^3} = \frac{\partial E^0_{(2)}}{\partial x^1} - \frac{\partial E^0_{(1)}}{\partial x^2}$$

$$\left(\mathrm{rot}_{(0)} \vec{E}_{(0)}\right)_{x^2} = \frac{\partial E^0_{(1)}}{\partial x^3} - \frac{\partial E^0_{(3)}}{\partial x^1}$$

$$\left(\mathrm{rot}_{(1)} \vec{E}_{(1)}\right)_{x^0} = \frac{\partial E^1_{(3)}}{\partial x^2} - \frac{\partial E^1_{(2)}}{\partial x^3} \qquad \left(\mathrm{rot}_{(1)} \vec{E}_{(1)}\right)_{x^3} = \frac{\partial E^1_{(2)}}{\partial x^0} - \frac{\partial E^1_{(0)}}{\partial x^2}$$

$$\left(\mathrm{rot}_{(1)} \vec{E}_{(1)}\right)_{x^2} = \frac{\partial E^1_{(0)}}{\partial x^3} - \frac{\partial E^1_{(3)}}{\partial x^0}$$

$$\left(\mathrm{rot}_{(2)} \vec{E}_{(2)}\right)_{x^0} = \frac{\partial E^2_{(3)}}{\partial x^1} - \frac{\partial E^2_{(1)}}{\partial x^3} \qquad \left(\mathrm{rot}_{(2)} \vec{E}_{(2)}\right)_{x^3} = \frac{\partial E^2_{(1)}}{\partial x^0} - \frac{\partial E^2_{(0)}}{\partial x^1}$$

$$\left(\mathrm{rot}_{(2)} \vec{E}_{(2)}\right)_{x^1} = \frac{\partial E^2_{(0)}}{\partial x^3} - \frac{\partial E^2_{(3)}}{\partial x^0}$$

$$\left(\mathrm{rot}_{(3)} \vec{E}_{(3)}\right)_{x^0} = \frac{\partial E^3_{(2)}}{\partial x^1} - \frac{\partial E^3_{(1)}}{\partial x^2} \qquad \left(\mathrm{rot}_{(3)} \vec{E}_{(3)}\right)_{x^2} = \frac{\partial E^3_{(1)}}{\partial x^0} - \frac{\partial E^3_{(0)}}{\partial x^1}$$

$$\left(\mathrm{rot}_{(3)} \vec{E}_{(3)}\right)_{x^1} = \frac{\partial E^3_{(0)}}{\partial x^2} - \frac{\partial E^3_{(2)}}{\partial x^0}$$

$$\frac{\partial B^0_{(1)}}{\partial x^1} + \frac{\partial B^0_{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial B^0_{(3)}}{\partial x^3} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial B^1_{(0)}}{\partial x^0} + \frac{\partial B^1_{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial B^1_{(3)}}{\partial x^3} = 0$$

$$\frac{\partial B^2_{(0)}}{\partial x^0} + \frac{\partial B^2_{(1)}}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2_{(3)}}{\partial x^3} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial B^3_{(0)}}{\partial x^0} + \frac{\partial B^3_{(1)}}{\partial x^1} + \frac{\partial B^3_{(2)}}{\partial x^2} = 0$$

Итак, первые пары уравнений Максвелла достаточно очевидны и в дальнейших комментариях не нуждаются. Однако, вторые пары уравнений Максвелла уже не столь очевидны. В самом деле, следует иметь в виду, что в этих уравнениях должны фигурировать контрвариантные тензорные плотности, естественно связанные с плотностью заряда и тока. Следовательно, помимо уже упомянутой проблемы интерпретации суммы полей возникает также проблема корректного построения таких тензорных плотностей из антисимметричных ковариантных тензоров (2.5). Соотношения между контрвариантной тензорной плотностью и ковариантным тензором электромагнитного поля в классической электродинамике называют **“материальными уравнениями”**. Они носят чисто феноменологический характер и устанавливаются экспериментальным путем. Естественно ожидать, что в рассматриваемой здесь теоретической модели “материальные уравнения” должны описывать внутренние геометрические свойства четырехмерного пространства-времени и являться полноправными уравнениями теории.

Оказывается, что обе упомянутые выше проблемы в действительности представляют собой два различных аспекта одной и той же проблемы, а именно - проблемы интерпретации уравнений (2.6.A). В самом деле, введем четыре контрвариантные тензорные плотности следующим образом:

$$\textbf{(2.8.A)} \qquad \mathfrak{I}^{ks}_{(m)} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ksij}F_{(m)ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ksij}\Big[\sum_{m=0}^{0} F_{(m)ij} - \sum_{\overline{m}\in\Omega_m} F_{(\overline{m})ij}\Big],$$

где: $\overline{m} \in \Omega_m = \{0,1,2,3\} \setminus \{m\}$ и Ω_m - множество целых чисел $\{0,1,2,3\}$ с удаленным из него элементом **m**. Рассмотрим теперь 16 уравнений:

$$\textbf{(2.8.B)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{I}^{ks}_{(m)}}{\partial x^s} = 0 \quad ; \quad (m,\ k = 0,1,2,3)$$

Уравнения (2.8.B) – это в точности те же уравнения, что и (2.6.A), но записанные в другой (эквивалентной) форме, а следовательно, ни что иное, как “первые пары уравнений Максвелла”. Тем не менее, утверждается, что (2.8.B) можно рассматривать также как **“вторые пары уравнений Максвелла”** и даже как **“материальные уравнения”**. Иными словами, в электродинамике ТПВ обе пары уравнений Максвелла неразличимы. Мы сейчас покажем, что (2.8.B) в трехмерной записи имеют привычный вид:

$$\textbf{(2.8.C)} \qquad \mathrm{rot}_{(m)}\vec{H}_{(m)} - \frac{\partial \vec{D}_{(m)}}{\partial x^m} = \vec{I}_{(m)} \quad ; \quad (m = 0,1,2,3)$$

$$\textbf{(2.8.D)} \qquad \mathrm{div}_{(m)}\vec{D}_{(m)} = \rho_{(m)} \quad ; \quad (m = 0,1,2,3)$$

Рассмотрим только случай m=0, но аналогичные выражения, как легко проверить, можно получить и для m=1,2,3. Введем обозначения:

$$\textbf{(2.8.E)} \qquad \vec{H}_{(0)} = \left(H^{(0)}_1, H^{(0)}_2, H^{(0)}_3\right)$$

$$\vec{D}_{(0)} = (D^{(0)}_1, D^{(0)}_2, D^{(0)}_3) \;;\; D^{(0)}_1 = B^{(1)}_0 \;;\; D^{(0)}_2 = -B^{(2)}_0 \;;\; D^{(0)}_3 = B^{(3)}_0$$

$$\mathbf{H}^{(0)}_{1} = \frac{1}{2} \sum_{\overline{\mathbf{m}} \in \boldsymbol{\Omega}_{0}} \boldsymbol{\varepsilon}^{32ij} \mathbf{F}_{(\overline{\mathbf{m}})ij} = \mathbf{E}^{(1)}_{0} + \mathbf{B}^{(2)}_{3} + \mathbf{B}^{(3)}_{2}$$

$$\mathbf{H}^{(0)}_{2} = \frac{1}{2} \sum_{\overline{\mathbf{m}} \in \boldsymbol{\Omega}_{0}} \boldsymbol{\varepsilon}^{13ij} \mathbf{F}_{(\overline{\mathbf{m}})ij} = \mathbf{B}^{(1)}_{3} + \mathbf{E}^{(2)}_{0} - \mathbf{B}^{(3)}_{1}$$

$$\mathbf{H}^{(0)}_{3} = \frac{1}{2} \sum_{\overline{\mathbf{m}} \in \boldsymbol{\Omega}_{0}} \boldsymbol{\varepsilon}^{21ij} \mathbf{F}_{(\overline{\mathbf{m}})ij} = -\mathbf{B}^{(1)}_{2} - \mathbf{B}^{(2)}_{1} + \mathbf{E}^{(3)}_{0}$$

Следует сразу обратить внимание на то, что 3-векторы напряженности магнитного поля и электрической индукции $\mathbf{H}_{(0)}$, $\mathbf{D}_{(0)}$ выражаются через компоненты 3-векторов магнитной индукции $\mathbf{B}_{(\alpha)}$ и напряженности электрического поля $\mathbf{E}_{(\alpha)}$ трех дополнительных 3-пространств ($\boldsymbol{\alpha}$ **= 1,2,3**).

Введем также обозначения:

(2.8.F)

$$\mathbf{I}^{(0)}_{1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{0}} \left(-\mathbf{E}^{(2)}_{3} + \mathbf{E}^{(3)}_{2} \right)$$

$$\mathbf{I}^{(0)}_{2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{0}} \left(-\mathbf{E}^{(3)}_{1} + \mathbf{E}^{(1)}_{3} \right)$$

$$\mathbf{I}^{(0)}_{3} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{0}} \left(-\mathbf{E}^{(1)}_{2} + \mathbf{E}^{(2)}_{1} \right)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{(0)} = \left(-\frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}_{3}}{\partial \mathbf{x}^{2}} + \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}_{2}}{\partial \mathbf{x}^{3}} \right) + \left(-\frac{\partial \mathbf{E}^{(2)}_{1}}{\partial \mathbf{x}^{3}} + \frac{\partial \mathbf{E}^{(2)}_{3}}{\partial \mathbf{x}^{1}} \right) + \left(-\frac{\partial \mathbf{E}^{(3)}_{2}}{\partial \mathbf{x}^{1}} + \frac{\partial \mathbf{E}^{(3)}_{1}}{\partial \mathbf{x}^{2}} \right)$$

Учитывая теперь эти обозначения, а также факт равенства нулю первой суммы в квадратной скобке соотношения (2.8.A), исходная система (2.8.B) может быть записана в виде (2.8.C)-(2.8.D).

Из сказанного следует вывод. Во-первых, 16 уравнений электродинамики (2.6.A) или они же, но записанные в форме (2.8.B), устанавливают связь между компонентами $\mathbf{H}_{(m)}$, $\mathbf{D}_{(m)}$ с одной стороны, и $\mathbf{B}_{(n)}$, $\mathbf{E}_{(n)}$ - с другой (здесь: $\mathbf{n} \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{m}}$).

В трехмерной форме они могут быть записаны либо как первые пары уравнений Максвелла, либо как вторые пары. Во-вторых, и это самое главное, уравнения (2.8.B) в правой части не содержат плотности 4-тока. Иначе говоря, вид уравнений электродинамики такой, как если бы они были записаны для **"пустого пространства"**, в котором нет ни зарядов, ни токов. Это обстоятельство позволяет, как минимум, надеяться, что при решении уравнений поля удастся избежать появления особенностей для точек пространства с "источниками поля". Последнее в принципе немыслимо для тех теорий, которые включают в свои полевые уравнения члены, описывающие источники поля. В ТПВ заряды и токи появляются только при переходе от четырехмерного описания единого грави-электромагнитного поля к трехмерным описаниям электромагнитных полей в каждом из трехмерных подпространств. Плотности заряда и тока в нашем случае представляют собой исключительно трехмерные объекты. Вероятно по терминологии, примененной Максом Джеммером, (**[4]**), ТПВ можно отнести к разряду так называемых **“унитарных”** теорий, в которых понятия: **“заряд”**, **“ток”**, **“масса”** являются производными чисто полевых представлений (касательно массы последнее утверждение будет прокомментировано ниже по тексту).

Учитывая свойства симметрии (1.2)-(1.3), уравнение геодезических можно записать в виде:

$$\textbf{(2.9)}\qquad \frac{d^2 x^k_{(m)}}{d\tau^2} + \left\{ {k \atop ij} \right\} \frac{dx^i_{(m)}}{d\tau}\frac{dx^j_{(m)}}{d\tau} = -\frac{2}{3} g^{ks} F_{(m)si} \cdot \frac{dx^i_{(m)}}{d\tau}\ ;\quad (m = 0,1,2,3)$$

Здесь в (2.9) гравитационное поле представлено, как в ОТО, метрической связностью, а сила Лоренца, фигурирующая справа от знака равенства, определяется тензором $\mathbf{T}_{kij}$.

III. Уравнения поля ТПВ. Вариационный принцип

Приведем сначала несколько соотношений, которые потребуются в дальнейших вычислениях:

$$\textbf{(3.1.A)}\qquad g^{ij}\Gamma^k_{ij} = -\frac{\partial g^{ks}}{\partial x^s} - \frac{1}{2} g^{ks} \cdot \frac{\partial}{\partial x^s}(\lg\sqrt{g})$$

$$\textbf{(3.1.B)}\qquad g^{ki}\Gamma^s_{is} = \frac{1}{2} g^{ks} \cdot \frac{\partial}{\partial x^s}(\lg\sqrt{g})$$

Для вариации соответственно имеем:

$$\textbf{(3.1.C)}\qquad \delta[g^{ki}\Gamma^s_{is} \cdot \sqrt{g} - g^{ij}\Gamma^k_{ij} \cdot \sqrt{g}] = \frac{\partial}{\partial x^s}[\delta(g^{ks} \cdot \sqrt{g})]$$

Приведем также два хорошо известных из специальной литературы соотношения (см. например, уже упомянутую выше книгу Шредингера [**1**]), которые необходимы для получения уравнений поля из вариационного принципа. Во-первых, уравнение Палатини для случая несимметричной аффинной связности:

$$\textbf{(3.2)}\qquad \delta R_{ik} = -(\delta\Gamma^s_{ik})_{;s} + (\delta\Gamma^s_{is})_{;k} + (\Gamma^s_{rk} - \Gamma^s_{kr}) \cdot \delta\Gamma^r_{is}$$

Во-вторых, правило интегрирования по частям для ковариантных производных относительно несимметричной аффинной связности:

$$\textbf{(3.3)}\qquad \int (A^{\cdots}_{\cdots}) \cdot (B^{\cdots}_{\cdots})_{;k} \cdot d^4x = \int [-(A^{\cdots}_{\cdots})_{;k} + 2\,\Gamma_s \cdot A^{\cdots}_{\cdots}] \cdot B^{\cdots}_{\cdots} \cdot d^4x$$

Здесь: $A^{\cdots}_{\cdots}$ и $B^{\cdots}_{\cdots}$ - тензорные величины произвольного типа.

$$\Gamma_s = \frac{1}{2}(\Gamma^r_{sr} - \Gamma^r_{rs})\ ,\ \text{а в нашем случае}:\quad \Gamma_s = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^s}(\lg\sqrt{g})$$

Уравнения поля получим исходя из вариационного принципа:

$$(3.4)\qquad \delta \mathbf{I} = \delta\int g^{ij}\cdot\sqrt{g}\cdot \mathbf{R}_{ij}\cdot d^4x = 0\,,$$

где: $\mathbf{R}_{ij}$ - тензор Риччи для несимметричной аффинной связности Γ^{k}_{ij} .

Выполнив стандартные процедуры при варьировании (3.4) с учетом соотношений (3.1), (3.2) и (3.3), учитывая нулевой вклад поверхностного интеграла на границе области интегрирования, где вариации равны нулю, а так же факт равенства нулю ковариантной производной (согласованность "в узком смысле") фундаментальной тензорной плотности, получим уравнения поля ТПВ:

$$(3.5.A)\qquad 3\mathbf{R}_{ij} + \frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}(\lg\sqrt{g}) + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x^i}(\lg\sqrt{g})\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}(\lg\sqrt{g}) -$$
$$-\frac{1}{6}g_{ij}\cdot g^{ks}\cdot\frac{\partial}{\partial x^k}(\lg\sqrt{g})\cdot\frac{\partial}{\partial x^s}(\lg\sqrt{g}) - \left\{ {s \atop ij} \right\}\cdot\frac{\partial}{\partial x^s}(\lg\sqrt{g}) = 0\,,$$

которые легко могут быть записаны в более лаконичной форме через вектор φ_k и его ковариантную производную:

$$(3.5.B)\qquad \mathbf{R}_{ij} = \varphi_{i;j} - \frac{3}{2}\varphi_i\varphi_j \qquad \text{где:}\quad \varphi_k = -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^k}(\lg\sqrt{g})$$

Учитывая тензорный характер уравнений (3.5.В), обращаем внимание на то, что все фигурирующие далее равенства являются исключительно тензорными соотношениями, хотя содержат не ковариантные, а обычные производные.

Представим тензор Риччи $\mathbf{R}_{ij}$ относительно несимметричной аффинной связности в виде: $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{G}_{ij} + \mathbf{K}_{ij}$, где: $\mathbf{G}_{ij}$ - тензор Риччи, построенный из тензора кривизны Римана-Кристоффеля относительно метрической (кристоффелевой) связности. Несложными, но довольно громоздкими вычислениями можно показать, что:

$$(3.5.C)\qquad \mathbf{K}_{ij} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x^j} + \frac{1}{2}g_{ij}\cdot\frac{\partial}{\partial x^s}(g^{ks}\varphi_k) - \varphi_k\cdot\left\{ {k \atop ij} \right\} - (g_{ij}g^{ab}\cdot\varphi_a\varphi_b + \frac{1}{2}\varphi_i\varphi_j)$$

После подстановки соотношения (3.5.С) в (3.5.В) уравнения поля могут быть записаны в виде:

$$(3.5.D)\qquad \mathbf{G}_{ij} + \frac{1}{2}g_{ij}\cdot\frac{\partial}{\partial x^s}(g^{ks}\varphi_k) - \frac{3}{2}(g_{ij}g^{ab}\cdot\varphi_a\varphi_b - \varphi_i\varphi_j) = 0\,,$$

где: $$\varphi_k = -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^k}(\lg\sqrt{g})\,.$$

Это и есть уравнения поля “Теории полей времени”.

Несмотря на то, что тензор $\mathbf{R}_{ij}$ в общем случае несимметричен, уравнения поля, записанные в форме (3.5.D), симметричны по нижним индексам. Этот ожидаемый и вполне предсказуемый результат есть следствие согласованности в " узком смысле".

Уравнениям (3.5.D) можно придать более привычную и лаконичную форму:

$$\text{(3.5.E)} \qquad G_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} G = -\frac{3}{2} \varphi_i \varphi_j + \lambda \cdot g_{ij} \;,$$

где: $G = g^{ij} \cdot G_{ij}$ - скалярная кривизна относительно метрической связности, а для коэффициента λ (здесь разумеется: $\lambda \neq \mathrm{Const}$) имеет место равенство:

$$\text{(3.5.F)} \qquad 2\lambda = \frac{\partial}{\partial x^s}(g^{ks} \varphi_k) - \frac{3}{2} g^{ab} \cdot \varphi_a \varphi_b \neq \mathrm{Const}$$

Наконец, введем симметричный "**тензор материи"**, положив по определению:

$$\text{(3.5.G)} \qquad T_{ij} = \frac{3}{2} \varphi_i \varphi_j \quad ; \quad T = \frac{3}{2} g^{ab} \cdot \varphi_a \varphi_b$$

и тогда система уравнений поля получает окончательный вид:

$$\text{(3.6.A)} \qquad G_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} G - \lambda \cdot g_{ij} = -T_{ij} \quad (\text{где: } \lambda \neq \mathrm{Const})$$

Коэффициент λ равен ковариантной дивергенции:

$$\text{(3.7.A)} \qquad \lambda = \frac{1}{2} \varphi^k_{;k} = \frac{1}{2}(\varphi^k_{,k} - T) \quad ; \quad \text{Здесь} : \varphi^k_{,k} = \frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ks} \varphi_s)$$

В заключении прокомментируем полученный результат.

Во-первых, уравнения поля ТПВ могут быть формально записаны в форме (3.6.A) хорошо известной системы уравнений ОТО с так называемым “космологическим лямбда-членом”. Однако, в отличие от ОТО в правой части равенства (3.6.A) присутствует член, имеющий чисто геометрическую природу (который по аналогии с ОТО назван “**тензором материи**”). Кроме того, коэффициент лямбда (3.7.A) не является в общем случае константой.

Из (3.6.A) следует:

$$\text{(3.7.B)} \qquad \varphi^k_{,k} = \frac{3}{2} T - \frac{1}{2} G$$

$$\text{(3.6.B)} \qquad G_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} G - \frac{1}{4} g_{ij} \cdot (T - G) = -T_{ij}$$

и если теперь считать, что имеет место:

$$\text{(3.7.C)} \qquad \frac{1}{4}(T - G) = \Lambda = \mathrm{Const} \qquad \text{или} : \quad \varphi^k_{,k} = 2\Lambda + T \;,$$

то уравнения поля точно соответствуют уравнениям поля ОТО, где: Λ - космологическая постоянная.

Из (3.6.B) с учетом (3.7.C) немедленно следует:

$$\text{(3.8)} \qquad T^k_{j;k} = 0 \;,$$

что оправдывает интерпретацию тензора T_{ij} (чисто геометрического объекта, определяемого равенством (3.5.G)), как “**тензора материи**”.

Во-вторых, несколько слов о проблеме определения массы в ТПВ (в смысле корректного введения этого понятия в теорию). Эта проблема нашла свое решение еще в 1935 году в подходе Уайттакера – Руса - Кларка (см., например **[7]**). Уайттакеру удалось обобщить теорему Гаусса для обсуждаемого им случая статического гравитационного поля, а Рус в свою очередь обобщил формулу Уайттакера для общей метрики пространства-времени: $\mathbf{ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j}$. Роль заряда, фигурирующего в теореме Гаусса, в расчетах Руса играет выражение:

$$(*) \quad \lambda^i \lambda^k T_{ik} - \frac{1}{2} T$$

где: $\mathbf{T_{ik}}$ – тензор материи, а λ^i - направления (единичные векторы) мировых линий фундаментальных наблюдателей.

В терминах ТПВ в качестве “гравитационного заряда” следует взять:

$$\rho_{(m)} = \frac{dx^i_{(m)}}{ds} \frac{dx^j_{(m)}}{ds} T_{ij} - \frac{1}{2} T \quad \text{где :} \quad m = 0,1,2,3 \quad ; \quad T_{ij} = \frac{3}{2} \varphi_i \varphi_j$$

$\mathbf{T_{ik}}$ – полностью геометризированный тензор “энергии-импульса материи”.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] **Э. Шредингер. “Пространственно-временная структура вселенной”, Москва, “Наука”, 1986 г. Под редакцией Р.А. Асанова. (“Space-time structure” by Ervin Schodinger, Cambridge at the University Press, 1950).**

[2] **Виллььям Л. Бёрке. “Пространство-время, Геометрия, Космология”, Москва, 1980 г. (William L. Burke “Space-time, Geometry, Cosmology”).**

[3] **П.А.М. Дирак. “Воспоминания о необычной эпохе”. Сборник статей, Москва, “Наука”, 1990 г. Под редакцией Я.А. Смородинского.**

[4] **М. Джеммер. “Понятие массы в классической и современной физике”, Москва, “Прогресс”, 1967 г. (Max Jammer, “Concepts of mass in classical and modern physics”, Harvard University press, Cambridge-Massachusetts, 1961)**.

[5] **А.Л. Зельманов, В.Г.Агаков. “Элементы общей теории относительности”. Москва, “Наука”, 1989 г.**

[6] **В. Паули. “Теория относительности”. Библиотека теоретической физики, Москва, “Наука”, 1983 г. Под редакцией В.Л. Гинзбурга и В.П. Фролова.**

[7] **E.T. Whittaker. “On Gauss’ theorem and the concept of mass in general relativity”, “Proceedings of the Royal Society”, 149, 384-395 (1935),** а так же: **H.S. Ruse. “Gauss theorem in a general space-time”, “Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society”, 4, 144-158 (1935).**).

[8] **А. Эйнштейн. Собрание научных трудов в 4-х томах, Москва, “Наука”, 1965 г. Под редакцией И.Е. Тамма, Я.А. Смородинского, Б.Г. Кузнецова (том I, том II – работы по теории относительности 1905-1920, 1921-1955 г.).**

[9] **И.А. Курилин. "Теория полей времени как реализация программы Эйнштейна по поиску геометрии для построения теории единого грави-электромагнитного поля". Труды Девятой Международной научной конференции "Цивилизация знаний: инновационный переход к обществу высоких технологий", Часть I. РосНОУ, Москва, 2008г.**