И.А. Курилин

ТЕОРИИ ПОЛЕЙ ВРЕМЕНИ

Добавления к статье: <<Несимметричная аффинная связность в “ТЕОРИИ ПОЛЕЙ ВРЕМЕНИ” и реализация программы Эйнштейна по поиску геометрии для построения теории единого грави-электромагнитного поля>>

Введение

Необходимость настоящих добавлений к статье “***Несимметричная аффинная связность в ТЕОРИИ ПОЛЕЙ ВРЕМЕНИ и реализация программы Эйнштейна по поиску геометрии для построения теории единого грави-электромагнитного поля***” (размещена на сайте Web-Института исследований природы времени в разделе "Библиотека электронных публикаций": http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/kurilin_sviaznost.pdf) вызвана серией вопросов, которые были заданы автору при обсуждении статьи в частных беседах и, которые свидетельствуют о том, что изложенная автором точка зрения оказалась недостаточно ясно сформулированной и строго обоснованной. Автор выражает искреннюю благодарность всем, кто внимательно прочитал его предыдущую статью и высказал свои критические замечания.

В настоящей работе будет предпринята попытка более строго и доказательно изложить отдельные результаты выше названной статьи. Следует иметь в виду, что речь не идет о строго аксиоматическом подходе к построению теории и формальному выводу всех приведенных в статье результатов из некоторого *"минимального множества"* исходных принципов-постулатов. Будут прокомментированы и математически более формализованно изложены лишь наиболее принципиальные и важные для понимания теоретической концепции автора положения статьи [1]. Так же следует иметь в виду, что отдельные математические соотношения (например, соотношение (1.4.С), [1]), устанавливающие связь между фигурирующими в теории величинами, в целях более лаконичного представления материала приведены в статье без какого-либо формального логического обоснования и формального вывода, основанного на ранее выведенных математических зависимостях и соотношениях. Тем не менее, это последнее обстоятельство не следует считать достаточным основанием для того чтобы полагать, что соотношения такого рода введены в теоретическую схему автором статьи произвольным образом, нарушающим строгость и доказательность математических построений и, следовательно, ставящим под сомнение логическую целостность и непротиворечивость развиваемой автором теории. Напротив, читатель легко может убедиться в том, что все приведенные в работе соотношения, уравнения, тождества, независимо от способа их введения в контекст теоретической схемы, представляют собой единую самосогласованную и логически непротиворечивую теоретическую концепцию. Именно эта самосогласованность и непротиворечивость всех приведенных в статье утверждений является главным доказательством допустимости упомянутого выше методологического "произвола" в построении теории.

Добавления к статье [1] затрагивают следующие четыре вопроса:

1). Более строгое и ясное описание процедуры введения четверки мировых линий (см. [1], постулат В, п. а), стр.6), определяющих четыре различных системы отсчета со своим собственным направлением координатного времени в каждой из этих систем, заданным соответствующим касательным вектором (см. [1], соотношение (1.4.A)).

2). Используя описанную в предыдущем пункте процедуру введения четырех систем отсчета со своим собственным направлением времени вдоль соответствующей координатной оси (в [1] каждая такая система отсчета интерпретируются как трехмерная “вселенная” со своим временем), укажем геометрически наглядный "признак" присутствия гравитационного поля, отличающий этот последний случай от описанного в [1] (см. соотношения (1.14), (1.15)) случая “плоского пространства-времени”.

3). Приведем доказательство Леммы №2 ([1], стр.9) для рассматриваемого в [1] случая несимметричной аффинной связности (2.4.D) ([1], стр.16).

4). Уточним свойства симметрии тензора кривизны для несимметричной аффинной связности (2.4.D).

В тексте данной статьи используется нумерация формул и выражений, непересекающаяся с принятой в [1] нумерацией, что позволяет делать соответствующие ссылки на формулы и выражения в статье [1].

I. Мировые линии трехмерных “вселенных” с собственным направлением времени в каждом из трехмерных пространств.

Будем считать, что четырехмерное дифференцируемое многообразие в каждой своей координатной окрестности $\mathbf{U_q}$ (иногда используется термин *“карта”*) “арифметизировано” с помощью некоторой произвольной локальной системы координат $\{\mathbf{X^i}\}$. Иначе говоря, в каждой окрестности $\mathbf{U_q}$ задана четверка действительных чисел: $\mathbf{X_{(q)}}^{\mathbf{i}}$, i = 0,1,2,3 – *“локальные координаты”*. Выберем одну из таких окрестностей $\mathbf{U_q}$ и все последующие построения будем относить к этой окрестности, имея в виду, что они могут быть повторены для любой другой окрестности $\mathbf{U_p}$ (далее индекс **q** – опускаем; предполагается так же, что класс гладкости многообразия достаточно высок, чтобы обеспечить все необходимые условия для наших целей).

Выбор локальных координат $\{\mathbf{X^i}\}$ в окрестности точки **Q** задает базис в касательном пространстве: $\mathbf{e_n} = \partial_\mathbf{n}$ (здесь: $\partial_\mathbf{n}$ - частная производная по координате $\mathbf{X^n}$). Относительно орто-нормированности тетрады базисных векторов $\mathbf{e_n}$ никаких предположений здесь не делается. Последнее означает, что в общем случае задана некоторая произвольная гауссова система координат с базисом из векторов $\mathbf{e_n}$. Описанная процедура, как известно, устанавливает взаимно однозначное отображение окрестности $\mathbf{U_q}$ в четырехмерное евклидово пространство $\Re^4$, где образ окрестности $\mathbf{U_q}$ есть открытая область в $\Re^4$. Это отображение вводит в $\mathbf{U_q}$ координатную систему $\{\mathbf{X^i}\}$, принося с собой координаты из $\Re^4$.

Теперь введем в рассмотрение то, что в [1] было названо взаимно ортогональными трехмерными ***“физическими вселенными”***, отождествляемыми с определенным образом заданными системами отсчета ([1], соотношения (1.4), стр.7). Эти четыре системы отсчета (их номер от 0 до 3 указывается индексом в круглых скобках) в координатной окрестности 4-точки **Q** многообразия определяются следующим образом.

Рассмотрим в окрестности $\mathbf{U_q}$ 4-точки **Q** произвольную 4-точку **P** (может совпадать с точкой **Q**) и связанную с координатой $\mathbf{X^m}$ координатную линию (предполагается, что **m** -

фиксировано, например: **m=0**), проходящую через точку **P** и заданную в параметрическом (параметр τ) виде:

$$(I.1) \qquad X^m_{(m)} = X^m_{(m)}(P, \tau), \quad X^k_{(m)}(P) = 0, \quad \text{где: } k,m = 0,1,2,3; \quad k \neq m$$

Разумеется, в общем случае эта координатная линия (здесь и далее предполагается: **m=0** - фиксировано) не является геодезической. Однако, учитывая тот факт, что уравнение геодезических всегда имеет решение для любых начальных условий, можно провести через точку **P** геодезическую в направлении координатной линии (I.1). Другими словами, можно найти решение уравнения геодезических в точке **P** с касательным вектором в этой точке, совпадающим с базисным вектором $\mathbf{e}_0$**,** в качестве начального условия. Эту процедуру можно выполнить для любой точки окрестности $\mathbf{U_q}$. Теперь осталось перейти от старых локальных координат $\mathbf{X^i_{(q)}}$ к новым локальным координатам, в которых координатная линия $\mathbf{X^0}$ является уже геодезической линией (для новых локальных координат мы оставили те же самые обозначения, что использовались ранее для старых координат). Подобную процедуру опять же можно выполнить для любой точки окрестности $\mathbf{U_q}$. Наконец последнее, что мы сделаем для определения системы отсчета (занумерованной индексом **m=0**), введем дуальный к базисному вектору $\mathbf{e}_0$ трехмерный объем, в котором определен свой ортонормированный *"пространственный"* базис: $\mathbf{e}^*_{(0)\alpha}$, $\alpha=1,2,3$. Итак, система отсчета определяется базисной тетрадой векторов: ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}^*_{(0)1}$, $\mathbf{e}^*_{(0)2}$, $\mathbf{e}^*_{(0)3}$). Именно эта система отсчета в [1] ассоциируется с ***"нашей вселенной"*** (занумерована индексом **m=0**).

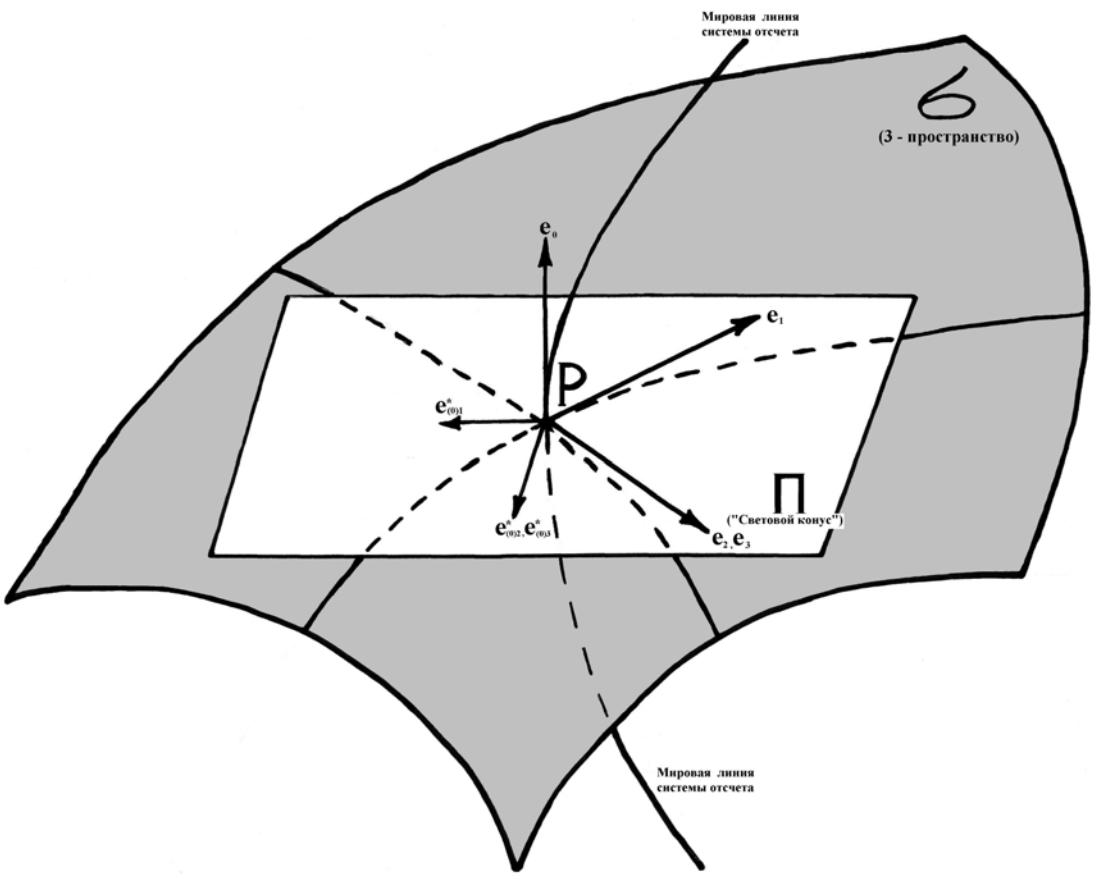
Описанную процедуру повторим еще три раза (**m=1,2,3**), выбирая каждый раз в качестве временной координаты $\mathbf{X^1}$, $\mathbf{X^2}$ и $\mathbf{X^3}$ соответственно. Полученные базисные тетрады: ($\mathbf{e}^*_{(1)0}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}^*_{(1)2}$, $\mathbf{e}^*_{(1)3}$), ($\mathbf{e}^*_{(2)0}$, $\mathbf{e}^*_{(2)1}$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}^*_{(2)3}$), ($\mathbf{e}^*_{(3)0}$, $\mathbf{e}^*_{(3)1}$, $\mathbf{e}^*_{(3)2}$, $\mathbf{e}_3$) соответственно ассоциируются с тремя другими трехмерными вселенными (занумерованы индексами 1, 2 и 3), ***"ортогональными нашей вселенной"*** (см. [1], стр.12, 13).

Означает ли, что описанная выше процедура вводит трехмерные "вселенные" (например, "*наша вселенная*" с индексом **m=0**), как плоские многообразия, ортогональные направлению собственного времени (трехмерная гиперплоскость, ортогональная базисному вектору $\mathbf{e}_0$)?

В общем случае ответ отрицательный. Можно утверждать, что упомянутые гиперплоскости (т.е. дуальные к базисным векторам $\mathbf{e}_n$, **n=0,1,2,3** объемы) являются гиперплоскостями в касательном 4-пространстве, которые только в случае отсутствия гравитационного поля (т.е. только в случае евклидовой метрики МСТО) можно отождествлять с соответствующими трехмерными "вселенными", да и то лишь с известной оговоркой. В самом деле, даже в этом последнем случае плоского "пространства-времени" следует помнить, что в соответствии с предложенной интерпретацией ([1], п. г), стр.13) трехмерная "вселенная" отождествляется не с гиперплоскостью, а с гиперповерхностью ***"светового конуса"***, ось симметрии которого совпадает с базисным вектором $\mathbf{e}_n$ и задает направление оси времени в выбранной точке этой "вселенной".

При наличии гравитации (т.е. в случае *"*неплоского*"* риманова многообразия) картина выглядит иначе. На Рис.1 мы попытались наглядно изобразить эту ситуацию, по-прежнему не принимая в расчет то, что *"*касательное*"* 3-пространство **П** (трехмерное подпространство евклидова 4-пространства $\mathfrak{R}^4$**,** касательного к четырехмерному риманову многообразию) является не гиперплоскостью, как это изображено на Рис.1, а гиперповерхностью упомянутого выше *"светового конуса"*. Этот *"световой конус"* **П** в каждой точке окрестности $\mathbf{U_q}$ является "касательным" пространством к трехмерному многообразию σ , которое в соответствии с [1] ([1], п. б), стр.8) мы рассматриваем как **гиперповерхность** (точнее – однопараметрическое семейство гиперповерхностей, см. [1], (1.5.A)) в четырехмерном римановом многообразии.

Именно эту трехмерную гиперповерхность $\boldsymbol{\sigma}$, которая в каждой своей точке имеет ортогональный базисный вектор $\mathbf{e_0}$, совпадающий с осью симметрии *“светового конуса”* и задающий в этой точке (на Рис.1 точка **P**) направление координатного времени, мы отождествляем с трехмерным пространством *“нашей вселенной”*. И только в случае отсутствия гравитации гиперповерхность $\boldsymbol{\sigma}$ будет совпадать с плоской гиперповерхностью светового конуса, который на Рис.1 изображен “касательным 3-пространством” **П**:



/Рис. 1/

Итак, в каждой точке **P** 3-пространства $\boldsymbol{\sigma}$ имеется собственное направление времени, характеризуемое ортогональным 3-пространству в этой точке базисным вектором $\mathbf{e_0}$ (здесь речь по-прежнему идет о трехмерном пространстве, занумерованным индексом **0** – *“наша вселенная”*, но все сказанное в полной мере справедливо и для трех других *"ортогональных вселенных"*, занумерованных индексами 1,2,3). Однако, выбранная таким образом система координат, не является **естественной** с точки зрения человеческого восприятия физического трехмерного пространства. Трехмерное пространство воспринимается органами чувств человека (и соответственно сконструированными человеком приборами), как “плоское” трехмерное пространство. С этой точки зрения **естественной** будет система координат, определенная следующим образом.

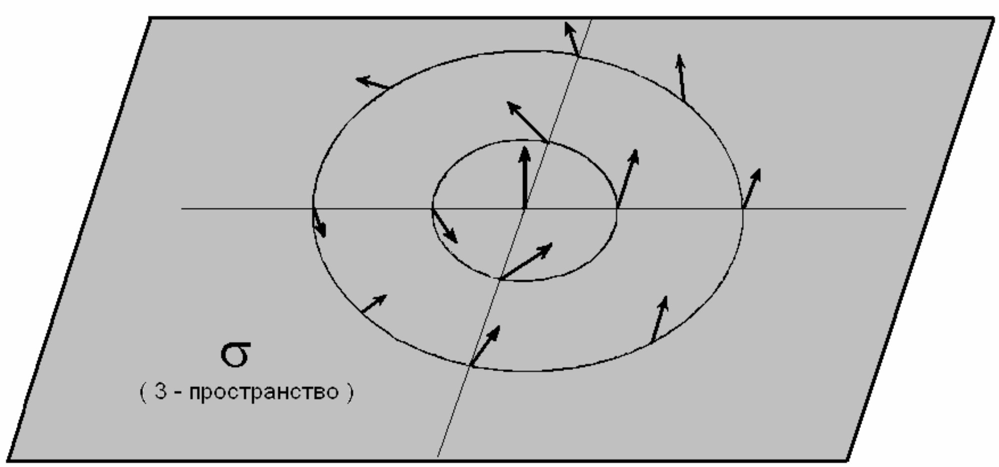
Лемма о приведении метрического тензора к специальному виду, *"естественная"* система координат.

Ниже следующее утверждение является полуочевидным следствием известных из линейной алгебры фактов, в частности теоремы о приведении симметричной квадратичной формы (симметрической матрицы) к диагональному виду, критерия эквивалентности λ-матриц и критерия подобия соответствующих (исходных) матриц.

Лемма. Утверждается, что фундаментальный метрический тензор $\mathbf{g_{ij}}$ ([1], I, стр.11) выбором соответствующей системы координат (линейным невырожденным преобразованием $\mathbf{S}$) всегда можно привести к виду (I.2):

$$\textbf{(I.2)} \qquad \mathbf{g'_{ij}} = \begin{pmatrix} \mathbf{g'_{00}} & \mathbf{g'_{01}} & \mathbf{g'_{02}} & \mathbf{g'_{03}} \\ \mathbf{g'_{10}} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{g'_{20}} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{g'_{30}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{причем: } \mathbf{(g'_{ij}) = S^{-1}\cdot(g_{ij})\cdot S}$$

В выбранной таким образом системе координат трехмерное пространство будет представлено гиперплоскостью $\boldsymbol{\sigma}$ (Рис. 2), в каждой точке которой направление времени уже не ортогонально этой гиперплоскости. Угол наклона оси местного времени (базисного вектора $\mathbf{e_0}$) в каждой точке гиперплоскости $\boldsymbol{\sigma}$ определяется компонентами $\mathbf{g'_{01}}$, $\mathbf{g'_{02}}$, $\mathbf{g'_{03}}$ метрического тензора (I.2) в этой точке.



/Рис. 2/

Покажем, что такая система координат всегда существует, и фундаментальный метрический тензор в этой системе координат имеет вид (I.2).

Прежде всего, заметим, что без ограничения общности можно считать (по тем же самым причинам, что и в Эйнштейновской ОТО), что фундаментальный определитель (I.3) равен единице:

$$\textbf{(I.3)} \quad \det(g_{ij}) = g = 1$$

Это предположение, будучи следствием существования в теории четырех хорошо известных тождеств:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(\mathfrak{R}_k^j) - \frac{1}{2}\mathfrak{R}^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \equiv 0$$

, (где: $\mathfrak{R}_{ij}$ - соответствующая гамильтонова производная), на самом деле не является здесь принципиальным, поскольку все ниже сказанное остается справедливым и без такого предположения, однако оно позволяет получить более компактные соотношения (уравнения) при вычислениях. Только по этой причине мы будем считать, что первоначальная система координат $\{X^i\}$, в которой задан фундаментальный метрический тензор g_{ij}, определена таким образом, что справедливо равенство (I.3).

Известная теорема алгебры гарантирует возможность приведения симметрической матрицы g_{ij} (действительной квадратичной формы) к диагональному (каноническому) виду ортогональным преобразованием координат $\mathbf{Q}$, сохраняющим инвариантным определитель матрицы (I.3):

$\textbf{(I.4.A)} \quad (D_{ij}) = Q^{-1}\cdot(g_{ij})\cdot Q$, где: (D_{ij}) - диагональная матрица:

$$\textbf{(I.4.B)} \quad (D_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

где: $\det(D_{ij}) = g = \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$

Здесь: λ_i - характеристические корни матрицы (g_{ij}), взятые с их кратностями.

Как известно, поиск приводящей матрицы $\mathbf{Q}$ сводится к задаче на отыскание собственных векторов, соответствующих значениям характеристических корней λ_i. При этом существенно, что собственные векторы определяются с точностью до постоянного множителя. Этим замечанием о существовании определенного произвола в нахождении приводящей матрицы нам придется воспользоваться чуть позже.

Теперь зададимся следующим вопросом: "*Можно ли указать (вычислить) такую невырожденную матрицу* $\mathbf{H}$, *которая позволила бы трансформировать диагональную матрицу* (D_{ij}) *в симметрическую матрицу* (g'_{ij}) *вида* (I.2)"? Другими словами, как по известной диагональной матрице (D_{ij}) найти невырожденную матрицу $\mathbf{H}$, такую что:

$\textbf{(I.4.C)} \quad (g'_{ij}) = H^{-1}\cdot(D_{ij})\cdot H$, где матрица (g'_{ij}) имеет вид (I.2).

Если последнее удастся сделать, то очевидно, невырожденная матрица $S = Q\cdot H$ обеспечит требуемое невырожденное преобразование: $(g'_{ij}) = S^{-1}\cdot(g_{ij})\cdot S$.

Нахождение трансформирующей матрицы $\mathbf{H}$ в конечном счете сводится к нахождению λ-матрицы, эквивалентной λ-матрице диагональной матрицы $\mathbf{D}$ (поскольку знание эквивалентных λ-матриц по известному в линейной алгебре алгоритму позволяет вычислить трансформирующую матрицу). В свою очередь, нахождение эквивалентной λ-матрицы сводится к тому, чтобы обеспечить наличие полной системы инвариантов для симметрической матрицы $(\mathbf{g}'_{ij})$ по корням λ_i характеристического многочлена. Последнее означает, что должно быть обеспечено равенство коэффициентов при одинаковых степенях λ двух характеристических полиномов соответствующих λ-матриц:

$$\textbf{(I.5.A)}\quad \det(\mathbf{g}'_{ij}(\lambda)) = (1-\lambda)^2\cdot[(1-\lambda)\cdot(\mathbf{g}'_{ij}-\lambda)-(\mathbf{g}'_{01})^2-(\mathbf{g}'_{02})^2-(\mathbf{g}'_{03})^2] =$$
$$= (\lambda_0-\lambda)\cdot(\lambda_1-\lambda)\cdot(\lambda_2-\lambda)\cdot(\lambda_3-\lambda)$$

Таким образом, равенство (I.5.A) эквивалентно системе уравнений:

$$\textbf{(I.5.B)}\quad \begin{cases} 3+\mathbf{g}'_{00} = \lambda_0 + \mu \\ 1+2(1+\mathbf{g}'_{00}) + \mathbf{g} = \lambda_0\cdot\mu + \nu \\ (1+\mathbf{g}'_{00}) + 2\mathbf{g} = \lambda_0\cdot\nu + \dfrac{\mathbf{g}}{\lambda_0} \end{cases},\quad \text{где в соответствии с (I.4.B):}\quad \mathbf{g}=1$$

и, кроме того, введены две величины μ и ν следующим образом:

$$\mu = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \quad \text{и} \quad \nu = \lambda_1\cdot\lambda_2 + \lambda_1\cdot\lambda_3 + \lambda_2\cdot\lambda_3\ ;\quad \text{причем:}\quad \lambda_0\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3 = 1\ .$$

Легко убедиться в том, что только два уравнения системы (I.5.B) - независимые. Любые два независимые уравнения системы (I.5.B) позволяют получить относительно μ и ν два различных решения. Нас, однако, интересует здесь лишь решение вида:

$$\textbf{(I.6)}\quad \mu=\nu\ ,\ \ \lambda_0 = 1\ ,\ \ \mathbf{g}'_{00} = \mu - 2\ ,\ \ \mu = 3 + (\mathbf{g}'_{01})^2 + (\mathbf{g}'_{02})^2 + (\mathbf{g}'_{03})^2$$

Убедиться в том, что (I.6) на самом деле является решением системы (I.5.B) легко непосредственной подстановкой.

Итак, мы видим, что существует решение, позволяющее обеспечить равенство двух характеристических полиномов (I.5.A). Единственно, что омрачает радость от полученного результата, это требование (I.6), чтобы было выполнено: $\lambda_0 = 1$.

На самом деле от этого обременительного ограничения легко освободиться, вспомнив замечание об имеющемся произволе в определении приводящей к диагональной виду матрицы $\mathbf{Q}$. Всегда в качестве приводящей матрицы можно взять пропорциональную ей матрицу $q\cdot\mathbf{Q}$ (здесь: q - некоторая числовая константа), так что:

$$\textbf{(I.4.D)}\quad (\mathbf{D}_{ij}) = \mathbf{Q}^{-1}\cdot(\mathbf{g}_{ij})\cdot(q\cdot\mathbf{Q})\ ,\quad \text{где:}\ (\mathbf{D}_{ij})\ \text{- диагональная матрица.}$$

При этом, числовая константа q выбирается так, чтобы: $q = (\lambda_0)^{-1}$, то есть обеспечить: $\lambda_0 = 1$.

Разумеется, в этом случае определитель $\mathbf{g}$ уже не будет равен единице из за множителя q:

$$\det(\mathbf{D}_{ij}) = \mathbf{g} \neq \mathbf{1},$$

но, как это было отмечено выше, последнее обстоятельство не является принципиальным.

Итак, доказано, что всегда существует линейное невырожденное преобразование координат, при котором фундаментальный метрический тензор получает вид (I.2). Эти новые координыты мы назвали ***"естественными"*** по сформулированным выше соображениям.

Завершая рассмотрение данного вопроса, напомним, что в [1] (стр.13-15) соотношения (1.14) и (1.15) относятся только к случаю отсутствия гравитационного поля, поскольку угол *"раствора светового конуса"* (т.е. угол между осью конуса и его образующими, см. стр.15) предполагается равным: $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{45^0}$.

II Доказательство леммы существования глобальной инерциальной системы отсчета для случая несимметричной аффинной связности.

В [1] была в самых общих чертах намечена лишь канва доказательства упомянутой леммы ([1], стр.9-10), да и только для частного случая метрической связности. Здесь будет приведено доказательство существования равенств (1.10.C) для несимметричной аффинной связности вида (2.4.D) (см. [1], стр.16).

Всегда предварительным преобразованием координат можно добиться того, чтобы любая данная мировая линия оказалась координатной линией $\mathbf{X^0}$ (будем далее называть ее линией $\mathtt{l}$), т.е. чтобы $\mathbf{X^\alpha}$ $(\alpha = 1,2,3)$ вдоль $\mathtt{l}$ оставались постоянными: $\mathbf{X^\alpha = X^\alpha_{(0)} = const}$.

Назовем такую систему координат *"местной"* или *"сопутствующей"* системой координат, либо местной (сопутствующей) системой отсчета, так как последнее означает, что материальная точка покоится относительно нее в 3-пространстве. В такой системе отсчета уравнение мировой линии имеет вид:

$$(\mathbf{II.1.A}) \qquad \frac{\mathbf{d^2 x^i}}{\mathbf{ds^2}} = \mathbf{0},$$

где: $\mathbf{ds \neq 0}$ в силу дефинитности метрики 4-пространмтва.

С другой стороны, можно ввести геодезическую систему координат $\{\breve{\mathbf{x}}^\mathbf{i}\}$ вдоль координатной линии $\mathbf{X^0}$ (описание этой процедуры для случая метрической или Кристоффелевой связности смотри, например, в [2]) таким образом, чтобы добиться обращения компонент несимметричной аффинной связности в ноль вдоль всей координатной линии. В самом деле, в конечном счете эта задача сводится (см. [2]) к решению нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(\mathbf{II.1.B}) \qquad \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx^0}}\left(\frac{\partial \breve{\mathbf{x}}^\mathbf{k}}{\partial \mathbf{x^n}}\right)_{\mathtt{l}} = (\boldsymbol{\Gamma}^\mathbf{s}_{\ \mathbf{n0}})_{\mathtt{l}} \cdot \left(\frac{\partial \breve{\mathbf{x}}^\mathbf{k}}{\partial \mathbf{x^s}}\right)_{\mathtt{l}}$$

Система (II.1.B) имеет решения при произвольных начальных условиях и позволяет находить частные производные вдоль $\mathtt{l}$ по известным компонентам аффинной связности, как функции переменной $\mathbf{X}^0$. Геодезическая система координат в этом случае задается равенствами:

$$(\breve{x}^k)_{\mathtt{l}} \quad = \quad \int \frac{\partial \breve{x}^k}{\partial x^0} dx^0$$

вдоль самой линии $\mathtt{l}$, и при каждом значении $\mathbf{X}_0$ в окрестности линии $\mathtt{l}$ разложением в ряд Тейлора по степеням $(x^\alpha - x_0^\alpha)$:

$$\breve{x}^k = (\breve{x}^k)_{\mathtt{l}} + (\frac{\partial \breve{x}^k}{\partial x^\alpha})_{\mathtt{l}} \cdot (x^\alpha - x_0^\alpha) + \frac{1}{2} (\Gamma^s_{\alpha\beta})_{\mathtt{l}} \cdot (\frac{\partial \breve{x}^k}{\partial x^s})_{\mathtt{l}} \cdot (x^\alpha - x_0^\alpha) \cdot (x^\beta - x_0^\beta) + \ldots$$

где частные производные вдоль линии $\mathtt{l}$ находятся из системы уравнений (II.1.B).

Для геодезической системы координат $\{ \breve{x}^i \}$ имеет место равенство:

$$(\mathbf{II.1.C}) \qquad \frac{d^2 \breve{x}^i}{ds^2} = \frac{d}{ds} [\frac{\partial \breve{x}^k}{\partial x^i} \cdot \frac{dx^i}{ds}] \quad = \quad \frac{\partial^2 \breve{x}^k}{\partial x^i \partial x^j} \cdot \frac{dx^i}{ds} \cdot \frac{dx^j}{ds}$$

поскольку в силу равенства (II.1.A): $\mathbf{d^2x^i = 0}$.

Но, так как вдоль координатной линии $\mathbf{X}^0$ в системе координат $\{ \breve{x}^i \}$ компоненты связности равны нулю, то в каждой точке этой координатной линии выполняется соотношение:

$$(\mathbf{II.1.D}) \qquad (\frac{\partial^2 \breve{x}^k}{\partial x^i \partial x^j})_{\mathtt{l}} \quad = \quad (\Gamma^s_{ij})_{\mathtt{l}} \cdot (\frac{\partial \breve{x}^k}{\partial x^s})_{\mathtt{l}}$$

С учетом равенств (II.1.C) и (II.1.D), а также того, что в местной (сопутствующей) системе координат только одна компонента вектора 4-скорости отлична от нуля: $\mathbf{dx^0 \neq 0}$, вдоль линии $\mathtt{l}$ имеем:

$$(\mathbf{II.1.E}) \qquad (\frac{d^2 \breve{x}^k}{ds^2})_{\mathtt{l}} \quad = \quad (\Gamma^s_{00})_{\mathtt{l}} \cdot (\frac{\partial \breve{x}^k}{\partial x^s})_{\mathtt{l}}$$

Причем компоненты несимметричной аффинной связности Γ^s_{00} в нашем случае определяются соотношением (2.4.D) (см. [1], стр.16).

Если теперь окажется, что вдоль линии $\mathtt{l}$ компоненты $(\Gamma^s_{00})_{\mathtt{l}}$ аффинной связности равны нулю (в силу каких-либо причин), то в геодезической системе координат уравнение мировой линии будет иметь точно такой же вид, как в местной системе координат, то есть из (II.1.E) следует:

$$(\mathbf{II.1.F}) \qquad \frac{d^2 \breve{x}^i}{ds^2} = 0$$

Заметим, что из последнего факта (II.1.F) в свою очередь очевидно следует, что в любой другой системе координат, получаемой невырожденным преобразованием из геодезической системы координат, уравнение мировой линии имеет вид:

$$\text{(II.1.G)} \qquad \frac{d^2x^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0$$

Осталось убедиться в том, что компоненты $(\Gamma^s_{00})_1$ и даже просто Γ^s_{00} аффинной связности (2.4.D) в нашем случае на самом деле **тождественно равны нулю**!

Последнее легко проверить непосредственным вычислением компонент аффинной связности вида (2.4.D), если учесть наличие (см. [1], стр.9) равенств:

1) соотношений (1.9):

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x^k} = \frac{q}{\sqrt{g_{00}}}g_{0k} \quad ; \quad \frac{\partial\sigma}{\partial x^0} = q\cdot\sqrt{g_{00}}$$

2) соотношений (1.10.A):

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = 0 \quad \text{или :} \quad g_{00} = g_{00}(x^\alpha) \quad \text{где :} \quad \alpha = 1,2,3$$

3) соотношения (1.10.B):

$$\sigma(x^k, \tau) = q(x^k, \tau)$$

Итак, наличие соотношений (1.9), (1.10.A) и (1.10.B) гарантирует для аффинной связности вида (2.4.D) тождественное равенство нулю компонент Γ^s_{00}, что в свою очередь дает равенство (II.1.F), из которого немедленно следует уравнение (1.10.C) (см. [1], стр.9), доказывающее Лемму №2:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(-\frac{C_{(0)}}{\sqrt{g_{00}}}\delta^i_0\right) = 0 \quad \text{или :} \quad \frac{dx^0}{d\tau} = -\frac{C_{(0)}}{\sqrt{g_{00}}} = \text{Const} = C$$

III. Замечание относительно свойств симметрии тензора кривизны Римана-Кристоффеля.

Факт симметричности свертки R_{ij} тензора кривизны (тензора Риччи) для случая несимметричной аффинной связности является следствием согласованности метрики и ковариантного дифференцирования в *"узком смысле"*. Напомним, что под согласованностью в *"узком смысле"* (см. [1], стр.26) подразумевается равенство нулю ковариантной производной фундаментального метрического тензора, что в общем случае может быть неверно для связности вида:

$$\Gamma^{k}_{ij} = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} + \mu \cdot g^{ks} \left[T_{sij} - \frac{\chi}{3} (T_{ijs} - T_{jis}) \right]$$, где : μ, χ - произвольн ые константы.

Доказательство этого утверждения основано на известной Теореме (см. например, [3], стр.275-276) о симметрии тензора кривизны:

Теорема. Тензор кривизны Римана-Кристоффеля R^{i}_{qkl} , определяемый равенством:

$$\textbf{(III.1)} \qquad -R^{i}_{qkl} = \frac{\partial \Gamma^{i}_{ql}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \Gamma^{i}_{qk}}{\partial x^{l}} + \Gamma^{i}_{pk} \cdot \Gamma^{p}_{ql} - \Gamma^{i}_{pl} \cdot \Gamma^{p}_{qk}$$

обладает свойствами:

$$\textbf{(III.1.A)} \qquad R^{i}_{qkl} = -R^{i}_{qlk}$$

Для **симметричной связности** имеет место тождество:

$$\textbf{(III.1.B)} \qquad R^{i}_{qkl} + R^{i}_{klq} + R^{i}_{lqk} \equiv 0$$

Для связности, **согласованной** ***"в узком смысле"*** с метрикой g_{ij} имеет место равенство:

$$\textbf{(III.1.C)} \qquad R_{iqkl} = -R_{qikl} \quad , \text{ где : } R_{iqkl} = g_{ip} \cdot R^{p}_{qkl}$$

Для **симметричной связности, согласованной** ***"в узком смысле"*** с метрикой g_{ij} имеет место равенство:

$$\textbf{(III.1.D)} \qquad R_{iqkl} = R_{kliq}$$

Известно так же, что для произвольного вектора ξ^{s} имеет место:

$$\textbf{(III.1.E)} \qquad (\nabla_{k} \nabla_{l} - \nabla_{l} \nabla_{k}) \cdot \xi^{i} = -R^{i}_{skl} \cdot \xi^{s} + (\Gamma^{s}_{kl} - \Gamma^{s}_{lk}) \cdot \frac{\partial \xi^{i}}{\partial x^{s}}$$

Из равенства (III.E) легко получить:

$$- \xi^{s} \cdot (R_{iskj} + R_{ksji} + R_{jsik}) + (\Gamma^{s}_{kj} - \Gamma^{s}_{jk}) \cdot g_{pi} \cdot \frac{\partial \xi^{p}}{\partial x^{s}} +$$

$$+ (\Gamma^{s}_{ji} - \Gamma^{s}_{ij}) \cdot g_{pk} \cdot \frac{\partial \xi^{p}}{\partial x^{s}} + (\Gamma^{s}_{ik} - \Gamma^{s}_{ki}) \cdot g_{pj} \cdot \frac{\partial \xi^{p}}{\partial x^{s}} \equiv 0$$

Учитывая, что в нашем случае аффинная связность имеет вид (2.4.D), заключаем: сумма второго, третьего и четвертого слагаемых в выше приведенном тождестве равна нулю.

Учитывая также произвольность вектора ξ^{s}, получаем:

$$\textbf{(III.2.A)} \qquad R_{iskj} + R_{ksji} + R_{jsik} \equiv 0$$

Учитывая согласованность связности (2.4.D) *“в узком смысле”*, т.е. равенство (III.1.C), из (III.2.A) получаем:

$$\textbf{(III.2.B)} \qquad \mathbf{R}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{ikj}} + \mathbf{R}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{kji}} + \mathbf{R}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{jik}} \equiv 0$$

Из (III.2.B) сверткой по индексам **s** и **j** сразу получаем:

$$\textbf{(III.2.C)} \qquad \mathbf{R}_{\mathbf{ik}} = \mathbf{R}_{\mathbf{ki}}$$

Таким образом, симметрия тензора Риччи обусловлена специальным видом несимметричной аффинной связности (2.4.D), и в частности – согласованностью ***“в узком смысле”*** с метрикой Римана.

Москва, 20 августа 2010.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] И.А. Курилин. “Несимметричная аффинная связность в ТЕОРИИ ПОЛЕЙ ВРЕМЕНИ и реализация программы Эйнштейна по поиску геометрии для построения теории единого грави-электромагнитного поля”. Размещена на сайте Web-Института исследований природы времени в разделе "Библиотека электронных публикаций": 2010 г., http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/kurilin_sviaznost.pdf .

[2] А.Л. Зельманов, В.Г.Агаков. “Элементы общей теории относительности”. Москва, “Наука”, 1989 г.

[3] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. “Современная геометрия: Методы и приложения”. Москва, “Наука”, Главная редакция физико-математической литературы, 1986 г.