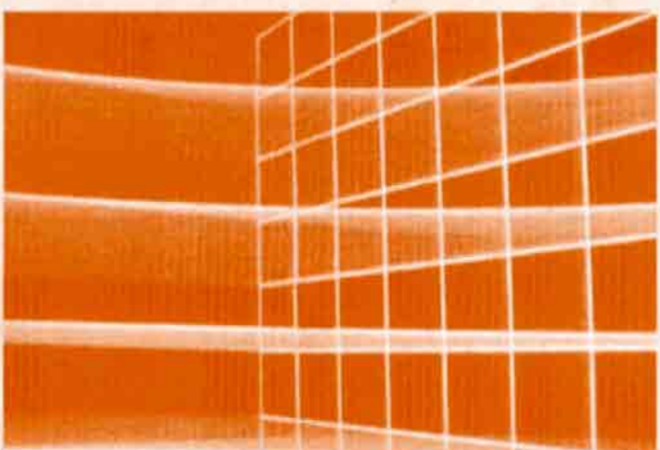
Р. И. Пименов

АНИЗОТРОПНОЕ ФИНСЛЕРОВО ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ КАК СТРУКТУРЫ ПОРЯДКА



URSS

Р. И. Пименов

АНИЗОТРОПНОЕ ФИНСЛЕРОВО ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ КАК СТРУКТУРЫ ПОРЯДКА

Под редакцией
доктора физико-математических наук
Ю. Д. Бураго

Издание второе, стереотипное

МОСКВА

URSS

ББК 22.312 22.313 87.1

Пименов Револьт Иванович

Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка / Под ред. Ю. Д. Бураго. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: ЛЕНАНД, 2006. — 184 с.

ISBN 5-9710-0043-8

Начиная с отношения порядка («раньше-позже»), строится математическая модель пространства-времени, в которой скорость света различна по разным направлениям, т. е. световой конус не круговой, а «граненый». Дальнейшее допущение, что этот конус *меняется от точки к точке, позволяет получить* финслерово обобщение общей теории относительности. Прослеживается, как модифицируются привычные физические понятия (точечный наблюдатель, одновременность, собственное пространство, энергия-импульс, уравнения Эйнштейна). Обнаруживается, какую роль играют гипотезы дифференцируемости (гладкость конуса, гладкость допустимых кривых) в формулировках принципов детерминизма. Предлагается несколько хроногеометрических аксиоматик специальной теории относительности. Специально исследуется класс особых кривых — вращающихся фотонов. Проанализирована ошибочность попыток с помощью анизотропии опровергнуть теорию относительности. Получены новые результаты о финслеровом тензоре кривизны, о «черных дырах» и др. Предполагается, что читатель знаком с аппаратом классической общей теории относительности.

Рекомендуется математикам и физикам, а также всем, кто интересуется проблемами исследования пространства-времени.

Рецензенты:

член-корреспондент АН СССР *Ю. Г. Решетняк*,
профессор *Б. А. Розенфельд*,
профессор *Г. А. Зайцев*,
доцент *А. И. Черемисин*

Отпечатано в типографии ООО «ЛЕНАНД».
117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.
Подписано к печати 14.11.2005 г. Формат 60×90/16. Печ. л. 11,5. Зак. № 327.

ISBN 5-9710-0043-8

3663 ID 32931
9 785971 000433 >

ОГЛАВЛЕНИЕ

Гл. 2. ОБЪЕКТЫ И КОНСТРУКЦИИ В КИНЕМАТИКАХ

Гл.3. ФИНСЛЕРОВО ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

ANISOTROPIC FINSLER EXTENSION OF GENERAL RELATIVITY AS AN ORDER STRUCTURE by R.I.Pimenov. Contents:

English summaries on the pages 6, 15, 56, 115 and 175.

ВВЕДЕНИЕ

0.1. **Назначение книги.** Целью книги является дать связное и содержательное изложение теории анизотропного пространства-времени, частным случаем которой является общая теория относительности. Подробнее эта формула раскрывается так. Предполагается, что читатель знаком с идеями, лежащими в основе специальной и общей теорий относительности. Такому читателю рассказывается, как можно построить математически корректную теорию, в которой скорость света по разным направлениям различна, а потому в этой теории нет той богатой группы автоморфизмов (симметрий), которая имеется в специальной теории относительности и (инфинитезимально) даже в общей. Тем не менее наша теория строится не с намерением "опровергнуть" теорию относительности, а с задачей расширить ее с соблюдением принципа перманентности. Мы ставим своей целью проследить, как модифицируются привычные физические понятия – "точечный наблюдатель", "одновременность", "собственное пространство", "энергия-импульс" и т.п. – в нашем анизотропном мире. Как будет видно, введение в рассмотрение анизотропного мира связано с допущением к рассмотрению негладких, недифференцируемых функций; показывая обоснованность их применения в физике, мы стремимся сузить (специфицировать) необъятно широкий класс недифференцируемых функций до хорошо известного класса абсолютно-непрерывных функций (т.е. липшицевых с показателем единица), извлечь содержательные физически следствия из факта допущения к рассмотрению этих функций. Так как мы при построении нашей теории опираемся на теорию (частично) упорядоченных пространств, то побочной целью нашей книги является иллюстрация методов и возможностей этой теории применительно к пространству-времени ("хроногеометрия", "каузальная структура"). Так как при построении нашей теории мы опираемся на теорию финслеровой связности, то побочной целью нашей книги является иллюстрация методов и возможностей этой теории применительно к пространство-времени (финслерова геометрия).

0.2. Предмет изучения. Опишем подробнее, но пока еще неформально, тот объект, который будет служить нашим предметом изучения. Дабы можно было рисовать картинки, мы вместо четырехмерного случая (t, x, y, z) ограничимся трехмерным (t, x, y), а начнем даже с двумерного (t, x).

Рассмотрим простейшую задачу изображения механического перемещения материальной точки вдоль одного направления x со временем t. На рисунке 1 прямые изображают равномерное прямолинейное движение. Ясно, что из всех геометрически возможных прямых, проходящих через O, одна прямая выделена и отличается ото всех прочих: это прямая $t = O$, которая изображала бы движение с бесконечно-большой скоростью, запрещенной в физике. Все же прочие прямые равноправны в смысле принципа Галилея: их можно совмещать одну с другой "вращениями" вокруг точки O, если не выдвинуто дополнительного запрещения на величину допустимых скоростей. Конечно, эти "вращения" не суть эвклидовы вращения (хотя бы уже потому, что прямую $t = O$ нельзя никаким физически допустимым "вращением" совместить ни с одной другой прямой, проходящей через O).

Так, желая геометрически изображать физические перемещения графиками на плоскости, мы оказываемся вынуждены рассматривать автоморфизмы плоскости, транзитивные лишь на подмножестве прямых (точнее: на связном открытом пучке прямых, притом точно транзитивные). Обозначим группу (линейную) этих автоморфизмов $\mathcal{G}(t, x)$. Нетрудно описать общий вид их. В самом деле, произвольное преобразование $A \in \mathcal{G}(t, x)$ обязано иметь неподвижные прямые (например, $t = O$). Сколько неподвижных прямых – т.е. сколько собственных векторов – имеет матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, представляющая A?

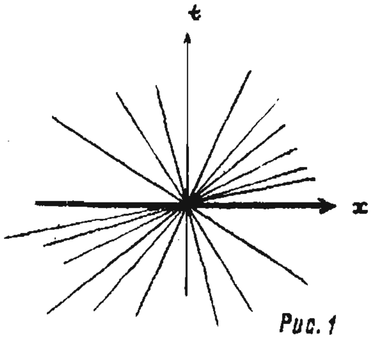


Рис. 1

Один, два, либо же все векторы собственные. В последнем случае группа, порожденная A, не не-

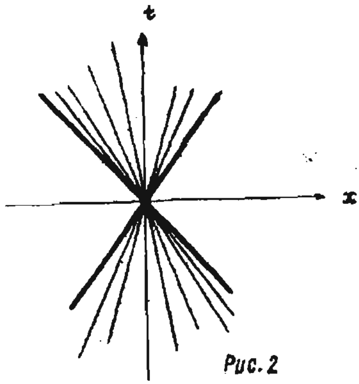


Рис.2

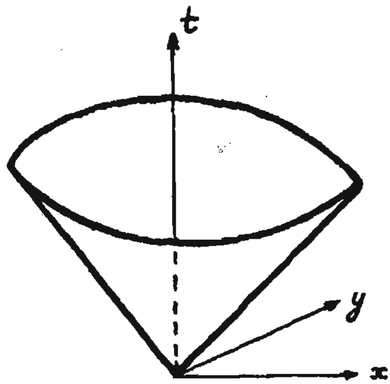


Рис.3

реводила бы ни одной прямой ни в какую другую, так что его можно исключить. Следовательно, в подходящей системе координат матрица имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ либо $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. В первом случае неподвижная прямая единственна (т.е. $t = 0$; отвечающая бесконечно-большой скорости $v = \infty$), во втором – есть две запрещенные и неподвижные прямые, между которыми лежат прямые, отвечающие дозволенным перемещениям со скоростями в диапазоне $c_1 < v < c_2$) (рис.2). Так как эмпирические данные свидетельствуют, что скоростей свыше определенного численного значения не встречается, то первая модель, именуемая галилеево-ньютоновой кинематикой (пространство-временем), менее интересна (хотя она и будет привлекаться нами для сравнения). Внимание сосредоточивается на моделях второго типа, когда по всем направлениям в двумерных плоскостях возникает картина рисунка 2. Группа $\mathcal{G}(t,x)$ "галилеево-лоренцовых" допустимых преобразований в плоскости (t,x) такая же, как группа $\mathcal{G}(t,y)$ в плоскости (t,y) и имеет вид:

$$\begin{cases} t' = t\,\mathrm{ch}\,\varphi + x\,\mathrm{sh}\,\varphi \\ x' = t\,\mathrm{sh}\,\varphi + x\,\mathrm{ch}\,\varphi \end{cases} \tag{0.2.1}$$

Но здесь возможны два существенно разных варианта. В трехмерном случае в точке O возникает конус либо рисунка 3, либо рис.4. В первом случае сечение этого конуса 2-плоскостью $t = \mathrm{const} > 0$ дает круг, а во втором – фигуру, но прив...

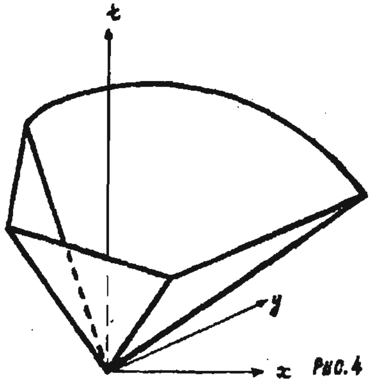


Рис.4

мую к кругу линейными преобразованиями. В первом случае все граничные прямые лежат на круговом конусе

$$ct = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (0.2.2)$$

и совмещаемы друг с другом эвклидовскими вращениями

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases} \qquad (0.2.3)$$

Преобразования (автоморфизмы) $\mathcal{O}(t,x)$ и $\mathcal{O}(t,y)$ являются подгруппами единой группы $\mathcal{O}(t,x,y)$, порожденной согласно (0.2.1–3). Именно этот случай, как более легкий, стал предметом изучения физики под названием "частная теория относительности", а группа $\mathcal{O}(t,x,y)$ получила название группы Лоренца. Во втором, трудном случае, фронт световой волны (т.е. сечение конуса плоскостью $t = const$) не сферический. "Скорость света", т.е. наклон граничного луча относительно "наблюдателя" Ot , различна по разным направлениям. Итак, с физической точки зрения предлагаемая далее теория есть теория пространства-времени для анизотропных сред.

Изображенный на рис.3 случай соответствует специальной теории относительности. Общая теория относительности возникает, если такой круговой конус задан в каждом касательном к миру пространстве. Аналогично этому общая анизотропная теория пространства-времени возникает как теория тех многообразий, в касательных пространствах к которым задан некруговой конус рисунка 4. В теории относительности кроме конуса (0.2.2) рассматривается еще пространственно-временная метрика

$$\tau\big((t,\bar{x}),(t',\bar{x}')\big) = \sqrt{c^2(t'-t)^2 - |\bar{x}'-\bar{x}|^2}\,, \qquad (0.2.4)$$

которая в общем случае принимает известный вид

$$\tau(q,q') = \int_{\gamma}^{\gamma'} \sqrt{g_{ik}(p)\frac{dp^i}{ds}\frac{dp^k}{ds}}\,ds\,. \qquad (0.2.5)$$

Ее связь с конусом выражается уравнением конуса

$$\tau(p,x) = 0\,, \qquad (0.2.6)$$

равносильным (0.2.2). Аналогичная "кинематическая метрика" τ вводится нами и для анизотропных случаев, с сохранением (0.2.6) и обобщением (0.2.4-5).

0.3. Негладкие функции. Взгляд на рис.4 объясняет, почему в общем случае фронт волны может описываться не только C^{∞}-гладкой функцией, но даже C^1-дифференцируемой. Другим доводом в пользу разрешения рассматривать недифференцируемые функции в теории пространства-времени является то обстоятельство, что предел последовательности C^1-дифференцируемых временноподобных кривых ("материальных точек"), вообще говоря, является не дифференцируемой кривой. Разрешая себе допускать к рассмотрению не гладкие объекты, мы порываем с установившейся в теории пространства-времени запретительной традицией. Этот либерализм, безусловно, затруднит получение многих результатов. Зато станет яснее смысл полученных.

Вопрос о том, какие понятийные конструкты следует, а какие не следует рассматривать применительно к физическому миру, относится к метатеории, и мы не претендуем отвечать на него здесь. Напомним лишь, что многие "математические патологии" (а к таковым относятся недифференцируемые функции) на самом деле очень часто оказываются наиболее адекватным и естественным описанием реальных объектов, возникающих в результате случайных процессов и обнаруживаемых в самых разнообразных областях знания. Даже канторовы дисконтинуумы, покрывающая всю плоскость кривая Пеано, коврообразные кривые Коха и Серпиньского, долгое время служившие лишь математическими контрпримерами, теперь трудами Мандельброта [27] вошли во многие различные главы "геометрии природы" и в эффективные алгоритмы вычислительной математики. Такие материальные предметы и явления, как лунный пейзаж, протяженность обычного морского берега, броуново движение, резкая неоднородность материи во Вселенной, странные аттракторы в токе турбулентной неоднородно нагретой жидкости, корабельная качка – всё это сейчас увязывается с нигде не дифференцируемыми функциями и с канторовыми множествами. Это – веские эмпирические доводы в пользу названного либерализма. Однако мы в своем либерализме не заходим так далеко: самой патологичной функцией, которая встретится в наших контрпримерах, будет "канторова лестница" – монотонная непрерывная отличная от константы функция, почти везде имеющая производную, причем в каждой точке существования эта производная равна нулю. Иными словами, мы разрешаем со-бы рассматривать функции, не имеющие производных на множестве лебеговой меры нуль, но от рассмотрения более общих функций (фракталей) воздерживаемся. Благодаря этому, в частности, все интегральные формулировки, принятые в современной физике, у нас сохраняют свою силу, так что принцип перманентности (включение прежнего знания в новую концепцию как частного случая) у нас соблюдается и в этом аспекте.

0.4. Финслерова геометрия. Общая теория относительности строится, как известно, на базе римановой геометрии (0.2.5) т.е. посредством рассмотрения некоторого дважды ковариантного тензора, который, в свою очередь является объектом $g \in E_n^* \otimes E_n^*$ из тензорного произведения ковекторного пространства E_n^*, сопряженного векторному E_n.

В анизотропном случае ситуация окажется сложнее. Пусть $\tau(p, X)$ обозначает метрику в касательном в точке p векторном пространстве для анизотропного случая. Тогда аналог формулы (0.2.5) таков:

$$\tau(q, q') = \int_{q}^{q'} \tau\left(p, \frac{dp}{ds}\right) ds . \qquad (0.4.1)$$

Для того, чтобы результат не зависел от репараметризации кривой (геодезической), по которой производится интегрирование, необходимо, чтобы $\tau(p, X)$ была положительно-однородной функцией по X, а тогда двукратным применением формулы Эйлера получается

$$\tau(p, X) = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau^2(p, X)}{\partial X^i \, \partial X^k} X^i X^k} \qquad (0.4.2)$$

и (0.4.1) приобретает вид почти (0.2.5):

$$\tau(q, q') = \int_{q}^{q'} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau^2(p, X)}{\partial X^i \, \partial X^k} \frac{dp^i}{ds} \frac{dp^k}{ds}} \, ds . \qquad (0.4.3)$$

Но только "почти", ибо в изотропном случае $g_{ik}(p)$ зависели от точки p, но не зависели от направления (вектора) X, тогда как в анизотропном случае зависят и от X. Следовательно, вместо объекта $g \in E_n^* \otimes E_n^*$ мы должны иметь дело с объектом $g \in E_n \times E_n^* \otimes E_n^*$ (первое умножение не тензорное, а второе тензорное). Это уже не тензор, и на тензорной основе невозможно корректно построить анизотропную теорию. Этот объект – "финслеров тензор", и анизотропному варианту общей теории относительности должно быть предпослано изучение свойств финслеровых тензоров, их координатных преобразований, финслеровых связностей, согласования последних с финслеровой метрикой и т.п. То, что в изотропном варианте может считаться общеизвестным, здесь еще нуждается если не в обосновании, то в связном изложении. А эта теория громоздкая. Достаточно сказать, что в финслеровом случае вместо одного тензора кривизны возникают три.

0.5. Отношение порядка. Из (0.2.2) и рис.2-3 легко находится отношение порядка (следования) в специальной теории относительности: событие $(t, \vec{x})$ предшествует событию $(t', \vec{x}')$, если

$$t' - t > |\vec{x}' - \vec{x}| \ . \qquad (0.5.1)$$

Известно, что формула (0.5.1) инвариантна относительно связной компоненты группы Лоренца и потому может быть принята за корректное определение. Отношение $(t, \vec{x}) < (t', \vec{x}')$ оказывается антисимметричным и транзитивным, т.е. строгим отношением порядка. Физический смысл его таков: событие $(t, \vec{x})$ может быть причиной события $(t', \vec{x}')$. Это толкование "потенциальной причинности" стандартно закреплено за (0.5.1). В общей теории относительности аналогичное отношение возникает в каждой достаточно малой окрестности точки p, где можно корректно фиксировать одну из двух половинок конуса $g_{ik}(p) X^i X^k > 0$. Трудности возникают при расширении этой окрестности, но для нас, не интересующихся глобальными вопросами, это несущественно.

Уже в первые десятилетия по рождении теории относительности отношение порядка-потенциальной причинности воспринималось как фундаментальное. Физика базируется на идее причинности. Фраза "$\mathcal{O}$ есть причина $\mathcal{A}$" предполагает, что $\mathcal{O}$ в каком-то смысле раньше $\mathcal{A}$. Отношение "раньше" математически есть отношение рода порядка. Поэтому изучение структур порядка есть в физическом аспекте разработка самых базисных априорных моделей для укладывания в них последующего физического материала. И здесь мы кладем его в основу наших построений. Иными словами, мы начинаем строгое изложение не с рассмотренных выше примеров, не с рисунков и не с неизотропных сред, а со структуры порядка. Этот порядок подчиняется определенным аксиомам. Последние выбраны здесь так, чтобы не останавливаться на стадии чрезмерно общих моделей, описанных в книге автора [37], а получить вышеуказанные конкретно. Сначала мы рассматриваем упорядоченное векторное пространство ("векторные кинематики"), затем – упорядоченное векторное пространство с кинематической метрикой ("метрические векторные кинематики"). При этом оказывается, что функции, описывающие наши конусы, суть выпуклые функции, а следовательно, имеют почти везде не только первые, но и вторые производные. Затем мы переходим к многообразиям, в касательных пространствах к которым заданы метрические векторные кинематики. Это и будет финслерова теория относительности.

0.6. К истории тематики. Уже в 20-е гг. нашего века А.Эддингтон, а еще раньше А.Робб [48] понимали, что в "теории относительности" существенна не "относительность", а "абсолютная структура". Эту абсолютную структуру Эддингтон увязывал с отношением порядка, порождаемым световым конусом. В 40-е гг. А.Д.Александров математически доказал [1], что из отношения следования можно получить всю специальную теорию относительности (см. обзорную статью [20]) и вскоре провозгласил программу: всю теорию относительности заменить изучением отношения следования, понимаемого как первичное каузальное отношение. В 60-е годы независимо Г.Буземан [16] и Р.И.Пименов [37] построили максимально общие пространство-времена, исходя из отношения следования. Тогда же стала развиваться школа Пенроуза-Кронхеймера-Хокинга [57], исследующая каузальную структуру на уже заданном псевдоримановом пространстве. Где-то посредине между этими двумя направлениями располагаются исследования М.А.Улановского [55].

И Эддингтон и Александров имели в виду изотропный мир рисунка 3. Поэтому Александров главным инструментом сделал группу максимально транзитивных автоморфизмов (которые оказались связной компонентой группы Лоренца, умноженной на гомотетии). Но уже в 30-е гг. В.И.Вернадский [18] настаивал – исключительно из генерализации эмпирических соображений – на анизотропии нашего мира. Идея анизотропии, действительно, противоположна идее симметрии, а с группами симметрий удобнее работать, чем без них, поэтому проповедь отказа от симметрий непопулярна. С другой стороны, некоторые сторонники анизотропии, отождествляя наличие симметрий и теорию относительности, пытались "опровергнуть" специальную теорию относительности, но их доводы [53], опиравшиеся на рассмотрение исключительно двумерного случая, ничего не доказывают (подробнее см. §5). Ряд авторов старались увязать рассматриваемые ими анизотропные модели с группами симметрий (отличных от лоренцовых) [4, 12,13,21,33,50]. В упомянутых работах Буземана и Пименова фактически рассматривались анизотропные миры, но физических выводов из этого не делалось. Финслерову геометрию применительно к анизотропному физическому миру начали независимо использовать в 70-е гг. Асанов [5], Бим [10] и Пименов [40,41, 43,45]. При этом первый неправомерно пользуется общим термином "финслерова геометрия" для обозначения одного ее частного случая (когда конус, изображенный на рис.4, симплициальный, см. ниже пример (1.2.5)). Недавний всплеск активности в финслеровой геометрии связан не с этими идеями, а с совершенным М.Мацумото переворотом в понимании финслеровой связности [28, 30]. Имеются некоторые поверхностные попытки применения этой теории к физике пространства-времени, обзор их см. в статье Исикава [22]. Отдельные понятия и объекты финслеровой геометрии независимо и неявно возникали еще в середине прошлого века в неголономной механике, в вариационном исчислении, но как самостоятельная конструкция она разработана в тридцатые годы XX в. Картаном и получила обоснование в трудах Мацумото.

Основатели математической физики не знали никаких иных функций, кроме гладких. И даже сейчас, когда допускают к рассмотрению сингулярность в космологии, теорию катастроф или дискретность в квантовой физике, этому предшествует пользование гладкими функциями, дифференциальные операторы на которых дают дискретный спектр или т.п. Такого рода сингулярности не являются темой нашей книги. Лишь к концу прошлого века в математике появляются патологические функции, к ним проявляли интерес Бугаев и его ученики Лузин и Флоренский, но лишь Мандельброт [27] убедил, что они важны для изучения природы. Некоторыми из них мы и пользуемся.

Подробнее историю вопроса см. в работах автора [37,42]. Настоящая монография дает доказательства к анонсированным в работе автора [42] утверждениям: по §1 полностью, по рубрикам 4-9 §2 и 4-5,7-8 §3. Предполагавшиеся гл.4-5 настоящей монографии по соображениям листажа изданы отдельно и конспективно в форме препринта [40], а здесь только намечены в §10. По тем же причинам приведенная там библиография здесь не повторяется.

This book "Anisotropic Finsler extension of General Relativity as an order structure" evolves a mathematical pattern for such spacetime where the light velocity is

variable upon direction i.e. the light cone is not the cone of rotation but has facets. Let this cone be variable upon point, thus a Finsler extension of General Relativity is obtained. We consider counterparts to the usual notions - observer, simultaneity, eigenspace, energy-momentum, Einstein equations. The importance of being differentiable (for cones, for curves) while one sets forth a Determinism Principle, is found. Some new axiomatics for Special Relativity by means of Causality are suggested, for General Relativity too. A class of peculiar curves (rotating photons) is studied. New results about Finsler curvature tensor, about blackholes, etc. The usage of Anisotropy against Relativity is shown to be a misunderstanding. The reader is supposed to know the standard General Relativity calculus.

Гл.1. ВЕКТОРНЫЕ КИНЕМАТИКИ

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ НЕМЕТРИЗОВАННЫХ КИНЕМАТИК

1.1. Определение векторного и аффинного пространства-времени. Всюду в этой главе слово "пространство" означает или векторное E_n или аффинное A_n вещественное n-мерное пространство с естественной топологией при $n \geq 2$. Векторы $A \in E_n$ обозначаем большими латинскими буквами. Когда надо отличать вектор $X \in E_n$ от ковектора $X \in E_n^*$ или от какого-либо тензора $X \in E_n \otimes E_n \otimes E_n^*$, над или под буквой соответственно ставятся черточки: $\overline{X}$, $\underline{\lambda}$, $\overline{\overline{\underline{X}}}$. Множества, как и точки аффинного пространства, обозначаются малыми латинскими буквами, и черточка над ними означает замыкание, ∂x обозначает границу множества x, а $\operatorname{int} x$ – внутренность x. Вещественные числа (скаляры) обычно обозначаем греческими буквами. Отношение порядка $A < B$ строгое (антисимметричное и транзитивное).

Определение 1. Структуру $(E_n, <)$ называем векторной кинематикой, если выполнены аксиомы ВК_{1-4}.

ВК_1. Порядок согласуется со сложением, т.е.

$$A < B \Rightarrow A + X < B + X,$$

ВК_2. Порядок согласуется с умножением на положительное число: $\xi > 0 \Rightarrow (A < B \Rightarrow \xi A < \xi B)$.

ВК_3. Порядок не пуст, т.е.

$$\{X \mid X > 0\} \neq \varnothing .$$

ВК_4. Порядок открыт, т.е. множество $\{X \mid X > 0\}$ открыто.

Определение 2. Структуру $(A_n, <)$ называем аффинной кинематикой, если структура $(E_n, <')$ есть векторная кинематика, где E_n – векторное пространство, отвечающее данному аффинному, а $<'$ введено условием $0 <' X \Leftrightarrow X = q - p \;\&\; p < q$.

Определение 3. Положительным конусом $0^+ \subset E_n$ (соответственно конусом будущего $p^{+} \subset A_n$) называем множество $\{X \mid X > 0\}$ (соответственно $\{x \mid p < x\}$). Аналогично O^{-} и p^{-}. Интервалом (p,q) называем $p^{+} \cap q^{-}$.

Определение 4. Говорим, что A предельно предшествует B, и пишем $A \lessdot B$, если $B \in \overline{A^{+}}$.

Из аксиом непосредственно ясно, что $A>0$ равносильно $-A<0$, что все утверждения инвариантны относительно параллельного переноса, что A^{+} открыто и не пусто при всяком $A \in E_n$, что если $A<B$, то найдется окрестность ω_A вектора A при $\omega_A \subset B^{-}$, и т.п.

1.2. Примеры (неметризованных) кинематик. Примеры, для удобства ссылок, будем обозначать единообразно; КИН с индексом-номером кинематики.

КИН$_1$. Галилеева (неметризованная) кинематика есть $\mathbb{R} \times E_{n-1}$ при дефиниции порядка

$$(t,\bar{x}) < (t',\bar{x}') \Leftrightarrow t' > t, \qquad (1.2.1)$$

см. рис.1. Здесь конус O^{+} совпадает с полупространством $t>0$, и точнее именовать его не "конус", но "клин".

КИН$_2$. Лоренцова (неметризованная) кинематика есть $\mathbb{R} \times E_{n-1}$ при заданной на E_{n-1} обычной эвклидовой метрике $|\,.\,| : E_{n-1} \mapsto [0,\infty)$ и дефиниции порядка

$$(t,\bar{x}) < (t',x') \Leftrightarrow t'-t > \sqrt{(\bar{x}'-\bar{x})^2}, \qquad (1.2.2)$$

см. рис.2–3.

КИН$_3$. Квазилоренцова (неметризованная) кинематика есть $\mathbb{R} \times E_{n-1}$ при заданной на E_{n-1} положительно-однородной непрерывной выпуклой невырожденной функции ("несимметричная норма") $\|\,.\,\| : E_{n-1} \mapsto [0,\infty)$ и дефиниции порядка

$$(t,\bar{x}) < (t',x') \Leftrightarrow t'-t > \|\bar{x}'-\bar{x}\|, \qquad (1.2.3)$$

см. рис. 4.

Выделим особо два ее важных подслучая.

КИН$_4$. Двумерная кинематика с различными скоростями света вперед и назад есть $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ при дефиниции порядка

$$(t,x) < (t',x') \Leftrightarrow t'-t > \alpha(x'-x) \;\&\; t'-t > -\beta(x'-x), \qquad (1.2.4)$$

где $\alpha, \beta > 0$, $\alpha \neq \beta$.

КИН$_5$. Симплициальная кинематика – случай, когда тело $\|\bar{x}\| = 1$ является симплексом в E_{n-1}. Порядок в ней задается формулой

$$(t,\bar{x}) > 0 \Leftrightarrow t > \max\left\{ \sum_{\beta=2}^{n} x^{\beta},\; -nx^{\alpha} + \sum_{\beta=2}^{n} x^{\beta} \;\middle|\; 2 \le \alpha \le n \right\} \qquad (1.2.5)$$

или, в более удобных координатах, формулой

$$(\xi^1,\ldots,\xi^n) > 0 \Leftrightarrow \xi^1 > 0 \;\&\ldots\&\; \xi^n > 0. \qquad (1.2.6)$$

Переход между координатами:

$$n\xi^1 = t - \sum_{\alpha=2}^{n} x^\alpha , \qquad \xi^\alpha = x^\alpha + \xi^1 ; \qquad (1.2.7)$$
$$t = \sum_{k=1}^{n} \xi^\kappa , \qquad x^\alpha = \xi^\alpha - \xi^1 .$$

Именно в этих координатах ввел это пространство-время Асанов 3,4, никак не связывая его со структурой порядка.

КИН$_5$. Циклическая кинематика. На $\mathbb{R}^2$ зададим порядок дефиницией:

$$(t,x) < (t',x') \iff t'-t > |\sin\pi(x'-x)| . \qquad (1.2.8)$$

Очевидно, что эта структура не удовлетворяет аксиоме ВК$_2$, так что она не является ни векторной, ни аффинной кинематикой. Однако она удовлетворяет аксиомам ВК$_1$, ВК$_3$ и ВК$_4$, причем удовлетворяет даже такому усилению аксиомы ВК$_3$:

ВК$_3^+$. Пересечение O^+ с любой окрестностью нуля не пусто.

Такие структуры названы Крейновичем "трансляционными кинематиками" и имеют много общего с векторными-аффинными. О их возможной роли в общей теории пространства-времени см. [7].

1.3. Эйнштейновы векторные и аффинные кинематики. Введем наш основной объект изучения.

Теорема 1. В векторной, аффинной (и даже в трансляционной) кинематике $B^+ \subset A^+$ эквивалентно $A^- \subset B^-$.

Доказательство. Пусть $B^+ \subset A^+$. Это значит, что $\forall X \; B<X \Rightarrow A<X$. Взяв произвольный $Y>0$, по ВК$_1$ получаем $Y+B>B$, откуда $Y+B>A$, т.е. $\forall Y \; Y>0 \; B-A+Y>0$. Взяв тут $Y=A-Z$ при $Z\in A^-$ (это корректно, ибо тогда $Y>0$), получим $B-Z>0$, т.е. $Z\in B^-$. Аналогично в обратную сторону.

Следствие 1. $A<B\leqslant C \Rightarrow A<C$, $A\leqslant B<C \Rightarrow A<C$.

Сначала заметим, что из $B\leqslant C$ вытекает $C^+\subset B^+$. В самом деле, в силу ВК$_4$ при любой $Z>C$ найдется такая окрестность u_C вектора C , что $Z>u_C$. Но в этой окрестности по $C\in \overline{B^+}$ имеется вектор $Y\in B^+$, а потому $Z>B$. Теперь применением теоремы 1 устанавливаем, что из $B\leqslant C$ следует $B^-\subset C^-$, откуда легко усмотреть цепочку $A<u<C$ & $u<B$.
Аналогично устанавливается вторая импликация.

Следствие 2. $B\in\overline{A^+} \iff A\in\overline{B^-}$. Проверяется аналогично.

Следствие 3. Отношение $A\leqslant B$ есть отношение замкнутого предпорядка. Это непосредственно вытекает из следствия 2.

Следствие 4. $A>0$ & $B\geqslant 0 \Rightarrow A+B>0$. Получается применением следствия 1 к векторам 0 , A и $A+B$.

Следствие 5. $A<B \Rightarrow \overline{A^-}\subset\overline{B^-}$ & $\overline{B^+}\subset\overline{A^+}$. Доказа-

тельство аналогично.

Определение 5. Говорим, что A и B абсолютно одновременны, записывая $A \leftrightarrow B$, если $A \preccurlyeq B$ и $B \preccurlyeq A$.

В силу следствия 3 отношение $\leftrightarrow$ является отношением эквивалентности, и можно образовать фактор-структуру по нему.

Определение 6. Называем векторную кинематику эйнштейновой, если $X \leftrightarrow 0 \Leftrightarrow X = 0$, т.е. ядро канонического гомоморфизма при факторизации состоит из одного нуля.

В наших примерах КИН$_1$ не эйнштейнова, ибо у нее множество одновременных нулю векторов образует гиперплоскость. КИН$_2$ и КИН$_3$ – эйнштейновы. Для трансляционных кинематик пришлось бы различать "локальную эйнштейновость" и "глобальную эйнштейновость": как видно из КИН$_6$, точки (t, x) при $t = 0$, $x \in N$ (т.е. x – целое) абсолютно одновременны друг другу.

Нашим главным предметом изучения будут именно эйнштейновы кинематики, тогда как прочие привлекаются лишь для сравнения. Поэтому начнем с того, что перечислим равносильные признаки эйнштейновости.

Теорема 2. Для того, чтобы векторная кинематика была эйнштейновой, необходимо и достаточно выполнения любого из следующих шести условий:

а) $\forall A \forall B \; A \neq B \Rightarrow \exists P \exists Q \; A \in (P,Q) \;\&\; B \notin (P,Q)$,

б) отличный от нуля предел последовательности положительных векторов не является пределом последовательности отрицательных векторов,

в) отношение $\preccurlyeq$ есть отношение порядка,

г) конус $\overline{0^+}$ имеет точечную (строгую) вершину,

д) любой интервал в замыкании $\overline{(A,B)}$ компактен,

е) существует гиперплоскость ω, разделяющая $\overline{P^+}$ и $\overline{P^-}$, т.е. для которой $\omega \cap \overline{P^+} \setminus P = \varnothing$ и $\omega \cap \overline{P^-} \setminus P = \varnothing$.

Доказательство. Прежде всего перепишем определение эйнштейновости "е" с учетом определений 4–6:

$$X \in \overline{0^+} \cap \overline{0^-} \Rightarrow X = 0. \qquad (1.3.1)$$

Пусть существует $B \neq 0$ при $B = \lim X_i = \lim Y_k$, где $X_i < 0$ и $Y_k > 0$. Тогда всякая окрестность точки B содержит некоторые X_i и Y_k при $X_i < 0 < Y_k$, т.е. $B \in \overline{0^-} \cap \overline{0^+}$, что противоречит (1.3.1). Итак, "е" влечет "б". Пусть всякий интервал, содержащий A, содержит $B \neq A$. Тогда всякий интервал, содержащий $A - B$, содержит 0. Взяв последовательность (P_i, Q_i), сходящуюся к $A - B$, получим $0 \in (P_i, Q_i)$, что противоречит "б", следовательно, из "б" вытекает "а". Если выполнено "а", то при $A \neq B$

всегда найдется $\langle P,Q\rangle \not\ni B$ при $P<A<Q$. Если $A \not\leq B$, то $P<B$ (следствие 1 теоремы 1), и потому невозможно $B<Q$, что вытекало бы из $B \prec A$. Итак, из "а" следует "б", чем доказана равносильность первых двух формулировок эйнштейновости. Формулировки "в" и "г" тривиально равносильны определению 6. Докажем "д". Если кинематика не эйнштейнова, то найдется $B \neq A$ при $B \leftrightarrow A$, а потому во всяком $\overline{\langle A, C\rangle}$ содержится вся прямая λB, так что $\overline{\langle A, C\rangle}$ некомпактно. Обратно, пусть $\overline{\langle A, C\rangle}$ некомпактно. Тогда, так как в векторной кинематике все интервалы с вершинами на одной прямой подобны (аксиома $ВК_2$), то найдется последовательность интервалов $\langle A, C_k\rangle$ с некомпактными замыканиями $\overline{\langle A, C_k\rangle}$ при $C_k \to A$. Это означает, что найдется последовательность лучей λB_k, целиком содержащихся в $\overline{\langle A, C_k\rangle}$. Так как множество лучей компактно, то найдется предельный луч $\lambda B \in \partial A^+ \cap \partial A^-$, чем нарушается "б". Очевидно, как из "д" следует "г". Обратное, будучи интуитивно ясным, нуждается в доказательстве. Конус $\overline{O^+}$, имея острую вершину, порождает в пространстве лучей (иными словами, на какой-нибудь евклидовой сфере с центром O) замкнутое компактное множество; аналогично $\overline{O^-}$. Эти множества обозначим q_1 и q_2; имеем $q_1 \cap q_2 = \varnothing$. Тогда по теоремам отделимости [28] найдется $\varepsilon > 0$, для которого $q_1(\varepsilon) \cap q_2(\varepsilon) = \varnothing$, где $q(\varepsilon) = \{X \mid \exists Q \in q \; |QX| < \varepsilon\}$. Так как в силу $ВК_{1-2}$ O^+ выпуклый, то $q(\varepsilon)$ выпукло. По $q_k(\varepsilon)$ строим конусы Q_k с вершиной O. Очевидно, они выпуклы, $Q_k \setminus O$ открыты и $Q_1 \cap Q_2 \setminus O = \varnothing$. Применяя теорему 11.3 из [48], получаем гиперплоскость, разделяющую $Q_1 \setminus O$ и $Q_2 \setminus O$; очевидно, она проходит через O и разделяет содержащиеся в Q_k исходные конусы $\overline{O^+} \setminus O$ и $\overline{O^-} \setminus O$.

Следствие. Задание эйнштейновой векторной (аффинной) кинематики равносильно заданию в E_n замкнутого выпуклого конуса Q с непустой внутренностью и острой вершиной, если полагать $X < Y \Leftrightarrow Y - X \subset \mathrm{int}\, Q$.

Мы уже получили такой конус $\overline{O^+}$. Обратно, если задан Q, то по выпуклости его выполняется $ВК_1$, по конечности – $ВК_2$, по непустоте внутренности – $ВК_3$, а $ВК_4$ тривиальна по самому определению. Согласно пункту "г" теоремы 2 полученная кинематика эйнштейнова.

Множество лучей $\lambda A \subset \overline{O^+}$ образует компактное подмножество в проективном пространстве всех прямых, проходящих через O. Оно точно представляется сечением конуса $\overline{O^+}$ любой гиперплоскостью, параллельной разделяющей. Это простое, но важное обстоятельство будет часто использоваться ниже.

Замечание 1. Помимо галилеевой КИН$_1$ и эйнштейновых кинематик существуют "промежуточные", которые в этой книге изучаться не будут. Один пример их обретает значение в единой теории поля, именно:

КИН$_7$. Электрическая кинематика. На E_5 с координатами (t, x, y, z, u) отношение порядка задается формулой

$$(t, x, y, z, u) > 0 \iff t > \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad (1.3.3)$$

тогда вершина $\bar{O}^+$ (клина, а не конуса) есть прямая $(0,0,0,0,u)$.

Замечание 2. Если исходить из конуса Q с непустой внутренностью, то возможен бесконечный набор по сути равносильных друг другу отношений порядка, ассоциированных со всеми возможными $O^+ \subset Q \subset \bar{O}^+$ и различающимися множествами $Q \cap \partial O^+$, то причисляемыми к собственно порядку, то относимыми к границе порядка. Так поступают А.Д.Александров и его ученики [20].

Теорема 3. Во всякой эйнштейновой аффинной кинематике можно выбрать систему координат $\mathbb{R} \oplus E_{n-1}$ так, что она окажется квазилоренцовой КИН$_3$ с порядком (1.2.3).

Доказательство. Возьмем в качестве E_{n-1} гиперплоскость β, разделяющую $\bar{O}^+$ и $\bar{O}^-$, приняв за ось темпорат прямую, проходящую через произвольный положительный вектор $A > 0$, и построим норму $\|\cdot\|$, фигурирующую в (1.2.3). Введем функцию f определением

$$f(\bar{x}) = t \iff (t, \bar{x}) \in \partial O^+, \quad (t \in \mathbb{R},\ \bar{x} \in E_{n-1}). \quad (1.3.4)$$

Так как луч $(\lambda t, \lambda \bar{x})$ весь принадлежит ∂O^+, а пересекается с плоскостью $t = \mathrm{const}$ в единственной точке, то определение корректно и $f: E_{n-1} \mapsto [0, \infty)$. По выпуклости O^+ функция f выпукла. Так как все сечения O^+ параллельными плоскостями подобны, то f — положительно-однородная функция. Так как она конечна, то она непрерывна по следствию 10.1.1 из [49]. Если $\bar{x} = 0$, то $(0, \bar{0}) \in \partial O^+$ и потому $f(\bar{0}) = 0$. Обратно, если $f(\bar{x}) = 0$, то $(0, \bar{x}) \in \partial O^+$ и весь луч $(0, \lambda \bar{x}) \subset \bar{O}^+ \cap \beta$, что при $\bar{x} \neq \bar{0}$ противоречит выбору β как разделяющей; этим доказана невырожденность f. Поэтому можно обозначить $\|\cdot\| = f$. Если $t > \|\bar{x}\|$, то $(t, \bar{x}) = (\|\bar{x}\|, \bar{x}) + (t - \|\bar{x}\|, 0) > 0$ в силу выбора $A > 0$ и следствия 4 теоремы 1. Если $t \leq \|\bar{x}\|$, то невозможно $(t, \bar{x}) > 0$, ибо тогда $(t, \bar{x}) + (\|\bar{x}\| - t, 0) > 0$, а по условию (1.3.4) $(\|\bar{x}\|, \bar{x}) \in \partial O^+$. Этим доказано (1.2.3).

Определение 7. Систему координат и норму $\|\cdot\|$, описанные этой теоремой, будем называть каноническими.

Замечание. В эйнштейновых кинематиках отделить $\overline{O^+}$ и $\overline{O^-}$ нельзя, поэтому ς в этом случае вырождается: $\varsigma(z)=0$ по крайней мере на прямой, а в галилеевом случае на всей гиперплоскости. В трансляционных кинематиках O^+ и функции ς не выпуклы, а разделяющая гиперплоскость, вообще говоря, разделяет $\overline{O^+}$ и $\overline{O^-}$ слабо (локально). Правда, и в этом случае Кройновичу удалось определить функцию ς аналогом условия (1.3.4), она однозначно задает следование в виде (1.2.3), но только эта функция оказывается не конечной и может быть даже всюду разрывной. Взамен выпуклости она субаддитивна $\varsigma(x+y)\leq\varsigma(x)+\varsigma(y)$. Кройнович показал, что в трансляционных кинематиках удается выделить естественный класс кинематик, в которых ς еще остается непрерывной, и этот класс шире класса векторных кинематик. Это такие трансляционные кинематики, в которых существует луч, целиком лежащий внутри O^+. Но объем доказательств в теории трансляционных кинематик возрастает нелинейно, и, не располагая объемом, мы не занимаемся здесь их теорией.

1.4. Интерпретация. Формальная система остается внутри математики и не имеет отношения к экспериментальным или обсервационным наукам, пока ее терминам не приписана некоторая неформальная (содержательная) интерпретация в – уже несколько расплывчатых – терминах, в той или иной мере допускающих хотя бы частичную (условную) верификацию (фальсификацию) посредством тех или иных операций над предметами, а не над понятиями. Процедура, обратная интерпретации, называется экспликацией. Со времен Минковского известно, как придавать геометрическим понятиям пространственно-временную интерпретацию. Мы будем пользоваться двумя стандартными интерпретациями.

Аффинная кинематика интерпретируется таким словарем:

Точка на A_n .	Событие, т.е. такое явление физического мира, которое не имеет ни длины, ни ширины, ни высоты (глубины), ни длительности, но про некоторые совокупности таких явлений уже можно говорить об их длительности, длине и т.п.
Отношение порядка $p<q$.	Потенциальная причинность, т.е. "событие p могло бы явиться причиной события q " или "могло бы хоть как-то повлиять на ход события q ". Другая формулировка того же

самого: "Событие p произошло раньше события q ", а потому " p могло бы послать материальный (т.е. с ненулевой массой) сигнал в q ".

Конусы p^+ и p^-. — Будущее для события p или прошлое того же p.

Прямая ℓ входит вовнутрь конуса 0^+. — Инерциально движущаяся материальная точка ℓ, понимаемая как "последовательность событий". Таким образом, ℓ имеет длительность, но не имеет еще длины, ширины и высоты. Равносильно говорят об инерциально движущемся точечном наблюдателе.

Аффинная (линейная) структура. — Возможность взаимооднозначно представить совокупность всех событий наборами четверок (t, x, y, z) так, что инерциальные частицы изобразятся системами линейных уравнений

$$\frac{t-t'}{a} = \frac{x-x'}{b} = \frac{y-y'}{c} = \frac{z-z'}{d} .$$

При этом не требуется, чтобы всякое уравнение отвечало какой-то инерциальной частице, тогда как требуется, чтобы всякому набору координат (t, x, y, z) отвечало некоторое событие. Операции сложения и умножения над координатами отвечают предполагаемой линейной структуре пространства-времени, т.е. обязаны иметь какой-то физический смысл.

Аксиома BK_3 — обеспечивает существование инерциальных материальных точек.

Аксиома BK_4 — гарантирует, что если ℓ – инерциальная частица, то чуть-чуть медленнее, чуть-чуть быстрее, чуть-чуть вбок движущаяся ℓ' – также инерциальна.

Аксиомы BK_{1-2} — вместе гарантируют, что если ℓ_1 и ℓ_2 инерциальные частицы, то всякая ℓ, "движущаяся с промежуточной скоростью", – также инерциальна.

Аксиома эйнштейновости — означает, что все возможные скорости инерциальных частиц ограничены в совокупности, т.е. существует число c такое, что для всех инерциальных

$$\left|\frac{x-x'}{t-t'}\right|,\ \left|\frac{y-y'}{t-t'}\right|,\ \left|\frac{z-z'}{t-t'}\right| < c\ .$$

Граница ∂p^+ .	Потенциально-допустимые воздействия из p с предельной скоростью. В неэйнштейновых мирах таковыми мыслятся бесконечно-быстрые, мгновенные воздействия (вроде гравитационного потенциала), а в эйнштейновых – перемещение светом и других электромагнитных процессов. Поэтому ∂p^+ называется "световым конусом".
Условие $\|-\bar{x}\| = \|\bar{x}\|$	означает, что скорость света одинакова "вперед" и "назад".

Векторная кинематика интерпретируется таким словарем:

Вектор $A \in E_n$.	Импульс, переводящий событие p в событие $p + A$.
Векторная (линейная) структура на E_n .	Совокупность всех мыслимых импульсов допускает операции сложения, вычитания, умножения на любое вещественное число.
Положительный конус O^+ .	Среди всех мыслимых импульсов выделена совокупность допустимых импульсов, замкнутая относительно сложения и умножения на положительное число.
Граничный вектор $A \in \partial O^+$.	Импульс, присущий свету или электромагнитному сигналу.

По мере появления новых геометрических конструкций будет возрастать интерпретационный словарь.

1.5. Отдельные замечания. Из теоремы 3 следует, что в нашей интерпретации распространение света описывается формулой

$$\|\bar{x}\| = t \qquad (1.5.1)$$

или, вводя физический масштаб, $\|\bar{x}\| = ct$.

Теорема 4. При $n \geqslant 3$ для того, чтобы конус O^+ был эллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы норма $\|\cdot\|$ была симметрична при произвольном выборе оси темпорат.

В самом деле, симметричность $\|-\bar{x}\| = \|\bar{x}\|$ означает, что сечение конуса O^+ плоскостью $t = const$ имеет центр симметрии $\bar{x} = 0$. Здесь нужна определенная осторожность. При тех преобразованиях конуса, при которых прямая $\bar{x} = 0$ оказывается центром симметрии, плоскость $t = const$ не обязана переходить в себя. (Например, при лоренцовых вращениях вида (0.2.1) эта прямая инвариантна.) В себя переходит лишь множество положительных лучей $\lambda A \in O^+$ (или его замыкание $\bar{O}^+$). На множество же лучей линейными преобразованиями в E_n индуцируются уже не линейные, а проективные преобразования. Поэтому указанный центр симметрии является проективным, а не аффинным центром симметрии. Возвращаясь к доказательству, вспомним, что единственное компактное тело в аффинном пространстве, всякая внутренняя точка которого является проективным центром его симметрии, — это эллипсоид (сфера, с точностью до растяжений).

Мы не будем доказывать этого и подобных проективных свойств. Напомним лишь проективную модель геометрии Лобачевского в виде внутренности шара (модель Клейна). Всякую точку внутри шара можно совместить с центром его посредством лобачевских движений, т.е. посредством проективных автоморфизмов шара. Точно так же любые две точки на граничной сфере можно совместить, т.е. можно совместить любые два пучка параллелей (по Лобачевскому). Верно и обратное: всякое компактное выпуклое тело, обладающее группой проективных автоморфизмов, транзитивной на внутренности тела и транзитивной на границе тела, является сферой.

В дальнейшем мы как синонимы будем использовать термины "эллиптический конус", "сферический конус". Теорему 4 можно переформулировать в равносильном виде:

Теорема 5. Для того чтобы произвольная эйнштейнова кинематика давала пространство-время специальной теории относительности при $n \geq 3$, необходимо и достаточно, чтобы скорость света "туда" равнялась бы скорости света "обратно" по всякому направлению $\lambda \bar{x} \in E_{n-1}$.

Определение 8. Произведением двух векторных кинематик $(E_1, <_1)$ и $(E_2, <_2)$ называется $(E_1 \oplus E_2, <_1 \times <_2)$, т.е. $\bar{z} = (x, y) > 0$ означает $x > 0 \& y > 0$. Произведением векторной кинематики $(E_1, <)$ с порядком $t > \rho(\bar{x})$, где ρ — норма, на нормированное векторное пространство (E_2, σ) называется пространство $E_1 \oplus E_2$ с порядком $t > (\rho \times \sigma)(\bar{x}, \bar{y})$.

Очевидно доказательство теоремы

Теорема 6. Произведение двух кинематик есть кинематика, притом эйнштейнова, если оба сомножителя эйнштейновы. При этом каноническое выпуклое множество (1.2.3) для кинематики-произведения есть выпуклая оболочка канонических множеств со-множителей. Произведение кинематики на нормированное векторное пространство есть кинематика, притом эйнштейнова, если кинематика-множитель эйнштейнова, а норма невырожденная. Здесь множители можно допускать одномерные.

Следует отличать прямое произведение кинематик от тех кинематик, которые получаются прямым произведением их канонических множеств. Например, умножением шара на отрезок порождается "цилиндрическая кинематика", не являющаяся прямым произведением кинематик.

Топология, базисом которой служат все интервалы (p, q), $p, q \in A_n$, называется интервальной. Очевидно доказательство теоремы.

Теорема 7. В эйнштейновой аффинной кинематике, и только в эйнштейновой, интервальная топология совпадает с топологией аффинного пространства.

Ведь, с одной стороны, всякий интервал открыт ($ВК_4$), а с другой, согласно пункту "д" теоремы 2, содержится в некотором евклидовом шаре.

В неэйнштейновых векторных кинематиках интервальная топология не хаусдорфова и потому не совпадает с естественной. В трансляционных кинематиках интервал может состоять из счетного числа компонент, например, в $КИН_0$. Очень важный результат доказан Крейновичем [23]: для трансляционных кинематик связность интервала равносильна аксиоме $ВК_2$.

Если конус O^+ не эллиптичный, то по нему можно построить два эллиптических: внутренний и внешний, следующим образом. Согласно теореме 3 конусу O^+ сопоставляется каноническая норма $\|\cdot\|$, а известно, что по всякой $\|\cdot\|$ можно построить мажорирующую и минорирующую евклидовы нормы, т.е. указать числа γ_1 и γ_2, при которых

$$\forall \bar x \quad \gamma_2 |\bar x| \leq \|\bar x\| \leq \gamma_1 |\bar x| , \tag{1.5.2}$$

причем эти оценки можно взять точными. В нашем построении набор чисел γ_{i} кажется зависящим от системы канонических координат, но, рассматривая пространство лучей ("фактор-пространство аффинного пространства по лучам с общим началом", "сферическое изображение"), можно убедиться, что результат от выбора координат не зависит.

Определение 8. Конус $Q_1 = \{(t, \bar x) \mid t > \gamma_1 |\bar x|\}$ назовем внутренним по отношению к O^+, а конус $Q_2 = \{(t, \bar x) \mid t > \gamma_2 |\bar x|\}$ внешним к O^+. Соответственные отношения порядка обозначим

$<_1$ и $<_2$.

Теорема 8. $p <_1 q \Rightarrow p < q \Rightarrow p <_2 q$.

Таким образом, анизотропное пространство-время как бы рождает два изотропных с разными скоростями света: $c_1 = \frac{1}{\gamma_1}$ и $c_2 = \frac{1}{\gamma_2}$. Если слой $\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1} << \frac{1}{\gamma_1}$ достаточно тонок, то причинная структура анизотропного пространства-времени может мыслиться как причинная структура изотропного со скоростью света $c = \frac{c_1+c_2}{2}$, а все эффекты анизотропии сводятся к "страшным" эффектам при околосветовых скоростях $c \pm \varepsilon$, $\varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{2}$. Так просто обстоит дело в векторных кинематиках, тогда как в трансляционных этот слой-шуба устроен хитроумнее и парадоксальных эффектов больше [7]. Вообще говоря, трансляционная n-мерная кинематика порождает две векторные: одна (анизотропная) m-мерная ($1 \leq m \leq n$), конус которой касается конуса ∂O^+ изнутри, а другая n-мерная (тоже анизотропная), конус которой опирается на ∂O^+ снаружи. Даже если исходная трансляционная кинематика локально-эйнштейнова, последняя кинематика может оказаться ньютоновой; так будет с $КНН_{O}$.

Если же разность $c_2 - c_1 \approx c_1$, то тогда можно мыслить анизотропное пространство-время как задающее два разных специально-релятивистских пространства-времени.

От анизотропного пространства-времени нетрудно перейти к вероятностному. Обозначим $\mathcal{U}(\eta) = \{\bar{x} \mid |\bar{x}| \leq \eta\}$, $V(\eta) = \{\bar{x} \mid \|\bar{x}\| \leq \eta\}$. Согласно (1.5.2)

$$\mathcal{U}(c_1 t) \subset V(t) \subset \mathcal{U}(c_2 t) \tag{1.5.3}$$

Обозначая теперь через $|\mathcal{U}|$ объем (евклидов, относительно $|.|$) множества $\mathcal{U}$, можем рассмотреть функцию

$$\rho(t, \bar{x}) = \frac{|V(t) \cap \mathcal{U}(|\bar{x}|)|}{|\mathcal{U}(|\bar{x}|)|} \tag{1.5.4}$$

при $c_1 t \leq |\bar{x}| \leq c_2 t$, полагая $\rho(t, \bar{x}) = 0$ при $|\bar{x}| > c_2 t$. Ее можно интерпретировать как вероятность того, что вектор $(t, \bar{x})$ положителен (импульс допустим). Вне внешнего конуса эта вероятность равна нулю, внутри внутреннего равна единице, а между конусами причинность "размыта".

Другой вариант вероятностного подхода. Обозначим

$$\sigma = \frac{|\mathcal{U}(c_2 t) \setminus V(t)|}{\mathcal{U}(c_2 t)} \tag{1.5.5}$$

(очевидно, что правая часть от t не зависит по линейности).

Тогда можно говорить, что скорость света задана с распределением

$$P(c<\xi)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\left(\eta-\frac{c_1+c_2}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right)d\eta\,, \tag{1.5.6}$$

что в случае, когда внешний конус совпадает с внутренним ($\sigma=0$, $c_1=c_2$) дает функцию Хэвисайда

$$P(c<\xi)=\varepsilon_{c_1}(\xi)=\begin{cases}=0\,, & \xi\le c_1\\ =1\,, & \xi>c_1\end{cases}\,. \tag{1.5.7}$$

§2. МЕТРИЧЕСКАЯ ВЕКТОРНАЯ КИНЕМАТИКА

2.1. Аксиомы векторной кинематической метрики. В теории относительности не ограничиваются световым конусом рис.3 (0.2.2), а вводят еще релятивистскую метрику (0.2.4). Разные релятивистские метрики, ассоциированные с одним и тем же световым конусом, могут отличаться только постоянным множителем – масштабом. Мы в анизотропном случае введем аналог релятивистской метрики и увидим, что разнообразие метрик в этом случае гораздо выше. Заметим, что метрика (0.2.4) как вещественно-значная функция определена не для всех пар $(t,\bar{x})$ и $(t',\bar{x}')$, а только для $(t',\bar{x}')\in\overline{(t,\bar{x})^+}$. Традиционно ее продолжают чисто мнимыми значениями; в обобщениях это неудобно (см. ниже примеры КИН$_{2,2}$ и КИН$_{3,2}$). В некоторых наших работах мы определяли τ на $E_n\setminus\overline{O^+}$ значением ноль, в других – вообще не определяли. Здесь мы последуем приему, почерпнутому в выпуклом анализе, доопределяя значения функции "числом" $-\infty$. Мы даем три варианта аксиоматики: два в этом параграфе и один в следующем.

Рассматриваем структуру $(E_n,<,\tau)$, где $(E_n,<)$ – векторная кинематика §1, а $\tau:E_n\mapsto\{-\infty\}\cup[0,\infty)$ и вводим аксиомы:

ВК$_5$. $\operatorname{dom}\tau=\overline{O^+}$. Напомним, что домен функции $\operatorname{dom}\tau$ это то множество в области $\mathcal{DOM}\,\tau$ ее задания, в котором ее значения суть конечные вещественные числа: $\operatorname{dom}\tau=\{X\mid\tau(X)\in\mathbb{R}\}$.

ВК$_6$. Всегда $\tau(X)=0 \iff X\in\partial O^+$.

ВК$_7$. Функция τ на домене непрерывна.

BK_8. Функция τ положительно-однородна степени 1, т.е. при $\lambda > 0$ выполняется $\tau(\lambda X) = \lambda\tau(X)$.

BK_9. Функция τ супераддитивна, т.е. $\tau(X+Y) \geq \tau(X)+\tau(Y)$.

В силу BK_8 можно безразлично говорить о супераддитивности или о вогнутости функции. Если при этом вогнутость строгая, т.е. из $\tau(X+Y) = \tau(X)+\tau(Y)$ следует коллинеарность X и Y ($\exists_\mu \; Y = \mu X$), то говорим о строго вогнутой метрике (строгой кинематике). Если выполнена следующая аксиома

BK_9^+. $\tau \in C^2$ на O^+ и ранг ее гессиана равен $n-1$,

то говорим о регулярной метрике (кинематике).

Напомним, что гессиан есть матрица (квадратичная форма), порожденная вторыми частными производными от функции, т.е. $\partial_i \partial_k \tau$. То, что из BK_9^+ (из регулярности) вытекает BK_9 (и даже строгая выпуклость), будет доказано ниже в теореме 13.

Определение 1. Структура $(E_n, <, \tau)$ с аксиомами BK_{1-9} называется метрической векторной кинематикой, а функция τ – векторной кинематической метрикой. Аффинной кинематической метрикой называем функцию $\tau: A_n \times A_n \mapsto \{-\infty\} \cup [0, \infty)$ при условии, что $\tau(p,q) = \tau(\vec{pq})$ есть векторная кинематическая метрика. Аксиома BK_9 тогда принимает вид

$$\tau(p,r) \geq \tau(p,q) + \tau(q,r) , \tag{2.1.1}$$

причем $\tau(p,p) = 0$ и

$$\tau(p,q) \geq 0 \Rightarrow (p=q \vee \tau(q,p) = -\infty) , \tag{2.1.2}$$

$$\tau(A) \geq 0 \Rightarrow (A=0 \vee \tau(-A) = -\infty) . \tag{2.1.3}$$

Теорема 1. Кинематическая метрика есть функция возрастания. На абсолютно одновременных векторах она постоянна. Она вогнута, но в нейнштейновой кинематике не строго вогнута.

В самом деле, если $A > 0$, то $\tau(A) > 0$ по BK_{5-6} (и обратно). Поэтому, с учетом BK_9, $X < Y \Rightarrow \tau(Y) = \tau(X+Y-X) > \tau(X)$. По BK_7 тогда получаем

$$X \leq Y \Rightarrow \tau(X) \leq \tau(Y) , \tag{2.1.4}$$

откуда (см. определение 8 §1):

$$X \leftrightarrow Y \Rightarrow \tau(X) = \tau(Y) . \tag{2.1.5}$$

Поэтому в неэйнштейновом случае для $A \leftrightarrow B$ достаточно взять векторы A и $2B-A$, чтобы обнаружить нарушение строгой вогнутости.

2.2. Примеры метрических кинематик. Сохраним, пополняя, обозначения примеров §1.

КИН$_{1,1}$. Галилеева метрическая кинематика есть (1.2.1) с метрикой

$$\tau(t,\bar{x}) = \begin{cases} = t, & t > 0, \\ = -\infty, & t < 0. \end{cases} \qquad (2.2.1)$$

КИН$_{2,1}$. Лоренцова метрическая кинематика есть кинематика (1.2.2) с метрикой

$$\tau(t,\bar{x}) = \begin{cases} = \sqrt{t^2 - \bar{x}^2}, & t \geq |\bar{x}|, \\ = -\infty, & t < |\bar{x}|. \end{cases} \qquad (2.2.2)$$

Допуская некоторую вольность, обозначаем ее ${}^1R_1$ и называем равносильно "специальной теорией относительности", "псевдоевклидовой геометрией сигнатуры $(+ - - -)$." Это регулярная кинематика. Но на одном и том же конусе могут быть заданы существенно разные кинематические метрики.

КИН$_{2,2}$. Сингулярно-метризованная лоренцова кинематика есть (1.2.2) с метрикой

$$\tau(t,\bar{x}) = \begin{cases} = \sqrt[\alpha]{t^\alpha - |\bar{x}|^\alpha}, & t \geq |\bar{x}|, \\ = -\infty, & t < |\bar{x}|; \ 1 \leq \alpha < \infty, \ \alpha \neq 2. \end{cases} \qquad (2.2.3)$$

Ее нерегулярность будет доказана в §3, а пока обратим внимание на ее сферу $\{(t,\bar{x}) \mid \tau(t,\bar{x}) = \tau(t_0,0)\}$ в случае $\alpha = 1$. Она совпадает со световым конусом $\partial(t_0,0)^+$, что, конечно, свидетельствует о вырождении. В §3 будет доказано, что при $1 < \alpha < 2$ она дает пример кинематической метрики, не имеющей второго дифференциала, а при $\alpha > 2$ – пример строго вогнутой метрики класса C^2 с вырожденным гессианом.

КИН$_{2,3}$. Усеченная лоренцова кинематика есть (1.2.2) с метрикой

$$\tau(t,\bar{x}) = \begin{cases} = \sqrt{t^2 - \bar{x}^2}, & |\bar{x}| \leq \alpha t, \\ = t\sqrt{1 - \alpha^2}, & |\bar{x}| \leq t \leq \alpha^{-1}|\bar{x}|, \\ = -\infty, & t < |\bar{x}|; \ 0 < \alpha < 1. \end{cases} \qquad (2.2.4)$$

Это эйнштейнова кинематика с нестрого вогнутой метрикой. Очевидно, что сечение сферы $t^2 - \bar{x}^2 = 1$ можно проводить не обязательно плоскостью $t = const$, а любой, разделяющей 0^+ и 0^-.

КИН$_{2,4}$. Орициклическая кинематика есть (1.2.2) с метрикой

$$\tau(t,\bar{x}) = \begin{cases} = (t-\bar{\ell}\bar{x})^{\alpha}(t^2-\bar{x}^2)^{\frac{1-\alpha}{2}} & , \\ = -\infty & ; \quad -1<\alpha<1 , \end{cases} \tag{2.2.5}$$

где $\bar{\ell} \in E_{n-1}$ – произвольный вектор единичной длины. Название объясняется так: группа автоморфизмов в пространстве лучей для (2.2.2) есть группа автоморфизмов $(n-1)$-мерного пространства Лобачевского. Для метрики же (2.2.5) дополнительно неподвижен луч $\lambda(1,\bar{\ell}) \in \partial O^{+}$, так что группа автоморфизмов сохраняет пучок параллелей с этой идеальной точкой, а потому и семейство поверхностей, ортогональных прямым этого пучка; они же называются орициклами (орисферами). См. также §5. Вогнутость τ устанавливается ссылкой на неравенство Гёльдора

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leqslant \left(a_1^{\frac{1}{\alpha}} + a_2^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} \left(b_1^{\frac{1}{1-\alpha}} + b_2^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha} \tag{2.2.6}$$

с подстановкой $a_i = (t_i - \bar{\ell}\bar{x}_i)^{\alpha}$, $b_i = (t_i^2 - \bar{x}_i^2)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ и использованием линейности первой и вогнутости второй функции. Ср. также теорему 4 ниже. Метрика регулярна, что видно из (3.7.5).

КИН$_{3,1}$. Канонически-метризованная квазилоренцова кинематика – это (1.2.3) с метрикой

$$\tau(t,\bar{x}) = \begin{cases} = \sqrt{t^2 - \|\bar{x}\|^2} , & t \geqslant \|\bar{x}\| , \\ = -\infty , & t < \|\bar{x}\| . \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Два ее частных случая будут нам полезны (берем $n=3$):

КИН$_{3,1,1}$. Метрика на домене задается формулой

$$\tau(t,x,y) = \sqrt{t^2 - (\max\{|x|,|y|\})^2} \tag{2.2.8}$$

КИН$_{3,1,2}$. Метрика на домене задается формулой

$$\tau(t,x,y) = \sqrt{t^2 - (|x|+|y|)^2} \tag{2.2.9}$$

В первой из них τ дифференцируема всюду, кроме точек (t,x,x), причем ее гессиан имеет ранг $n-2$, так что ВК$_9$ выполнена, а ВК$_9^+$ нет.

КИН$_{3,2}$. Сингулярно-метризованная квазилоренцова кинематика есть (1.2.3) с метрикой

$$\tau(t,\bar{x}) = \begin{cases} = \sqrt[\alpha]{t^{\alpha} - \|\bar{x}\|^{\alpha}} , \\ = -\infty ; \quad 1 \leqslant \alpha < \infty , \ \alpha \neq 2 . \end{cases} \tag{2.2.10}$$

Вогнутость τ устанавливается ссылкой на неравенство Минковского

$$\left((a_1+a_2)^\alpha+(b_1+b_2)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left(a_1^\alpha+b_1^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}+\left(a_2^\alpha+b_2^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (2.2.11)$$

с подстановкой $a_i^\alpha = t_i^\alpha - \|\bar x_i\|^\alpha$, $b_i = \|\bar x_i\|$ и использованием выпуклости (субаддитивности) нормы $\|\bar x\|$. При этом верна теорема

Теорема 2. Эта метрика строго вогнута только при $\alpha > 1$, а при этом условии – тогда и только тогда, когда норма $\|\bar x\|$ строго выпукла, т.е. конус O^+ не имеет m-мерных плоских граней при $m \geq 2$.

Доказательство. При $\alpha = 1$ метрика (2.2.10) оказывается линейной функцией. Если же $\alpha > 1$, то, как известно, равенство в (2.2.11) достигается тогда и только тогда, когда $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Если норма не строго выпукла, то найдутся $\bar x_1 \neq \mu \bar x_2$ при $\|\bar x_1+\bar x_2\| = \|\bar x_1\|+\|\bar x_2\|$, а взяв $t_1\|\bar x_2\| = t_2\|\bar x_1\|$, получим $\tau((t_1,\bar x_1)+(t_2,\bar x_2)) = \tau(t_1,\bar x_1)+\tau(t_2,\bar x_2)$. Аналогично проверяется обратное.

КИН$_{4,1}$. Двумерная кинематика с различными скоростями света есть (1.2.4) с метрикой

$$\tau(t,x) = \begin{cases} = \sqrt{(t-\alpha x)(t+\beta x)}, \\ = -\infty \end{cases} \qquad (2.2.12)$$

Заметим, что аффинным преобразованием координат

$$\begin{cases} t' = t + \frac{\beta-\alpha}{2}\,x \\ x' = \frac{\beta+\alpha}{2}\,x \end{cases} \qquad (2.2.13)$$

можно КИН$_{4,1}$ превратить в КИН$_{2,1}$, тогда как КИН$_{3,1}$ при $n > 2$ нельзя превратить аффинно в КИН$_{2,1}$. Здесь специфика двумерного случая. Подробнее см. §5.

КИН$_{5,1}$. Метризованная симплициальная кинематика есть (1.2.5) с метрикой

$$\tau(\xi^1,\dots,\xi^n) = \begin{cases} = \sqrt[n]{\xi^1\cdot\ldots\cdot\xi^n}, & \forall_k\ \xi^k \geq 0, \\ = -\infty, & \exists k\ \xi^k < 0 \end{cases} \qquad (2.2.14)$$

в координатах (1.2.6). Она доставляет (см. §3) пример регулярной кинематической метрики, хотя ее положительный конус не строго выпукл: он имеет n плоских $(n-1)$-мерных граней $\xi^k = 0$. Точно так же, хотя конус очевидно не гладкий, $\tau \in C^\infty$. Очевидна [3] связь этой метрики с объемом координатного параллелепипеда вектора (ξ^i) и с неравенством Брунна-Минковского.

КИН$_8$. Гибрид орициклической и симплициальной кинематик задаем в 4-мерном пространстве формулами:

$$(t,x,y,z)>0 \iff t > \max\{\sqrt{x^2+y^2},\, z\}\ ; \qquad (2.2.15)$$

$$\tau(t,x,y,z) = \begin{cases} = (t-\alpha x-\beta y)^{\alpha\beta}(t^2-x^2-y^2)^{\frac{(1-\alpha)\beta}{2}}(t-z)^{1-\beta}, \\ = -\infty \end{cases} \qquad (2.2.16)$$

при $-1<\alpha<1$, $0<\beta<1$ и $\alpha^2+\beta^2=1$. То, что это кинематика, вытекает из теоремы 4.

Все предложенные здесь примеры, кроме КИН$_{1,1}$, суть эйнштейновы векторные кинематики. Из-за требования положительной однородности невозможно ввести такую метрику на трансляционной кинематике КИН$_0$. Трансляционная кинематика допускает, как и всякая топологическая, метризацию посредством кинематической метрики (уже не положительно-однородной, но с сохранением (2.1.1)), однако она не всегда будет даже трансляционно-инвариантна.

2.3. Интерпретация. Дополнительно возникают интерпретации: $\tau(p,q)$ понимается как собственное время (иногда говорят "интервал") между событиями p и q независимо от каких бы то ни было инерциальных или ускоренных наблюдателей, систем отсчета или координат. Аксиома ВК$_8$ обеспечивает пропорциональность собственного времени разности координат, а ВК$_9$, т.е. неравенство антитреугольника (2.1.1), обеспечивает выполнение "парадокса близнецов". В векторно-энергетической интерпретации всякому допустимому импульсу $X\in O^+$ сопоставляется некоторая энергия $-\tau(X)$. При этом обычно температура вектора X называется массой (энергией покоя). Например, в КИН$_{2,1}$ $-\tau(X) = L(m,\vec{v}) = \sqrt{m^2-(m\vec{v})^2}$, и говорят о лагранжиане.

2.4. Другая аксиоматика. Можно предложить более близкую идейно к теории относительности и более короткую аксиоматику. В теории относительности начинают не с отношения следования $p<q$, а сразу с метрики (0.2.4). Ее задают через квадратичную форму, но только от последнего мы откажемся. Итак, рассмотрим E_n и аксиомы:

МВК$_1$. $\tau: E_n \longmapsto \{-\infty\}\cup[0,\infty)$, причем $\tau(A+B) \geqslant \tau(A) + \tau(B)$.

МВК$_2$. Множество $\{X \mid \tau(X)>0\}$ открыто и не пусто.

МВК$_3$. $dom\,\tau = \overline{\{X;\ \tau(X) > 0\}}$.

МВК$_4$. Функция τ на домене непрерывна.

МВК$_5$. Функция τ положительно-однородна степени 1.

Теорема 3. Если (E_n, τ) удовлетворяет МВК$_{1-5}$, то $(E_n, <, \tau)$, где положено $X < Y \Leftrightarrow \tau(Y-X) > 0$, удовлетворяет ВК$_{1-9}$.

Доказательство. В силу МВК$_1$ отношение $X < Y$ оказывается транзитивным, т.е. отношением предпорядка. Обозначим $0^+ = \{X \mid \tau(X) > 0\}$. В силу МВК$_1$ и МВК$_5$ 0^+ выпукло, $0 \notin 0^+$, но $0 \in \overline{0^+}$ и в силу МВК$_2$ и МВК$_3$ тогда $\tau(0) = 0$. Если бы $\tau(A) > 0$ и $\tau(-A) > 0$, то по МВК$_5$ $\tau(0) > 0$, значит $\tau(A) > 0 \Rightarrow \tau(-A) = -\infty$ и $<$ есть отношение строгого порядка. Согласно следствию теоремы 2 §1 выполнены ВК$_{1-4}$. Если $\tau(X) = 0$, то по МВК$_3$ $X \in \partial 0^+$. Обратно, если $X \in \partial 0^+$, то по МВК$_4$ $\tau(X) \geq 0$, а так как 0^+ открыто по МВК$_2$, то $\tau(X) = 0$, чем доказана ВК$_6$. Аксиомы же ВК$_5$, ВК$_{7-9}$ явно содержатся в МВК$_{1-4}$.

Подчеркнем, что аксиома МВК$_3$ независима от других. Например, рассмотрим функцию

$$\varphi(t, \bar{x}) = \begin{cases} = \sqrt{t^2 - |\bar{x}|^2}, & t \geq 2|\bar{x}|, \\ = 0, & |\bar{x}| \leq t < 2|\bar{x}|, \\ = -\infty, & t < |\bar{x}|. \end{cases} \qquad (2.4.1)$$

Она очевидно удовлетворяет всем аксиомам, кроме МВК$_3$. Третий вариант аксиоматики дан в §3.

2.5. Операции над метрическими векторными кинематиками. Аналогично определению 6 §1 вводим определение 2.

Определение 2. Взвешенным (или сплетенным) произведением (или прямой суммой) метрических векторных кинематик $(E_1, <_1, \tau_1)$ и $(E_2, <_1, \tau_2$ с показателем α $(0 < \alpha < 1)$ называем структуру $(E_1 \oplus E_2, <_1 \times <_2, \beta\tau_1^\alpha \times \tau_2^{1-\alpha})$ при $\beta > 0$.

Теорема 4. Взвешенное произведение эйнштейновых метрических кинематик является эйнштейновой метрической векторной кинематикой.

Доказательство, с учетом теоремы 6 §1, сводится к простому перебору аксиом с использованием неравенства Гёльдера (2.2.6) при подстановке $a_i = \tau_1^\alpha(X_i)$, $b_i = \tau_2^{1-\alpha}(Y_i)$ с последующим использованием супераддитивности функций τ_1 и τ_2.

Теорема 5. Если τ_n суть векторные кинематические метрики над $(E_n, <)$, то $\sum\limits_n \lambda_n \tau_n$ $(\lambda_n > 0)$ и $\min \tau_n$ суть также метрики над нею же.

Доказательство тривиально.

Однако $\inf \tau_\kappa$ может не быть кинематической метрикой, ибо нарушится $ВК_6$, как, например, в случае $\frac{1}{\kappa}\sqrt{t^2 - \bar{x}^2}$, $\kappa \to \infty$. Поэтому не все операции над выпуклыми функциями, сохраняющие выпуклость, переносятся на кинематические метрики; нужно следить за соблюдением $ВК_6$ (т.е. $МВК_3$).

Благодаря теореме 4 можно метрику симплициальной кинематики обобщить в виде $КИН_{5,2}$:

$$\tau(\xi^1,\dots,\xi^n) = \begin{cases} = \prod\limits_{\kappa=1}^{n} (\xi^\kappa)^{\alpha_\kappa}, & \alpha_\kappa > 0 \;\&\; \sum\limits_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa = 1, \\ = -\infty, & \exists \kappa \;\; \xi^\kappa < 0 \end{cases} \qquad (2.5.1)$$

2.6. Дифференцируемость кинематической метрики. Для изучения вопросов, связанных с дифференцируемостью τ, удобнее всего применить к $-\tau$ теорию, развитую для выпуклых функций [49]. Возможность такого применения оправдывается следующей теоремой:

Теорема 6. Функция $-\tau$, где τ – векторная кинематическая метрика, есть собственная замкнутая выпуклая функция на E_n.

Доказательство. Согласно теореме 1 τ – вогнутая. Осталось проверить, что $-\tau$ собственная замкнутая, что по §7 из [49] равносильно полунепрерывности сверху функции τ. В самом деле, по $ВК_5$ $\{X \mid \tau(X) = -\infty\} = E_n \setminus \overline{O^+}$, причем на границе этого множества $\tau = 0$ по $ВК_6$. Поэтому для

$X_\kappa \in \overline{E_n \setminus O^+}$ выполняется

$$\lim \tau(X_\kappa) \leq \tau(\lim X_\kappa), \qquad (2.6.1)$$

а так как для $X_\kappa \in O^+$ функция τ непрерывна по $ВК_7$, то (2.6.1) выполняется на всем E_n.

Определение 3. Ковектор $\underline{B} \in E_n^*$ называется субградиентом вогнутой функции $f: E_n \mapsto \mathbb{R}$ в точке $\bar{A} \in E_n$, если

$$\forall \bar{X} \in E_n \quad f(\bar{X}) \leq f(\bar{A}) + (\bar{X} - \bar{A})\underline{B}, \qquad (2.6.2)$$

где $\bar{X}\underline{\xi} = t u + \bar{x}\underline{\bar{z}} = x^\kappa z_\kappa$ – произведение-свертка вектора и ковектора. Множество $\partial f(\bar{A})$ субградиентов называется субдифференциалом функции f в $\bar{A}$. Если оно пусто, то f называется не субдифференцируемой. Если оно состоит из единственного ковектора, то f называется дифференцируемой, а сам ковектор – ее градиентом и обозначается ∇f. Если $\partial f(\bar{A})$ состоит более чем из одного ковектора, то f называется субдифференцируемой, но не дифференцируемой.

С субградиентом тесно связано дифференцирование по направлению.

Определение 4. Производной по направлению $\bar{X}$ в точке $\bar{A}$ функции f называется предел $\lim \lambda^{-1}(f(\bar{A}+\lambda\bar{X})-f(\bar{A}))$ при $\lambda\to 0$, обозначаемый $\bar{X}f(\bar{A})$ или $f'(\bar{X},A)$, или $f'_{\bar{X}}(\bar{A})$ $\lambda>0$.

Теорема 7. Если f вогнутая, то $\bar{X}f(\bar{A})$ всегда существует, конечна при $\bar{A}>0$, вогнута и положительно-однородна степени 1 по $\bar{X}$, и для $\bar{A}>0$ всегда имеет место

$$\underline{B}\in\partial f(\bar{A}) \Leftrightarrow \forall\bar{X}\in E_n \quad \bar{X}f(\bar{A})\leqslant\bar{X}\underline{B}, \tag{2.6.3}$$

что для дифференцируемой функции принимает вид

$$\bar{X}f(\bar{A}) = \bar{X}\nabla f(\bar{A}) = X^k\partial_k f(\bar{A}). \tag{2.6.4}$$

Доказательство следует из теорем 23.1–2 из [49].

Теорема 8. В эйнштейновой векторной кинематике кинематическая метрика τ субдифференцируема на $0\cup O^+$, не субдифференцируема на $E_n\setminus 0\cup O^+$; не дифференцируема в O. Если она дифференцируема в $\bar{A}>0$, то она дифференцируема на всем луче $\lambda\bar{A}$ при $\lambda>0$. Множество лучей, на которых τ не является непрерывно дифференцируемой, имеет меру (лебегову в пространстве лучей) нуль, и во всех точках существования градиента отображение $\bar{X}\to\nabla\tau(\bar{X})$ непрерывно. При этом

$$\bar{X}\tau(0) = \tau(\bar{X}), \quad \lim_{\lambda\to 0}\bar{X}\tau(\bar{A}) = \tau(\bar{X}). \tag{2.6.5}$$

Доказательство. Применяя теорему 23.4 из [49] к $-\tau$, получаем, что τ субдифференцируема на $\operatorname{int}\operatorname{dom}\tau = O^+$ и не субдифференцируема на $E_n\setminus\operatorname{dom}\tau = E_n\setminus\overline{O^+}$. Пусть $\bar{A}\in\partial O\setminus 0$. Тогда при существовании субградиента $\underline{B}$ неравенство (2.6.2) принимало бы вид

$$\forall\bar{X} \quad \tau(\bar{X})\leqslant(\bar{X}-\bar{A})\underline{B} \tag{2.6.6}$$

в силу BK_0. Отсюда $\forall\lambda>0\ \forall\bar{X}\geqslant 0\ (\lambda\bar{X}-\bar{A})\underline{B}\geqslant 0$. Но при $\lambda\gg 1$ это означает $\forall\bar{X}\geqslant 0\ \ \bar{X}\underline{B}\geqslant 0$, в частности $\bar{A}\underline{B}\geqslant 0$, а при $\lambda\ll 1$ должно было бы быть $-\bar{A}\underline{B}\geqslant 0$, откуда следует $\bar{A}\underline{B}=0$. Теперь (2.6.6) принимает вид

$$\forall\bar{X} \quad \tau(\bar{X})\leqslant\bar{X}\underline{B} \tag{2.6.7}$$

Возьмем последовательность $\bar{X}_k$ при $\tau(\bar{X}_k)=\mathrm{const}$ и $\lambda\bar{X}_k\to\lambda\bar{A}$. Начиная с некоторого k, будет $\bar{X}_k\underline{B}<\varepsilon$ при произвольном $\varepsilon>0$, в то же время $\tau(\bar{X}_k)=\mathrm{const}>\varepsilon$, так что (2.6.7) нарушаствия. Следовательно, $\bar{B}$ не существует. Дифференцируемость почти всюду следует из теоремы 23.5 из [49]. Возьмем теперь произвольно луч $\lambda\bar{A}$, на котором τ дифференцируема. Из определения 3 видно, что $\bar{X}\tau(\lambda\bar{A}) = \bar{X}\tau(\bar{A})$ и потому существует $\lim \nabla\tau(\lambda_n\bar{A})$, который обозначим $\underline{A}^*$; он равен $\nabla\tau(\bar{A})$. Так как по (2.6.2) $\forall\bar{X}$ $\tau(\bar{X}) \le \tau(\lambda_n\bar{A}) + (\bar{X} - \lambda_n\bar{X})\underline{A}^*$, то по полунепрерывности $\forall\bar{X}$ $\tau(\bar{X}) \le \bar{X}\underline{A}^*$, т.е. $\underline{A}^*$ оказывается субградиентом в O и, следовательно, τ субдифференцируема в O. Если бы на всех лучах существования градиент был постоянен, то $\tau = const$ и сфера $\{\bar{X} | \tau(\bar{X}) = \tau(\bar{X}_0)\}$ совпадала бы с гиперплоскостью $(\bar{X} - \bar{X}_0)\underline{A}^* = 0$. Но это невозможно, ибо такая плоскость пересекает ∂O^+ (теорема 2 §1) в каком-то $\bar{V}$. Взяв на ней $\bar{V}_k \to \bar{V}$, по полунепрерывности имели бы $0 < \tau(\bar{X}_0) = \tau(\bar{V}_k) = \lim\tau(\bar{V}_k) \le \tau(\bar{V}) = 0$, ибо $\bar{V} \in \partial O^+$. Значит, существуют лучи $\lambda\bar{X}$ и $\lambda\bar{Y}$ с разными градиентами, и $\partial\tau(O)$ содержит хотя бы два разных субградиента, так что τ не дифференцируема в O. Формулы (2.6.5) получаются так: $\bar{X}\tau(0) = \lim\lambda^{-1}(\tau(0+\lambda\bar{X}) - \tau(0)) = \lim \tau(\bar{X})$, а по вогнутости $\tau(\bar{A}+\lambda\bar{X}) - \tau(\bar{A}) \ge \lambda\tau(\bar{X})$, откуда следует $\lim \bar{X}\tau(\bar{A}) \ge \tau(\bar{X})$. Прочие утверждения содержатся в теореме 25.3 [49], где детальнее описано множество точек недифференцируемости.

2.7. Некоторые свойства гессиана метрики.

Теорема 9. В точке $A > 0$, где существуют вторые частные производные $\partial_i\partial_k\tau$, гессиан задает неположительно определенную квадратичную форму

$$\forall Y \in E_n \qquad Y^i Y^k \partial_i\partial_k \tau(A) \le 0 \qquad (2.7.1)$$

ранга не выше $n-1$.

Доказательство. Согласно теореме 4.5 [49] гессиан выпуклой функции задает неотрицательно-определенную квадратичную форму, чем доказано первое утверждение. Из ВК$_8$ вытекает, что $\partial_i\tau$ – положительно-однородна степени ноль, а потому по формуле Эйлера

$$A^k \partial_k\partial_i \tau(A) = 0 \ , \qquad (2.7.2)$$

откуда следует, что $\det \partial_i\partial_k\tau = 0$, т.е. $\mathrm{rank}\ \partial_i\partial_k\tau < n$.

Известно, что второй дифференциал и потому гессиан выпуклой функции существует почти всюду, но мы не будем формулировать соответствующих теорем для кинематической метрики, а ограничимся здесь извлечением следствий из (2.7.1–2).

Теорема 10. Если $\mathrm{rank}\ \partial_i\partial_k\tau < n-1$ (т.е. все миноры $(n-1)$-порядка в $(\partial_i\partial_k\tau(A))$ равны нулю), то τ не строго вог-

В самом деле, тогда существует $B \in E_n$, дополнительный к A, для которого $B^n \partial_n \partial_i \tau(A) = 0$. Следовательно, (2.7.2) имеет место на двумерном пространстве $A \oplus B$. Следовательно, τ на $A \oplus B$ и выпукла ($\geqslant 0$) и вогнута ($\leqslant 0$), т.е. линейна. Следовательно, она не строго вогнута.

Теорема 11. Если f положительно-однородна, то для того, чтобы квадратичная форма с коэффициентами $\partial_i \partial_k f^2(A)$ была невырождена, необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма с коэффициентами $\partial_i \partial_k f(A)$ имела ранг $n-1$.

Доказательство. Сначала запишем явно

$$\ell_{ik} = \partial_i f(A)\, \partial_k f(A) + \alpha_{ik} f(A), \qquad (2.7.3)$$

где обозначено $\alpha_{ik} = \partial_i \partial_k f(A)$, $\ell_{ik} = \frac{1}{2} \partial_i \partial_k f^2(A)$. Соответствующие квадратичные формы связаны соотношением

$$X^i X^k \ell_{ik} = X^i \partial_i f(A)\, X^k \partial_k f(A) + X^i X^k \alpha_{ik} f(A). \qquad (2.7.4)$$

Первое слагаемое справа есть квадратичная форма ранга единица, невырождающаяся только на направлении λA в силу формулы Эйлера

$$f(A) = A^k \partial_k f(A). \qquad (2.7.5)$$

Второе слагаемое есть квадратичная форма ранга не выше $n-1$, вырождающаяся на направлении λA в силу (2.7.2) и, таким образом, не вырождающаяся, может быть, только на пространстве, дополнительном к λA. Отсюда следует, что левая часть вырождается тогда и только тогда, когда второе слагаемое вырождается более, чем на одной прямой, ч.т.д.

Теорема 12. Пусть в эйнштейновой векторной кинематике функция f задана на $\overline{O^+}$, положительно-однородна степени 1, $f(X) \in C^2$, $f(X) > 0$ и $\operatorname{rang} \partial_i \partial_k f(X) = n-1$ при $X \in O^+$, а $f(X) = 0$ при $X \in \partial O^+$. Тогда f вогнута.

Доказательство. Идея его проста и укладывается в три фразы. Так как $\operatorname{rang} \alpha_{ik} = n-1$, то на пространстве, дополнительном к A, форма $X^i X^k \alpha_{ik}$ не вырождается (пользуемся обозначениями (2.7.3)). Если бы на некотором $B > 0$ выполнялось $X^i X^k \alpha_{ik} > 0$, то ограничение f на $A \oplus B$ было бы выпуклой функцией по упоминавшейся теореме 4.5 из книги [49]. Так как кинематика эйнштейнова, то в сечении $A \oplus B \cap \partial O^+$ имелись бы векторы C_1 и C_2 при $C_1 + C_2 > 0$; при этом $f(C_1) = f(C_2) = 0$ и $f(C_1 + C_2) > 0$ по условию, что противоречило бы выпуклости.

$f(c_1+c_2) \leq f(c_1) + f(c_2)$. Однако вторая фраза нуждается в более пристальном доказательстве, ибо определитель, построенный по функции-ограничению, априори мог бы вести себя иначе, нежели построенный по исходной функции. Итак, допустим (Допущение I), будто в пространстве, дополнительном к A, найдется направление $B > 0$, на котором $b_{ik} B^i B^k = f\, a_{ik} B^i B^k \geq 0$ (ср. 2.7.3-5). Тогда $b_{ik}(A) X^i X^k \geq 0$ на $A \oplus B$, причем $\det b_{ik}(A) \neq 0$. Пока определитель не обращается в ноль, квадратичная форма не меняет знака. Если бы существовал (Допущение $\underline{\text{II}}$) такой $V \in O^+ \cap A \oplus B$, что для него $b_{ik}(V) X^i X^k < 0$ при каком-то X, то эта квадратичная форма обязана была бы где-то в промежутке выродиться, т.е. при каком-то $W \in O^+ \cap A \oplus B$ двумерный ее определитель обращался бы в ноль. Но согласно (2.7.4-5) на $O^+ \cap A \oplus B$ форма $a_{ik}(W) X^i X^k = 0$ тождественно в этом случае. В частности, $w^i w^k \partial_i \partial_k f(W) = 0$, а это вырождение не зависит от того, берем ли мы ограничение f на $A \oplus B$ или f на всем E_n, ибо оно всегда получается ограничением f на λW. Следовательно, в любом *ортонормальном* представлении, начинающемся с W, один элемент на диагонали будет нулевой, что противоречит доказанной выше теореме 11, согласно которой $b_{ik} X^i X^k$ не вырождена. Значит, Допущение $\underline{\text{II}}$ неверно, и при $Y \in O^+ \cap A \oplus B$ всюду $b_{ik}(Y) X^i X^k \geq 0$, откуда $a_{ik}(Y) X^i X^k \geq 0$ и ограничение f на $A \oplus B$ выпукло. Теорема доказана.

Заметим теперь, что в неэйнштейновом случае формула (2.1.5) совместно с (2.7.5) при $f = \tau$ обеспечивает вырождение $a_{ik} X^i X^k$ на *подпространстве абсолютно-одновременных векторов*, а потому $\operatorname{rank} \partial_{ik} \tau < n-1$. Получаем теорему.

Т е о р е м а **13.** Из аксиом $ВК_{1-6,8}$ и $ВК_9^+$ вытекает аксиома $ВК_U$, причем τ в этом случае строго вогнута.

§3. СОПРЯЖЕННАЯ КИНЕМАТИКА И СОПРЯГАЮЩЕЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

3.1. С о п р я ж е н н а я в е к т о р н а я к и н е м а т и к а. Кинематика $\langle E_n, <, \tau \rangle$ была введена на векторном пространстве E_n. Всякому E_n можно изоморфно сопоставить сопряженное векторное пространство E_n^* ("дуальное", "пространство линейных форм", "пространство гиперплоскостей") с известной операцией свертки $E_n \times E_n^* \to \mathbb{R}$. Спрашивается, можно ли естественным обраном перенести из E_n на E_n^* отношение порядка $<$ и кинематическую метрику τ ? Мы увидим, что с переносом порядка затруднений не возникает, а перенос метрики связан с определенными трудностями.

Определение 1. Называем ковектор $\underline{A} \in E_n^*$ положительным, если $\forall \bar{X} \in \overline{O^+} \setminus 0$ $\bar{X}\underline{A} > 0$; пишем $\underline{0} <^* \underline{A}$, а когда путаница исключена, короче $0 <^* A$ или даже $0 < A$.

Ковектор $(B_i) = \underline{B} \in E_n^*$ однозначно связан с линейной функцией $B_i x^i$ на E_n; положительный ковектор – со строго возрастающей на упорядоченном $(E_n, <)$. Сами же линейные функции точно характеризуются положением их градиентов или поверхностей уровня – гиперплоскостей. Положительные ковекторы отвечают тем гиперплоскостям, полупространства которых содержат в себе $\overline{O^+}$.

Теорема 1. Если $(E_n, <)$ – эйнштейнова векторная кинематика, то $(E_n^*, <^*)$ также эйнштейнова векторная кинематика.

Доказательство. Тривиально проверяется, что отношение $A <^* B \Leftrightarrow A - B <^* 0$ есть отношение порядка, что оно согласовано со сложением и умножением. Допустим, что $O^{*+} = \{\underline{Z} \mid \underline{Z} > 0\}$ не открыто. Тогда для некоторого $\underline{Z} \in O^{*+}$ сколь угодно близко к нему найдется $\underline{Z}_k$, для которого имеется $\bar{X}_k \in \overline{O^+}$ при $\bar{X}_k \underline{Z}_k \le 0$. Так как множество лучей из $\overline{O^+}$ компактно (теорема 2 §1), то можно выбрать сходящуюся не к нулю последовательность $\bar{X}_k \to \bar{X} \in \overline{O^+} \setminus 0$, откуда получаем $\bar{X}\underline{Z} \le 0$, что противоречит $\bar{X}\underline{Z} > 0$. Итак, O^{*+} открыто. По теореме 2 §1 существует гиперплоскость β, разделяющая $\overline{O^+} \setminus 0$ и $\overline{O^-} \setminus 0$. Она, как любая гиперплоскость, задается (с точностью до множителя) некоторым ковектором $\underline{B}$, таким, что $\beta = \{\bar{X} \mid \underline{B}\bar{X} = 0\}$ и по разделению $\underline{B}(\overline{O^+} \setminus 0)$ и $\underline{B}(\overline{O^-} \setminus 0)$ разных знаков. Следовательно, $O^{*+} \ne \emptyset$, чем завершается проверка аксиом ВК$_{1-4}$. Эйнштейновость мы установим в виде "0" теоремы 2 §1. Сначала отметим, что если через вектор $\bar{B} > 0$ проходит гиперплоскость β, то она не может быть пределом никакой последовательности опорных к $\overline{O^+}$ плоскостей. В самом деле, так как O^+ открыто, то всякая достаточно близкая к β гиперплоскость проходит через некоторый $\bar{B}' > 0$, достаточно близкий к $\bar{B}$, а потому не может быть опорной к O^+ (по обе стороны от нее лежат $\bar{X} \in O^+$). Теперь при произвольном фиксированном $\bar{B} > 0$ рассмотрим гиперплоскость $\beta = \{\underline{X} \mid \bar{B}\underline{X} = 0\}$. Очевидно, что $\{\underline{Y} \mid \forall \bar{A} \in \overline{O^+}\ \bar{A}\underline{Y} > 0\} \subset \{\underline{Y} \mid \bar{B}\underline{Y} > 0\}$, а так как β не может быть пределом последовательности плоскостей из

$\{\underline{Y} \mid \forall \bar{A} \in O^+ \ \bar{A}\underline{Y} \leq 0\}$, то $\overline{\{\underline{Y} \mid \forall \bar{A} \in \overline{O^+} \ \bar{A}\underline{Y} > 0\}} \setminus 0 \subset \{\underline{Y} \mid \bar{B}\underline{Y} > 0\}$. Аналогично установим $\overline{\{\underline{Y} \mid \forall \bar{A} \in O^+ \ \bar{A}\underline{Y} < 0\}} \setminus 0 \subset \{\underline{Y} \mid \bar{B}\underline{Y} < 0\}$. Следовательно, существует гиперплоскость, разделяющая $\overline{\{\underline{Y} \mid \underline{Y} > 0\}} \setminus 0$ и $\overline{\{\underline{Y} \mid \underline{Y} < 0\}} \setminus 0$, чем завершается доказательство.

Теорема 2. Пусть $<$, $<^*$, $\|\bar{x}\|$ и $\|\underline{\xi}\|^*$ суть порядки в E_n, E_n^* и нормы в $E_{n-1} \subset E_n$ и $E_{n-1}^* \subset E_n^*$, связанные соотношением (1.2.3). Тогда они связаны соотношением определения 1 выше тогда и только тогда, когда

$$\|\underline{\xi}\|^* = \sup\left\{ \frac{-\bar{x}\underline{\xi}}{\|x\|} \,\middle|\, \bar{x} \in E_{n-1} \setminus 0 \right\}. \qquad (3.1.1)$$

Заметим, что при сформулированных условиях $(E_n, <)$ оказывается эйнштейновой векторной кинематикой, нормы $\|.\|$ и $\|.\|^*$ невырождены и т.п. Условие (3.1.1) похоже на определение полярных калибров в выпуклом анализе, но там нет знака минус. Это связано с тем, что там полярные конусы, для которых рассматриваются калибры, определяются несколько иначе: конус, полярный к O^+, будет не O^{*+}, а $-O^{*+} = O^{*-}$. Это объясняется выбором неравенства в дефиниции в виде $X\xi < 0$, а не $X\xi > 0$ и представляет удобство в выпуклом анализе, но для теории изотонных функций и пространства-времени наше определение естественное.

Доказательство. По определению (1.3.4) $(\|\underline{\xi}\|^*, \underline{\xi}) \in \partial O^{*+}$ и поэтому из (1.2.3) следует, что ковектор $(\vartheta, \underline{\xi})$ положителен при $\vartheta = \|\underline{\xi}\|^* + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, а при $\vartheta < \|\underline{\xi}\|^*$ лежит вне конуса $\overline{O^{*+}}$. В силу компактности множества лучей $\{-\frac{x}{\|x\|}\}$ можно в (3.1.1) заменить $\sup$ на $\max$. Допустим, что найдется $\bar{x}$, для которого $\|\underline{\xi}\|^* \|\bar{x}\| < -\bar{x}\underline{\xi}$. Тогда имеется $\delta > 0$, для которого $\|\underline{\xi}\|^* \|\bar{x}\| + \bar{x}\underline{\xi} < -\delta$. Возьмем $t = \|\bar{x}\|$ и $\vartheta = \|\underline{\xi}\|^* + \frac{\delta}{\|\bar{x}\|}$ и получим $t\vartheta + \bar{x}\underline{\xi} = \|\bar{x}\| \|\underline{\xi}\|^* + \delta + \bar{x}\underline{\xi} < 0$, что противоречит определению 1. Следовательно, $\|\underline{\xi}\|^* \geq \max\{-\frac{x\xi}{\|x\|}\} = m$. Допустим, что найдется $\underline{\xi}$, для которого $\|\underline{\xi}\|^* > m$. Рассмотрим $(\vartheta, \underline{\xi})$ при $m < \vartheta < \|\underline{\xi}\|^*$ и $(t, \bar{x}) \in \overline{O^+}$. Тогда $tm + \bar{x}\underline{\xi} \geq 0$, откуда $t\vartheta + \bar{x}\underline{\xi} > 0$ и по определению 1 $(\vartheta, \underline{\xi}) > 0$, что противоречит вышесказанному $(\vartheta, \underline{\xi}) \notin \overline{O^{*+}}$. Обратное доказывается аналогично.

Таким образом, всякой эйнштейновой кинематике однозначно (с точностью до выбора координат) сопоставляется сопряженная, тоже эйнштейнова, кинематика. С неэйнштейновыми кинематиками не так: множество положительных ковекторов там имеет размерность $n-k$, где k — размерность ядра гомоморфизма но обобщенной одновременности. В трансляционных кинематиках само определение 1 нуждается в некоторой модификации с целью сделать его локальным.

Примером сопряженных кинематик могут служить КИН$_{3,1,1}$ и КИН$_{3,1,2}$. На этом примере наглядно видно, что верно

Следствие. Если $(E_n^*, <^*)$ сопряжена к $(E_n, <)$, а $(E_n^{**}, <^{**})$ сопряжена к $(E_n^*, <^*)$, то $(E_n^{**}, <^{**}) = (E_n, <)$.

Заметим, что у кинематик могут встречаться непривычные свойства. Например, для КИН$_2$ сопряженной будет такая же КИН$_2$ и по всякому $A = (t, x, y, z) \in \partial O^+$ однозначно найдется направление $B = (t, -x, -y, -z) \in \partial O^{*+}$, для которого $AB = 0$. В КИН$_{3,1,1}$ не так: для $A = (t, t, t)$ любой $B = (x+y, -x, -y)$ при $t, x, y > 0$ дает

$$\begin{cases} AB = t(x+y) - tx - ty = 0, \\ A \in \partial O^+, \quad B \in \partial O^{*+} \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Определение 2. Пусть $\tau = \sqrt[\alpha]{t^\alpha - \|\bar{x}\|^\alpha}$, $1 \le \alpha < \infty$. Тогда $\tilde{\tau}(\vartheta, \bar{\xi}) = \sqrt[\alpha]{\vartheta^\alpha - (\|\bar{\xi}\|^*)^\alpha}$ называется канонически-координатным продолжением τ на сопряженную кинематику.

Так, например, метрика КИН$_{3,1,2}$ есть канонически-координатное продолжение метрики КИН$_{3,1,1}$. Однако сказанное относится только к канонически- и сингулярно-метризованной квазилоренцовой кинематике. Это определение не позволяет ничего сказать о продолжении орициклической или симплициальной метрик. Мы видим также, что эквивалентным для $Z \in \overline{O^{*+}}$ условием служит такое расширение определения 1: $\forall X \in \overline{O^+}$ $XZ \ge 0$. Если $Z \notin \overline{O^{*+}} \cup \overline{O^{*-}}$, то и $-Z \notin \overline{O^{*+}} \cup \overline{O^{*-}}$. Поэтому, если $Z \notin \overline{O^{*+}} \cup \overline{O^{*-}}$, то найдется $X \in O^+$, при котором $XZ < 0$, а если бы $\forall X$ $XZ \le 0$, то $-Z \in \overline{O^{*+}} \cup \overline{O^{*-}}$, что невозможно. Этим доказана теорема 3.

Теорема 3. В эйнштейновой кинематике, если $A \notin \overline{O^+} \cup \overline{O^-}$, то найдутся $B, C \in O^{*+}$, при которых $AB < 0$ и $AC > 0$. Иначе, если в эйнштейновой аффинной кинематике точки p и q никак не связаны причинно: $p \not< q$ & $q \not< p$, то найдется линейная возрастающая функция (с положительным ковектором B), разделяющая эти точки $B(Op) < B(Oq)$, и такая же функция, иначе разделяющая их: $C(Op) > C(Oq)$.

3.2. Сопрягающее отображение. Оказывается, существует более удобное продолжение τ на E_n^*, но для введения его надо предварительно рассмотреть одно отображение из E_n в E_n^*. Само это последнее, будучи отображением $\mu: E_n \to E_n^*$, предназначено играть фундаментальную роль в финслеровой геометрии вообще геометрия начинается с того момента, когда всякой прямой сопоставлена однозначно ортогональная к ней гиперплоскость, т.е. когда фиксировано некоторое отображение рода $E_n \to E_n^*$.

Такое отображение возникает естественно, когда в векторном пространстве задана какая-нибудь скалярная функция: ее градиент ∇ в точке $X \in E_n$ и дает искомое отображение $E_n \mapsto E_n^*$. У нас есть скалярная функция – кинематическая метрика, которая, как установлено, почти всюду непрерывно дифференцируема. Однако по теореме 26.1 из [19], вообще говоря, это отображение не однозначно. Оно не однозначно даже для пороговой метрики (2.2.2), ибо легко видеть, что нарушается условие "с" названной теоремы. Но если принять за основную функцию не τ, а τ^2 (перейти к "отображению Лежандра"), то однозначность и все хорошие свойства получатся. Правда, так как τ^2 не вогнута и не выпукла, то общие теоремы выпуклого анализа тут не применимы. Указанный выбор можно обосновать ссылкой на принцип перманентности: в римановой геометрии перебрасывание индексов $x^i \to x_i$, т.е. отображение $E_n \mapsto E_n^*$, производится по закону $x_i = g_{ik} x^k$, что соответствует не $(x_i) = \nabla\sqrt{g_{jk} x^j x^k}$, а $(x_i) = \frac{1}{2}\nabla g_{jk} x^j x^k$. В специально-релятивистском случае вектору (t, x, y, z) при таком отображении отвечает ковектор $(t, -x, -y, -z)$.

Определение 3. Отображение $h : O^+ \mapsto E_n^*$ по формуле

$$\underline{\underline{Z}} = h(\bar{X}) = \underline{h}\,\bar{X} = \nabla \tfrac{1}{2}\tau^2(\bar{X}) = \tau(\bar{X})\nabla\tau(\bar{X}) \qquad (3.2.1)$$

называем сопрягающим отображением, а вектор $\bar{X}$ и ковектор $\underline{\underline{Z}}$ сопряженными. Скалярным произведением $\bar{X}\bar{Y}$ (в таком порядке!) вектора $\bar{X} \in O^+$ и вектора $\bar{Y} \in E_n$ называем

$$\bar{X}\bar{Y} = \tfrac{1}{2}\bar{Y}\nabla\tau^2(\bar{X}) = Y^i h_i(X) = \bar{Y}\,\underline{h}\,\bar{X} \qquad (3.2.2)$$

Если $\bar{X}\bar{Y} = 0$, то вектор $\bar{Y}$ называем ортогональным к $\bar{X}$ (при этом, вообще говоря, $\bar{X}$ не ортогонален $\bar{Y}$), а гиперплоскость из всех таких $\bar{Y}$ называем ортогональной к прямой $\lambda\bar{X}$ гиперплоскостью.

Подчеркнем, что h задано не на всем E_n, а лишь на O^+ и определено только в случае $\tau \in C^1$.

Теорема 4. Если $\tau \in C^1$ на O^+, то скалярное произведение есть непрерывное отображение $O^+ \times E_n \mapsto \mathbb{R}$. Оно положительно-однородно степени 1 по обоим аргументам. Оно линейно по второму аргументу, и выполняются соотношения

$$\bar X \in O^+ \Rightarrow \bar X \bar X = \tau^2(\bar X)\ , \tag{3.2.3}$$
$$\bar X, \bar Y \in O^+ \Rightarrow \bar X \bar Y \geq \tau(\bar X)\tau(\bar Y)\ . \tag{3.2.4}$$

Для того чтобы оно было линейно по первому аргументу, необходимо и достаточно, чтобы существовал тензор $g \in E_n^* \otimes E_n^*$, для которого $\tau(\bar X) = \sqrt{g \bar X \bar X}$.

Доказательство. Так как τ^2 положительно-однородна степени 2, то функции h положительно-однородна степени 1 по X, а для Y это следует из теоремы 7 §2. Линейность (аддитивность) XY по Y в силу (3.2.2) означает просто дифференцируемость τ^2, что предположено. Из (2.6.5) следует (3.2.4), а из (2.7.5) – (3.2.3). Если XY линейно по X, то линейно отображение $h: O^+ \to E_n^*$, и с открытого множества $O^+ \subset E_n$ его нетрудно однозначно продолжить до линейного $E_n \to E_n^*$, а существования последнего равносильно существованию $g \in E_n^* \otimes E_n^*$.

Нас будут интересовать обратимые отображения $h = (h_i)$ из O^+ в E_n^*. Известно, что если $h \in C^1$ (т.е. $\tau \in C^2$), то наличие обратного $h^{-1} = ((h^{-1})^i): E_n^* \to E_n$ связано с невырожденностью якобиана $\det \partial_k h_i$ отображения h. Введем обозначения.

Определение 4. Обозначаем $\tau_{ik}(X) = \partial_i \partial_k \tau$, $h_{ik}(X) = \partial_i h_k = \frac{1}{2}\partial_i \partial_k \tau^2$. Обычно аргумент не пишется, подразумеваясь. Если h^{-1} существует, то полагаем $\frac{\partial_i (h^{-1})^k}{\partial z_i}(z) = g^{ik}(z)$, а $h^{ik}(\bar Y)$ – матрица, обратная к $h_{ik}(\bar X)$.

Так как τ^2 положительно-однородна степени 2, то h и h^{-1} положительно-однородны степени 1, а h_{ik}, h^{ik} – степени ноль. Поэтому имеют место формулы вида (2.7.2), (2.7.5):

$$\tau^2(\bar X) = h_i(\bar X) X^i = h_{ik}(\bar X) X^i X^k\ , \tag{3.2.5}$$
$$\tau_{ik}(\bar X) X^k = 0\ , \qquad X^j \partial_j h_{ik}(\bar X) = 0$$

и, в частности,

$$g^{ik}(h(\bar X)) = h^{ik}(\bar X) \tag{3.2.6}$$

Прибегая к теоремам 11–12 §2, получаем:

Теорема 5. Для того чтобы сопрягающее отображение было невырожденным, необходимо и достаточно, чтобы кинематика была регулярной. При этом для каждого фиксированного $X \in O^+$ квадратичная форма якобиана $h_{ik}(X) Y^i Y^k$ имеет сигнатуру $(+ - \ldots -)$. При этом $h: O^+ \to O^{*+}$.

Осталось проверить только последнее. Из (3.2.4) и теоремы 2 очевидно, что $h: O^+ \to \bar O^{*+}$. Вообще возможно, что $h(A) \in \partial O^{*+}$

при $A \in O^{-}$. Так будет, например, в КИН$_{2,2}$ при $\alpha = 1$. Но для невырожденного h это невозможно. Допустим противное, т.е. существует вектор $A > 0$, для которого $h(A) \in \partial O^{*+}$. По определению 1 и непрерывности тогда $\exists B \in \overline{O^{+}}$ $Bh(A) = 0$. При этом в силу (3.2.4) $B \in \partial O^{+}$. Но согласно определению 3 (с учетом определения 4 §2) $Bh(A)$ есть производная по направлению B в точке A функции $\frac{1}{2}\tau^{2}$, и ее обращение в ноль означает, что касательная к $\{X \mid \tau(X) = \tau(A)\}$ в направлении $A + \lambda B$ параллельна B. Но на бесконечности касательная к той же сфере также должна быть параллельной B в силу ВК$_9$. В то же время кривая $\{X \mid \tau(X) = \tau(A)\} \cap A \oplus B$ вогнута и касательная к ней монотонна. Следовательно, всюду выше точки A касательная параллельна B, иначе говоря, $B(\tau^{2}(A + \lambda B)) = 0$, $\lambda > 0$. Но это означает, что на луче $A + \lambda B$ функция τ постоянна, откуда следует, что τ линейна на выпуклой оболочке векторов A и $A + \lambda B$, следовательно, ее гессиан имеет ранг меньший $n-1$, т.е. якобиан обращается в ноль. Итак, $h(O^{+}) \subset O^{*+}$, ч.т.д.

Теорема 6. В регулярной кинематике $h(O^{+}) = O^{*+}$ и функция $\tau^{*} = \tau \circ h^{-1}$, доопределенная, если надо, формулой $\tau^{*}(\partial O^{*+}) = 0$, является кинематической метрикой на $(E^{*}_{n}, <^{*})$.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $H: O^{*-} \to \mathbb{R}$, положив

$$H(\underline{u}) = \sup\{\underline{u}\,\bar{X} \mid \tau(\bar{X}) \geq 1\}. \tag{3.2.7}$$

Это – опорная функция к выпуклому множеству $\{\bar{X} \mid -\tau(\bar{X}) \leq -1\}$, и потому оно выпукло. Очевидно, что она положительно-однородна. Если $\underline{u}\,\bar{X} > 0$, то на $\lambda \bar{X}$ достигается сколь угодно большое значение, а потому $int\,dom\,H = \{\underline{u} \mid \underline{u} < 0\}$; заметим, что по условию $\bar{X} > 0$. Следовательно, конечные значения функции H всегда не положительны и H – вогнутая неотрицательная. В точке прикосновения $\bar{X}_0$ плоскости $\underline{u}$ к $\{\bar{X} \mid \tau(\bar{X}) = \tau(\bar{X}_0)\}$ касательная плоскость будет по (3.2.7) иметь вид $X\mathcal{U} = \tau(X_0)H(\mathcal{U})$ и в то же время по общим формулам аналитической геометрии $X^{k}\partial_k \tau(X_0) = \tau(X_0)$. Поэтому $\mathcal{U}_k = \lambda\,\partial_k \tau(X_0)$, откуда для $X = X_0$ имеем $\lambda X^{k}\partial_k \tau(X) = \tau(X)\,H(\lambda \partial_j \tau(X))$, т.е. по определению 3 и формуле Эйлера $\tau(X) = H(h(X)\,sign\,\lambda)\,sign\,\lambda$. Но $(\partial_j \tau(X)) \in O^{*+}$, а $\mathcal{U} < 0$, так что $sign\,\lambda = -1$, откуда $\tau(X) = -H(-h(X))$, а так как правая часть определена на всем O^{*-}, то h есть сюръекция на O^{*+} и $\tau^{*}(\mathcal{U}) = \tau(h^{-1}(\mathcal{U})) = -H(-\mathcal{U})$ вогнута. Однородность τ^{*} очевидна. Так как для $\mathcal{U} \in \partial O^{*-}$ выполняется $\sup\{\mathcal{U}X \mid X > 0\} = 0$, то $\tau^{*}(\mathcal{U}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{U} \in \partial O^{*+}$ и τ^{*} удовлетворяет аксиомам ВК$_{5-9}$ кинематической метрики на $(E^{*}_{n}, <^{*})$. Не-но, что она удовлетворяет также BK_9^+.

Определение 5. Метрику τ^* называем сопряженной к τ, а кинематику $(E_n^*, <^*, \tau^*)$ – метрически сопряженной к $(E_n, <, \tau)$.

Как ведет себя $h(X)$, когда $X \to \partial O^+$? Прежде всего, предела у $h(X)$ может не существовать. Например, в орициклической КИН$_{2,4}$ при $\lim X \in \partial O^+$, отличном от $(1, \ell)$, значение $h(X) \to \infty$; ср. также теорему 12. Но, если ковектор неограниченно растет, то, может быть, лучи, определяемые этими ковекторами, сходятся к какому-нибудь пределу? Ведь множество лучей компактно! Однако, хотя изо всякой последовательности $X_k \to A \in \partial O^+$ можно выделить подпоследовательность, для которой $h(X_k)$ определяют лучи, сходящиеся к некоторому лучу, лучей таких может быть несколько. Например, для последовательности $(a + 2\varepsilon_k, a + (-1)^k\varepsilon_k, a - (-1)^k\varepsilon_k) = X_k \in O^+$ в КИН$_{3,1,1}$ предел для лучей $h(X_k)$ не существует, хотя имеются такие предельные лучи: $(\lambda, \lambda, 0) \in \partial O^{*+}$ и $(\lambda, 0, \lambda) \in \partial O^{*+}$ (в КИН$_{3,1,2}$). Гарантировать можно лишь, что если $\lim X \in \partial O^+$, то предельный луч к $h(X)$ содержится в ∂O^{*+} (по (3.2.3)).

3.3. Аксиоматика посредством сопрягающего отображения. Формула (3.2.3) или равносильно (3.2.5) позволяет выразить метрику τ через компоненты сопрягающего отображения. Предложим соответствующую аксиоматику. Рассмотрим структуру $(E_n, <, h)$, где $(E_n, <)$ удовлетворяет аксиомам векторной кинематики BK_{1-4}, а $h: O^+ \to O^{*+}$, причем выполнены аксиомы CO_{1-3}:

CO_1. Отображение h сюръективно, обратимо и дифференцируемо.

CO_2. Если $\lim X \in \partial O^+$, то $Xh(X) \to 0$.

CO_3. Отображение h положительно-однородно степени 1.

Теорема 7. Система аксиом BK_{1-8}, BK_9^+ равносильна BK_{1-4}, CO_{1-3}, если положить

$$\tau^2(X) = Xh(X), \qquad X \in O^+, \tag{3.3.1}$$

на $X \in \partial O^+$ доопределить τ по непрерывности, а на $E_n \setminus \overline{O^+}$ принять $\tau = -\infty$.

Доказательство. В одну сторону теорема уже доказана. Пусть теперь выполнены CO_{1-3}. Положим (3.3.1). Тогда τ задана на E_n, положительно-однородна степени 1 и выполнены прочие условия теорем 12–13 §2. Следовательно, функция τ вогнута, аксиома BK_6 выполнена по определению (3.3.1) и определению 1,

$a(E_n, <, \tau)$ – регулярная кинематика.

Как уже отмечалось, при этом $h_{ik}(X)$ положительно-однородны степени ноль, т.е. зависят не от вектора X, а от направления λX. Частный случай, когда $h_{ik}(X)$ не зависит даже от направления, совпадает согласно теореме 4 со специальной теорией относительности, где

$$g_{ik} = h_{ik}(X), \quad \forall X \in E_n, \tag{3.3.2}$$

и где потому дополнительно выполняется аксиома

CO_4. Отображение h линейно.

В этом последнем случае g_{ik} оказывается тензором. В анизотропном случае $h_{ik}(X)$ не обеспечивает линейного отображения $E_n \mapsto E_n^*$ и потому, строго говоря, не тензор. Однако при фиксированном $X \in 0^+$ компоненты $h_{ik}(X)$ преобразуются относительно линейных (аффинных, векторных) преобразований координат как компоненты тензора. Поэтому распространена терминология, в которой $h_{ik}(X)$ называется "метрическим тензором". Правильнее говорить о "финслеровом тензоре", определение которому будет дано в §7. Пользоваться $h_{ik}(X)$ как тензором удобно, но следует помнить, что при этом, например, ортогональность $\bar{Y}\bar{Z}=0$ из бинарного отношения превращается в тернарное: $h_{ik}(\bar{X})Y^iZ^k = 0$ означает, что $\bar{Z}$ ортогонален $\bar{Y}$ относительно $\bar{X}$.

Как в §1.5, можно рассматривать вероятностное распределение компонент h_{ik} с законом вроде (1.5.7).

3.4. Интерпретация. Расширим словарь, начатый в §1.4.

$\xi: A_n \mapsto \mathbb{R}$ такая, что $p<q \Rightarrow \xi p < \xi q$.	Часы, т.е. способ сопоставления событиям p из пространства-времени дат ξp при условии, что более раннему событию сопоставляется более ранняя дата.
$\theta \in 0^{*+} \subset E_n^*$.	Линейные часы, т.е. такие часы, которые допускают над собой принятые линейные операции. Оказывается, что в галилеевом пространстве-времени совокупность всех возможных линейных часов сводится к одномерному пространству, так что единственно, чем одни часы могли бы отличаться от других, – это градуировка (масштаб). В эйнштейновом случае богатство значительнее, сами часы образуют пространство той

же размерности, что исходное пространство-время.

$p \nleq q \,\&\, q \nleq p$. Пары событий, не связанных никак причинно и не могущих повлиять одно на другое никаким допустимым воздействием (тахионы игнорируются).

Теорема 3. При датировании (отображении E_n в $\mathbb{R}$) часть каузальной информации может стереться, и события p и q, никак причинно не связанные, могут получить одну и ту же дату $fp = fq$ (относительно часов f). Оказывается, в эйнштейновом случае можно для каузально-несвязанных p и q подобрать часы h так, чтобы даты hp и hq оказались различными и по произволу одна больше другой. Иными словами, датировка причинно несоотнесенных пар событий несущественна, из $fp < fq$ отнюдь не следует $p < q$!

3.5. Пример – квазилоренцова кинематика с канонической метрикой. Изучим свойства сопрягающего отображения для КИН$_{3,1-2}$.

Определение 6. Отображение $\rho : E_{n-1} \mapsto E^*_{n-1}$ по формуле

$$\rho(\bar{x}) = \tfrac{1}{2} \nabla \| \bar{x} \|^2 = \| \bar{x} \| (\partial_\beta \| \bar{x} \|), \qquad (\beta = 2,\dots,n) \qquad (3.5.1)$$

(в предположении $\rho \in C^1$) называем сопрягающим отображением на E_{n-1}, а

$$\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\rho(\bar{x}) = \|\bar{x}\| \, y^\beta \partial_\beta \|\bar{x}\| \qquad (3.5.2)$$

– скалярным произведением векторов $\bar{x}, \bar{y} \in E_{n-1}$. Путаницы с h возникнуть не может, ибо h задано на $O^+ \subset E_n$, а ρ на $E_{n-1} \subset \subset E_n \setminus \overline{O^+}$.

Аналогично (3.2.3–4) устанавливается

$$\bar{x}\bar{x} = \|\bar{x}\|^2 , \qquad (3.5.3)$$

$$\bar{x}\bar{y} \le \|\bar{x}\| \|\bar{y}\| . \qquad (3.5.4)$$

Теорема 8. В КИН$_{3-2}$ ($\alpha \ne 2$) на луче $\langle t, \bar{0} \rangle$ (т.е. $\bar{x} = 0$) якобиан $h(t, \bar{x})$ либо не существует, либо равен нулю. В КИН$_{3,1}$ ($\alpha = 2$) якобиан $h(t, \bar{x})$ вырождается тогда и только тогда, когда вырождается якобиан $\rho(\bar{x})$.

Доказательство. Пользуясь (2.2.10) и (3.2.1), пишем

$$h_{,i}(\bar X) = \left((t^\alpha - \|\bar x\|^\alpha)^{\frac{2}{\alpha}-1} t^{\alpha-1};\ \ -(t^\alpha - \|\bar x\|^\alpha)^{\frac{2}{\alpha}-1} \|\bar x\|^{\alpha-2} \rho(\bar x)\right) \qquad (3.5.5)$$

во всех точках, где существует $\rho(\bar x)$.

Возьмем $\bar x = 0$, т.е. $\bar X = (t, \bar 0)$, и разложим $((t + \Delta t)^\alpha - \|\Delta \bar x\|^\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}$ в ряд. Слагаемые в Δx^β ($\beta = 2, \dots, n$) начинаются с $\|\Delta \bar x\|^\alpha$. Поэтому, если $\alpha > 2$, то квадратичная форма от Δx^β равна нулю, что означает обращение в нуль якобиана $\det h_{ik}$. Если же $1 < \alpha < 2$, то нецулевые слагаемые выше первой степени по Δx^β входят в разложение в степенях ниже второй, что означает, что наша функция τ в точке $(t, 0)$ не принадлежит классу C^2 и потому $h_{,i}$ не дифференцируема. При $\alpha = 1$ это видно непосредственно. Итак, для невырожденности остается только случай $\alpha = 2$, т.е. КИП$_{3,2}$. В этом случае непосредственное вычисление из (3.5.5) матрицы Якоби дает матрицу

$$h_{ik}(t, \bar x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ \dots \ 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\partial_\beta \partial_\gamma \|\bar x\|^2\right) \end{pmatrix}, \qquad (3.5.6)$$

которая вырождается тогда и только тогда, когда $\det \partial_\beta \rho_\gamma = 0$, чем завершается доказательство.

Полезно сравнить эту теорему с теоремой 2 §2. Выпишем также явное задание h_{ik} в этом случае и другие формулы.

$$\begin{aligned} h_{11} &= (t^\alpha - \|x\|^\alpha)^{\frac{2}{\alpha}-2} t^{\alpha-2} \left(t^\alpha + (1-\alpha)\|x\|^\alpha\right), \\ h_{1\beta} &= (\alpha-2)(t^\alpha - \|x\|^\alpha)^{\frac{2}{\alpha}-2} t^{\alpha-1} \|x\|^{\alpha-2} \cdot \rho_\beta(x), \\ h_{\beta\gamma} &= (t^\alpha - \|x\|^\alpha)^{\frac{2}{\alpha}-2} \|x\|^{\alpha-2}\left(\left((1-\alpha)t^\alpha + \|x\|^\alpha\right)\partial_\beta\|x\|\,\partial_\gamma\|x\| - (t^\alpha - \|x\|^\alpha)\|x\|\,\partial_\beta\partial_\gamma\|x\|\right). \end{aligned} \qquad (3.5.7)$$

Скалярное произведение векторов $(t, \bar x)$ и $(\vartheta, \bar y)$ равно

$$(t^\alpha - \|\bar x\|^\alpha)^{\frac{2}{\alpha}-1} \left(t^{\alpha-1}\vartheta - \|\bar x\|^{\alpha-2} \bar x \bar y\right), \qquad 1 \le \alpha < \infty. \qquad (3.5.8)$$

Уравнение ортогональной к лучу $(\lambda t, \lambda \bar x)$ гиперплоскости $(\vartheta, \bar y)$:

$$t^{\alpha-1}\vartheta = \|\bar x\|^{\alpha-2} \bar x \bar y. \qquad (3.5.9)$$

Компоненты обратного "метрического тензора" находятся из (3.5.6) тривиально, если найдена обратная к $(\partial_\beta \partial_\gamma \|\bar x\|^2)$ матрица, или вообще не находимы.

Теорема 9. *Для квазиперешовых кинематик аналитическое* продолжение сопрягающего отображения с O^+ на $E_n \setminus O^+$ невозможно при $\alpha \neq 2$ и возможно при $\alpha = 2$, если ρ без особенностей.

В самом деле, при $1 \leq \alpha < 2$ формула (3.5.5) дает тождественный нуль на ∂O^+, при $2 < \alpha$ – тождественную бесконечность. На $E_n \setminus \overline{O^+}$ значение h зависит от того, какую ветвь комплексного переменного придать числу $(-1)^{\xi}$ при $\xi = \frac{1}{\alpha} \neq \frac{1}{2}$. Если же $\alpha = 2$, то (3.5.7) приобретают простой вид

$$h_{11} = 1 \ , \quad h_{1\beta} = 0 \ , \quad h_{\beta\gamma} = -\partial_\beta \rho_\gamma \ , \qquad (3.5.10)$$

из которых видно, что можно всегда продолжить h на всё E_n без каких бы то ни было особенностей, если ρ без особенностей.

Лоренцова метрика доставляет случай, когда h_{ik} не зависит от $(t, \overline{x})$, ибо тогда $h_{\beta\gamma} = -\delta_{\beta\gamma}$.

3.6. Пример – сопрягающее отображение симплициальной кинематики. Прежде всего кинематика, сопряженная к симплициальной кинематике, сама симплициальна. Непосредственные выкладки дают для $\text{КИН}_{5,1}$:

$$h_i(\xi^1, \dots, \xi^n) = \frac{(\xi^1 \cdot \ldots \cdot \xi^n)^{2/n}}{n \xi^i} \ , \qquad (3.6.1)$$

$$h_{ik}(\xi^1, \dots, \xi^n) = \left(\frac{2}{n} - \delta_{ik}\right) \frac{\tau^2}{n \xi^i \xi^k} \ , \qquad (3.6.2)$$

причем здесь легко находится обратное отображение

$$\xi^i = \frac{(h_1 \cdot \ldots \cdot h_n)^{2/n}}{n h_i} \ , \qquad (3.6.3)$$

$$h^{ik}(h(\xi^1, \dots, \xi^n)) = \left(\frac{2}{n} - \delta_{ik}\right) \frac{n \xi^i \xi^k}{\tau^2} \ . \qquad (3.6.4)$$

Скалярное произведение векторов $(\xi^1, \dots, \xi^n)$ и $(\eta^1, \dots, \eta^n)$ равно

$$\frac{\tau^2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta^k}{\xi^k} \ , \qquad (3.6.5)$$

а ортогональная к прямой $(\lambda\xi^1, \dots, \lambda\xi^n)$ гиперплоскость

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\eta^k}{\xi^k} = 0 \ . \qquad (3.6.6)$$

Теорема 10. Сопрягающее отображение для симплициальной кинематики регулярно на O^+, вырождается в тождественный нуль на $\partial O^+ \cup \partial O^-$, но может быть задано на $E_n \setminus \partial O^+ \cup \partial O^-$ теми же формулами, что на O^+.

Последнее ясно, ибо из (1.2.6) следует, что $\partial O^+ \cup \partial O^-$ задается уравнением $\exists_\kappa \xi^\kappa = 0$. Невырожденность следует из существования обратного отображения (3.6.4).

Сказанное сохраняет силу для КИН$_{5,2}$, но формулы там громоздки.

3.7. **Пример – сопрягающее отображение орициклической кинематики.** Начнем с некоторого обобщения КИН$_{2,4}$ в виде КИН$_9$.

Определение 7. Пусть $(E_n, <, \tau)$ – регулярная кинематика. Кинематику $(E_n, <, \sigma)$, где порядок тот же, а

$$\sigma(\bar X) = \left(\bar X\, \underline{g}(\bar A)\right)^{\alpha} \tau^{1-\alpha}(\bar X), \qquad 0 \le \alpha < 1, \tag{3.7.1}$$

где g – сопрягающее для τ отображение, $\bar A \in \partial O^+ \setminus 0$ и

$$0 < \bar A \bar X < \infty \tag{3.7.2}$$

для всех $\bar X \in O^+$, называем обобщенно-орициклической над $(E_n, <, \tau)$ и обозначаем КИН$_9$.

Заметим, что необходимым условием корректности определения 7 является возможность регулярно продолжить g на ∂O^+, хотя бы в одной точке A, что, как мы видели, не всегда возможно. В частности, над симплициальной кинематикой нельзя построить обобщенно-орициклической.

Теорема 11. Если все фигурирующие в определениях значения функций корректны, то определение корректно и $(E, <, \sigma)$ есть метрическая кинематика.

В самом деле, неравенство Гельдера обеспечивает вогнутость метрики, а (3.7.2) гарантирует выполнение ВК$_U$. Прочее тривиально.

Заметим, что нельзя было бы дальше обобщить КИН$_9$, взяв $A \in \overline{O^+} \setminus 0$ вместо $A \in \partial O^+ \setminus 0$, ибо тогда нарушилось бы ВК$_U$. При $\alpha \ge 0$ КИН$_{2,4}$ есть частный случай КИН$_9$ с исходной лоренцовой, но лоренцова допускает также $-1 < \alpha < 0$. Непосредственные выкладки дают

$$h_i(X) = \sigma^2\left(\alpha a_i + (1-\alpha) x_i\right), \quad a_i = \frac{A_i}{AX}, \quad x_i = \frac{g_{ik} X^k}{\tau^2}, \tag{3.7.3}$$

$$h_{ik}(X) = \sigma^2\left(-2\alpha(1-\alpha)(x_i - a_i)(x_k - a_k) + \alpha a_i a_k + (1-\alpha)\frac{g_{ik}}{\tau^2}\right), \tag{3.7.4}$$

откуда

$$\det\left(h_{ik}(X)\right) = (1-\alpha)^{n-1} \frac{\sigma^{2n}}{\tau^{2n}} \det(g_{ik}), \tag{3.7.5}$$

и сразу видно, что сопрягающее отображение h_{ik} не вырождено, существует обратное h^{ik}. Формула (3.7.5) устанавливается с помощью элементарной леммы.

Лемма. Если $\det a_{ik} \neq 0$ и z^j суть решения системы $a_{ij} z^j = y_i$, то $\det(a_{ik} + \lambda y_i y_k) = (1 + \lambda y_j z^j) \det(a_{ik})$.

В самом деле, разлагая $\det(a_{ik} + \lambda y_i y_k)$ в сумму по столбцам и привлекая формулы Крамера для решения названной системы, непосредственно получаем $\det(a_{ik} + \lambda y_i y_k) = \det(a_{ik}) + \lambda \sum_j y_j z^j \det(a_{ik})$.

Применим теперь лемму при $a_{ik} = g_{ik}$, $y_i = x_i - a_i$, $b_{ik} = a_{ik} - \alpha\tau^2 y_i y_k$, $z^j = x^j - a^j$. Получим $\det b_{ik} = (1-\alpha)\det a_{ik}$. Затем применим лемму к $b_{ik} + \frac{\alpha\sigma^2}{1-\alpha} a_i a_k$, $z^j = \frac{1}{1-\alpha}(\alpha x^j + a^j)$. Тогда $\det \frac{\tau^2 h_{ik}}{(1-\alpha)\sigma^2} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha^2} \det g_{ik}$, что дает (3.7.5);

Если g_{ik} не зависит от X, т.е. $XA = AX$, то обратная к h_{ik} матрица h^{jk} имеет вид

$$h^{jk} = \frac{\tau^4}{(1-\alpha^2)\sigma^2}\left(2\alpha(1-\alpha)\left(x^j + \frac{a^j}{\alpha-1}\right)\left(x^k - \frac{a^k}{\alpha-1}\right) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha-1} a^j a^k + \frac{1-\alpha}{\tau^2} g^{jk}\right). \qquad (3.7.6)$$

Скалярное относительно σ произведение $\langle XY \rangle$ выражается через скалярное относительно τ произведение формулой

$$\langle XY \rangle = \frac{\sigma^2}{\tau^2} XY + \alpha\sigma^2\left(\frac{AY}{AX} - \frac{XY}{XX}\right), \qquad (3.7.7)$$

а ортогональная к AX относительно σ гиперплоскость

$$\alpha X^2 (AY) - (1-\alpha)(AX)(XY) = 0. \qquad (3.7.8)$$

Теорема 12. Сопрягающее отображение h в КИН$_0$ и КИН$_{2,4}$ невырождено на O^+, но непродолжимо на $\partial O^+ \setminus A$.

В самом деле, из (3.7.3) видно, что при $X \in \partial O^+ \setminus A$ первое слагаемое в нем обращается в ноль, а второе в бесконечность, ибо $0 < AX < \infty$ и $0 < \alpha < 1$.

Поэтому итерировать определение 7 бессмысленно: брать $B \in \partial O^+ \setminus A$ нельзя, а при $B = A$ получаем ту же кинематику, разве что с другим показателем α.

Теорема 13. Для прямой суммы (определение 2 §2.5) регулярных кинематик, сопрягающие отображения которых задаются матрицами $f_{\gamma\delta}$ и $g_{\mu\nu}$ соответственно, сопрягающее отображение задается матрицей

$$h_{ik}(A,X) = \begin{pmatrix} \alpha\frac{\sigma^2}{\tau_1^2}\left(\frac{2(\alpha+1)}{\tau_1^2} A_\gamma A_\delta + f_{\gamma\delta}\right) & -\frac{4\alpha(1-\alpha)}{\tau_1^2 \tau_2^2} A_\gamma X_\mu \\ -\frac{4\alpha(1-\alpha)}{\tau_1^2 \tau_2^2} A_\delta X_\nu & \frac{(1-\alpha)\sigma^2}{\tau_2^2}\left(-\frac{2\alpha}{\tau_2^2} X_\mu X_\nu - g_{\mu\nu}\right) \end{pmatrix}, \qquad (3.7.9)$$

где через σ обозначено $\tau_1^{\alpha}\tau_2^{1-\alpha}$

Доказательство – непосредственным вычислением.

3.8. Бивекторы, косое произведение, угол и площадь. По метрике мы получили "тензор" h_{ik}. Применим к нему тензорные операции. Напомним, что простой бивектор есть косое (альтернированное) произведение векторов $(A\wedge B)^{ik} = A^{[i}B^{k]} = \frac{1}{2}(A^iB^k - A^kB^i)$, а косое произведение $\underline{a}\wedge\underline{b}$ тензоров $\underline{a} = a_{ik}$ и $\underline{b} = b_{ik}$ есть

$$(\underline{a}\wedge\underline{b})_{ijkl} = a_{ik}\wedge b_{jl} = \frac{1}{4}\left(a_{ik}b_{jl} + a_{jl}b_{ik} - a_{jk}b_{il} - a_{il}b_{jk}\right). \quad (3.8.1)$$

Если h – метрический тензор на E_n, то $h\wedge h$ обычно принимается за метрический тензор на бивекторном пространстве $E_n\wedge E_n$.

Определение 8. Двумерная поверхность $X(u,v)\subset E_n$ называется регулярной относительно направления $A>0$, если $h\wedge h(A)$ на бивекторе $\partial_{[u}X\,\partial_{v]}X$ (касательном к поверхности) не меняет знака (не обращается в ноль). Выражение

$$S_{\mathfrak{D}} = \iint\limits_{\mathfrak{D}} \sqrt{\left|h_{ki}(A)h_{jl}(A)\,\partial_u X^{[i}\partial_v X^{j]}\partial_u X^{[k}\partial_v X^{l]}\right|}\,du\,dv \quad (3.8.2)$$

называется площадью $S_{\mathfrak{D}}$ области $\mathfrak{D}$ регулярной поверхности относительно вектора $A>0$.

Теорема 14. Если поверхность выбрана так, что $A=\partial_u X$, то

$$S_{\mathfrak{D}} = \iint\limits_{\mathfrak{D}} \sqrt{-\tau^2\tau_{ik}(A)\,\partial_v X^i\partial_v X^k}\,du\,dv. \quad (3.8.3)$$

Для доказательства достаточно установить формулу

$$XYh_{ik}(X)Y^iZ^k - \langle XY\rangle\langle XZ\rangle = \tau^2(X)\tau_{ik}(X)Y^iZ^k, \quad (3.8.4)$$

а она получается из (2.7.3) при $f=\tau$ домножением на $XX=\tau^2$ обеих частей и применением к $XXh_{ik}Y^iZ^k - \tau^2\tau_{ik}Y^iZ^k = \tau\tau_iY^i\tau\tau_kZ^k$ формулы (3.2.2).

Особо важен частный случай $h\wedge h$, именно ее ограничение на $A\wedge E_n\subset E_n\wedge E_n$, с чем мы и имеем дело в теореме 14. Согласно теореме 9 §2 гессиан задает знакоопределенную вырожденную форму на E_n. Эта форма не может играть роль метрической, ибо τ_{ik} положительно-однородна степени минус единица. Но домножением на $\tau(A)$ однородность делается степени ноль, и можно ввести определение 9.

Определение 9. Гессианой метрикой фактор-пространстна E_n/A называется $\chi(\dot X) = \sqrt{-H_{ik}(A)\dot X^i \dot X^k} = \sqrt{-\tau\tau_{ik}(A)\dot X^i \dot X^k}$, где $\dot X$ суть векторы вида $X + \lambda A$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В силу теоремы 9 §2 определение корректно (на λA гессианная форма обращается в нуль, см. (2.7.2)) и при этом верна теорема 15.

Теорема 15. Значение $H_{ik}(A)$ на $\dot X \in E_n/A$ совпадает со значением $h \wedge h\,(A)$ на бивекторе $A \wedge X$, соответствующем $\dot X$.

В самом деле, в силу $A \wedge A$ между бивекторами $A \wedge X$ и направлениями $\dot X \in E_n/A$ существует взаимнооднозначное соответствие, а из (3.8.4) имеем

$$H_{ik}(A) = -\frac{1}{\tau^2(A)}\Big(A^2 h_{ik}(A) - h_i(A)h_k(A)\Big), \qquad (3.8.5)$$

ч.т.д.

Заметим, что для получения названных формул нам достаточно требовать существования $\partial_i \partial_k \tau$, ничего не предполагая насчет вырожденности-невырожденности h_{ik}. Поэтому пользоваться гессианной метрикой можно и в случае нерегулярной кинематики.

В лоренцовом случае

$$H_{ik}(A)X^i Y^k = -XY - \frac{|A \wedge X||A \wedge Y|}{A^2}, \qquad (3.8.6)$$

где X, Y ортогональны $A > 0$.

Определение 10. Углом φ вектора $Y > 0$ относительно вектора $X > 0$ назовем число, определяемое формулой

$$ch\,\varphi = \frac{XY}{\tau(X)\sqrt{h_{ik}(X)Y^i Y^k}}, \qquad (3.8.7)$$

со знаком, равным знаку ориентации от X к Y.

Прежде всего для корректности определения надо установить формулу

$$\frac{XY}{\tau(X)} \geqslant \sqrt{h_{ik}(X)Y^i Y^k}, \qquad (3.8.8)$$

а она вытекает из (3.8.4) при $Z = Y$ с учетом (2.7.1).

Обычно в формуле типа (3.8.7) вместо корня в знаменателе пишут $\tau(Y)$ (ср. (3.2.5)), но наш вариант определения позволит доказать важную теорему 6 §8. Конечно, угол от X к Y не равен углу от Y к X да и само скалярное произведение (3.2.2) не коммутативно. Сложение углов на 2-плоскости не аддитивно.

Теорема 16. Угол от X к Y выражается формулой

$$sh\varphi = \frac{\sqrt{H_{ik}(X)Y^iY^k}}{\sqrt{h_{ik}(X)Y^iY^k}} \quad . \tag{3.8.9}$$

Доказательство. Из (3.8.6) получаем $\dfrac{H_{ik}(X)Y^iY^k}{h_{ik}(X)Y^iY^k} = -1 + \dfrac{(XY)^2}{\tau^2(X)\,h_{ik}(X)Y^iY^k}$, откуда в силу $ch^2\varphi - sh^2\varphi = 1$ вытекает (3.8.9).

Так как в гессиановой метрике все равно, брать ли Y или его ортогональную проекцию на $Z \in X \wedge Y$, ортогональный X, то, применив к $Y = \alpha X + \beta Z$ и к (3.8.5) условие $XZ = 0$, получаем из (3.8.9) следствие:

Следствие. Если $X > 0$ и Z при $XZ = 0$ образуют положительно-ориентированную пару на 2-плоскости $X \wedge Y$ и $Y > 0$, то

$$sh\varphi = -\frac{h_{ik}(X)Y^iZ^k}{\sqrt{h_{ik}(X)Y^iY^k}\sqrt{-h_{ik}(X)Z^iZ^k}} \quad . \tag{3.8.10}$$

Знак минус возникает оттого, что согласно теореме 5 значение формы на Z отрицательно, а в определение и под знак корня входят положительные числа, ср. (3.8.6). Заметим, что угол, определенный через финслерову метрику, не совпадает с углом, определяемым по А.Д.Александрову (как верхний или нижний предел развертки треугольника на плоскость постоянной кривизны).

Summary. Kinematics, i.e. spacetime is defined as an ordered space $(E_n,<)$ or $(A_n,<)$. Definitions and examples are given for: vector, affine, translational, Einsteinean and metrical vector spacetimes. The vector kinematic metrics τ is differentiable almost everywhere. The most interesting results are obtained when $\tau \in C^2$ and are expressed in terms of its Hessian $\partial_i\partial_k\tau$. Every spacetime $(E_n,<)$ has its unique conjugate spacetime $(E_n^*,<^*)$ which is interpreted as a space of clocks above $(E_n,<)$. When τ meets some conditions the metrical spacetime $(E_n,<,\tau)$ has its conjugate $(E_n^*,<^*,\tau^*)$ also. The mapping of the former into the latter is the conjugating mapping $\nabla\frac{1}{2}\tau^2$. It yields an analogue of the metrical tensor $h_{ik}(X) = \partial_i\partial_k\frac{1}{2}\tau^2(X)$ and an analogue of the letting an index down.

Гл.2. ОБЪЕКТЫ И КОНСТРУКЦИИ В КИНЕМАТИКАХ

§4. СОБСТВЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО НАБЛЮДАТЕЛЯ

4.1. Возникающие сложности. В галилеевой $КИН_1$ будущее p^+ и прошлое p^- разделены и притом единственной гиперплоскостью $\{x \mid x \leftrightarrow p\}$ абсолютно одновременных p событий (см. определение 5 §1). Стандартность этой модели способствовала за 300 лет укоренению такой априорной практики: в пространстве-времени физики ищут (или неосознанно берут, исходя из тех или иных координат) какую-нибудь гиперплоскость (чаще всего в виде $t=t_0$), которую можно было бы рассматривать как 'собственное пространство' какого-нибудь наблюдателя (системы отсчета) и на которой можно было бы задавать 'начальные данные' для решения задачи Коши подразумеваемых дифференциальных уравнений. Мы увидим, как эта простая конструкция усложняется и расщепляется в эйнштейновых анизотропных мирах на три разные, хотя и родственные (а в изотропном случае эквивалентные), конструкции: 1) конструкция, связанная с радарным определением одновременности, 2) конструкция, связанная с понятием ортогональной гиперплоскости, 3) конструкция, связанная с полем вектора. Придется различать между строго каузальными конструкциями, где мы оперируем лишь структурой $(A_n, <)$, и метрическими конструкциями, где мы позволяем себе оперировать кинематической метрикой τ . Особенно усложнится вопрос, когда мы станем оснащать любое из названных пространств собственно-пространственной метрикой; здесь также напрашиваются три версии.

4.2. Радарное определение одновременности. В эйнштейновых кинематиках имеются плоскости, разделяющие p^+ и p^- даже сильнее, чем в $КИН_1$ (теорема 2 §1), и вышеуказанная идеология в принципе имеет право на существование. Одна-

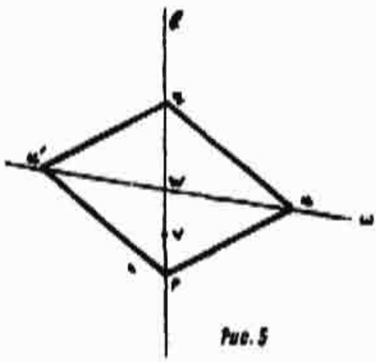


Рис. 5

ко разделяющая будущее и прошлое гиперплоскость тут всегда не единственна, так что возникают вопросы: можно ли указать способ, как из всех гиперплоскостей, разделяющих $\overline{p^+}\setminus p$ и $\overline{p^-}\setminus p$, выбрать единственную; если этот выбор невозможен, то как меняются формулировки утверждений, претендующих быть физическими законами, при переходе от одной такой гиперплоскости к другой?

В специальной теории относительности имеется довольно простой алгоритм построения такого однозначного "собственного пространства" для "инерциального точечного наблюдателя", см. [51], гл.2 и 3.1.1. Если ℓ – инерциальный наблюдатель (см. 1.4), и $p, q \in \ell$, $p<q$, то гиперплоскость ω, проходящая через $\partial p^+ \cap \partial q^-$, называется собственным пространством для ℓ в дату $\ell \cap \omega$. Такая терминология оправдана тем, что для случая КИП$_2$ $\partial p^+ \cap \partial q^-$ всегда содержится в гиперплоскости, которая всегда пересекается с ℓ в единственной точке w и при этом разделяет $\overline{w^+}\setminus w$ и $\overline{w^-}\setminus w$, как на рис.5. Обратим внимание, что метрика τ в этом определении не фигурирует, мы работаем исключительно с каузальной структурой $(A_n, <)$ пространства-времени.

Интерпретационно выбор гиперплоскости ω соответствует "радарному определению одновременности". Радарное сканирование, ведомое наблюдателем ℓ, заключается в том, что в дату $p \in \ell$ он посылает световой сигнал ∂p^+, который отражается в каком-то событии u и возвращается к ℓ в дату $q \in \ell$ в виде ∂u^+ (так что $u \in \partial q^-$). Принято приписывать событию u временную координату t_u на ℓ по формуле $t_u = p + \frac{1}{2}(q-p)$. Ей отвечает точка w на прямой ℓ. Поэтому множество всех событий $\{u\}$, одновременных w в радарном смысле, просто совпадает с множеством $\partial p^+ \cap \partial q^-$ при $pw = wq$. Геометрически это как раз и есть гиперплоскость ω. Такое определение одновременности приводится в первой же работе Эйнштейна, повторено практически во всех изложениях специальной теории относительности, лежит в основе кинематической относительности Милна и т.п.

Подвергалось оно и критике. Так, Грюнбаум [19] считает, что выбор середины w отрезка pq в качестве события, одновременного u, ничем не оправдан, и предлагает считать точку v на ℓ между p и q одновременной u, если $pv = \varepsilon pq$ при заранее фиксированном $0 < \varepsilon < 1$. При $\varepsilon = \frac{1}{2}$ определение Грюнбаума переходит в эйнштейновское. Против аргументации Грюнбаума возразить нечего, но против последствий принятия его дефиниции говорит следующее: определенное по Эйнштейну множество событий, одновременных w (относительно ℓ), является гиперплоскостью, т.е. довольно простым объектом. По дефиниции же Грюнбаума оно в ${}^3R_4$ никогда, кроме $\varepsilon = \frac{1}{2}$, не будет плоским, а всегда будет конусом с точечной ненулевой (положительной) кривизной в v. Соображения удобства говорят, таким образом, против грюнбаумовского усложнения теории. Тяпкин [53,54] привлекает идею анизотропии для дискредитации теории относительности и, ссылаясь на возможное неравноправие направлений "вперед" и "назад", указывает, что свет, испущенный в дату t и прошедший путь τ, вернется в дату $t + \frac{\tau(c_1 + c_2)}{c_1 c_2}$ (c_1 и c_2 суть скорости света вперед и назад; в КИН$_4$ $c_1 = \frac{1}{\alpha}$, $c_2 = \frac{1}{\beta}$), так что середина отрезка pq, отвечающая $\frac{(c_1+c_2)\tau}{c_1 c_2}$, не одновременна дате отражения $\frac{\tau}{c_1}$, кроме случая $c_1 = c_2$. Здесь, напротив, аргументация очень уязвима, поскольку в ней прибегают к представлениям о "расстоянии", "скорости", "одновременности", словно бы уже данными какой-то метатеорией или "независимо от нашего сознания", а их и предстоит разработать всякой теории пространства-времени. Но догадка, что формула $t_u = p + \frac{1}{2} pq$ неявно осуществляет то аффинное преобразование, которое указано нами в формуле (2.2.13), догадка, что радарный метод плохо приспособлен к улавливанию анизотропии (мысль, восходящая, кажется, к Пуанкаре), что найдет свое уточнение в теореме 11 ниже, – подтверждается.

Еще за 5 лет до Эйнштейна Паладь [32] предложил понимать под пространством множество одновременных друг другу событий. Эйнштейн повторил эту идею. Поэтому естественно, что множество событий, одновременных данному относительно фиксированного инерциального наблюдателя, стали называть "собственным пространством данного наблюдателя в указанную дату". Посмотрим, как ведут себя перечисленные определения в произвольной эйнштейновой аффинной кинематике $(A_n, <)$, не являющейся обязательно КИН$_2$ и не метризованной.

Определение 1. Говорим, что $w \in \lambda A$ радарно одновременно u относительно $A > 0$, и пишем $w \leftrightarrow u\,(\mathrm{rad}\,A)$, если

$$\exists \xi \geqslant 0 \quad u \in \partial(w - \xi A)^{+} \cap \partial(w + \xi A)^{-} . \tag{4.2.1}$$

Определение 2. Говорим, что прямая ω перпендикулярна прямой $\ell = \{x \mid x = p + \lambda A\}$, $A > 0$, если все точки из ω радарно одновременны относительно A некоторой точке на ℓ .

Сопоставляя определение 2 с определением 3 §3, отмечаем, что "перпендикулярность" и "ортогональность" у нас не синонимы.

Теорема 1. Пусть $(A_n, <)$ – эйнштейнова аффинная кинематика, каноническая координатная система $(t, \bar{x})$ в которой выбрана так, чтобы ось темпорат шла по лучу λA . Тогда параметрические уравнения множества событий, одновременных относительно A началу координат, имеют вид

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}\left(\|\bar{x}\| - \|-\bar{x}\|\right) \\ \xi = \frac{1}{2}\left(\|\bar{x}\| + \|-\bar{x}\|\right) \end{cases} \tag{4.2.2}$$

где ξ – параметр, равный темпорате точки пересечения конуса $\partial(0,\bar{x})^{+}$ с осью темпорат.

Доказательство. Из теоремы 3 §1, т.е. из (1.2.3) следует, что

$$(t, \bar{x}) \in \partial(0 - \xi A)^{+} \iff t - (-\xi) = \|\bar{x}\| ,$$
$$(t, \bar{x}) \in \partial(0 + \xi A)^{-} \iff (\xi - t, -\bar{x}) \in \partial 0^{+} \iff \xi - t = \|-\bar{x}\|. \tag{4.2.3}$$

Так как по определению 1 $\{(t,\bar{x}) \mid (t,\bar{x}) \leftrightarrow O(\mathrm{rad}\,A)\} = \{(t,\bar{x}) \mid (t,\bar{x}) \in \partial(-\xi A)^{+} \cap \partial(\xi A)^{-} \;\&\; \xi \geqslant 0\}$, то непосредственно получаем (4.2.2).

Замечание. Модификация определения одновременности в стиле Грюнбаума–Тяпкина такова. Пусть $u = (t, \bar{x})$, $w = (\vartheta, \bar{y})$. Тогда $w \leftrightarrow u\,(\mathrm{gr{-}n}\,A)$ означает $\exists \xi \; u \in \partial\left(w - \xi A \frac{\|x-y\| + \|y-x\|}{2\|y-x\|}\right)^{+} \cap \partial\left(w + \xi A \frac{\|x-y\| + \|y-x\|}{2\|y-x\|}\right)^{-}$.
При этом вместо (4.2.2) уравнение одновременных нулю событий принимает обычный вид $t = 0$. Но сигналы, отразившиеся от одновременных событий, приходят к A в разные даты с разных направлений. Некоторые результаты в этом духе для двумерного случая см. в статье Зарипова [21] .

Теорема 2. Во всякой 2-плоскости, содержащей вектор $A > 0$, найдется, и притом единственная в данной точке, прямая ω , перпендикулярная к λA .

Доказательство. Обратимся к рис.5. На $\ell = \lambda A$ берем произвольно точку w и откладываем от нее вниз и вверх равные отрезки $pw = wq = \xi$. В точках p и q строим ∂p^+ и ∂q^- и рассматриваем точки $u, u' \in \partial p^+ \cap \partial q^-$. В силу двухмерности таких точек ровно две и фигура $puqu'$ есть параллелограмм. Диагонали его pq и uu', пересекаясь, делятся пополам, поэтому uu' проходит через точку w при любом выборе ξ, ч.т.д.

Теорема 3. Множество перпендикуляров к $A > O$ в точке O в эйнштейновой аффинной кинематике $(A_n, <)$ при $n \geqslant 3$ содержится в гиперплоскости тогда и только тогда, когда прямая λA является осью (проективной) симметрии конуса O^+.

Доказательство. Множество $\{x \mid x \leftrightarrow O(\mathrm{rad} A)\}$ очевидно разделяет O^+ и O^-. Поэтому, если оно содержится в гиперплоскости, то последнюю можно принять за координатную, а так как она к тому же проходит через начало координат, то ее уравнение $t = 0$. Из (4.2.2) видим, что тогда $\|\bar{x}\| = \|-\bar{x}\|$, откуда следует, что фигура ∂O^+, т.е. $t = \|\bar{x}\|$, инвариантна относительно замены $\bar{x} \to -\bar{x}$, следовательно, λA есть ось симметрии для ∂O^+. Обратно, если λA – ось симметрии, то $\|\bar{x}\| = \|-\bar{x}\|$, и по (4.2.2) все одновременные нулю относительно A события содержатся в гиперплоскости $t = 0$.

Соединяя этот результат с теоремами 4-5 §1, получаем теорему 4.

Теорема 4. Для того, чтобы в эйнштейновой аффинной n-мерной кинематике у всякого инерциального наблюдателя множество одновременных данному событий было гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы либо $n = 2$, либо O^+ – эллиптический конус, т.е. во всех случаях кинематика может быть приведена к лоренцовой КНН$_2$.

Итак, резюмируем. Вообще говоря, отношение радарной одновременности не транзитивно (при одном и том же векторе A). Если бы мы назвали собственным пространством для λA в дату O множество $\{x \mid x \leftrightarrow O(\mathrm{rad} A)\}$, то обнаружили бы, что, вообще говоря, это пространство не является линейным пространством. Оно не замкнуто относительно сложения векторов из него. Хуже, оно не является гладким многообразием, ибо это линейчатая поверхность, проходящая через O и в точке O имеющая точечную (отрицательную) кривизну. Для отдельных наблюдателей, случайно оказавшихся осями симметрии для O^+, собственное пространство в этом смысле было бы плоским, обычным E_{n-1}. Но в КНН$_5$ нет ни одного плоского собственного пространства в таком смысле.

Пользование радарным определением одновременности в ки-

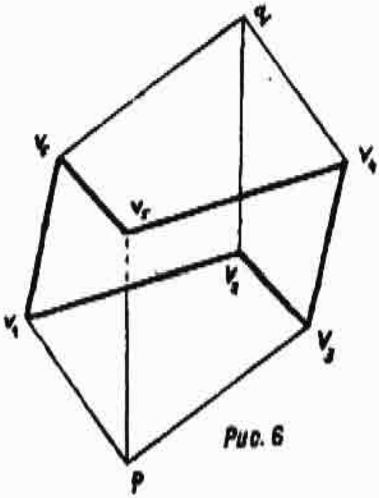


Рис. 6

нематиках, не являющихся лоренцевыми, автоматически приводит к появлению некоторых мер неопределенности. Укажем две возможные. Фиксируем $\xi > 0$ и рассмотрим выпуклую оболочку $H(A, \xi)$ множества $\partial(-\xi A)^{+} \cap \partial(\xi A)^{-}$, см. рис. 6, выполненный для КИН$_{\xi}$. Если O^{+} – не эллиптический конус, то H пересекается с прямой $\lambda A_{\gamma\gamma}$ по ненулевому отрезку $\tau\xi$, очевидно меньшему $2\xi_{\gamma\gamma}$ и содержащему в себе ноль. Отношение $\mu(A) = \frac{\tau\xi}{2\xi}$ является аффинным инвариантом и в то же время "мерой неопределенности" в установлении одновременности наблюдателем A: очевидно, что наблюдатель A не может точнее, чем на $\mu(A)$, синхронизировать события. Для этой меры $\mu(A)$ легко находится верхняя (и во множестве всех эйнштейновых аффинных кинематик точная) оценка

$$\mu \leqslant \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \qquad (4.2.4)$$

в обозначениях (1.5.2).

Другая мера неопределенности возникает так. Рассматриваем множество перпендикуляров к прямой λA в начале координат. Взяв любые $n-1$ разных линейно независимых перпендикуляров, мы получим натянутую на них гиперплоскость. Если все прочие перпендикуляры не лежат в ней, то получаем, что прямой λA отвечает связка гиперплоскостей, каждая из которых в некотором смысле может претендовать на звание "перпендикулярной". Обозначим эту связку $\Omega(A)$. Очевидно, что $\Omega(A)$ собственно содержится в связке гиперплоскостей, разделяющих O^{+} и O^{-}. Рассмотрев теперь сферическое изображение связки $\Omega(A)$, мы можем диаметр этого изображения принять за меру неопределенности. Мы уже упоминали про фундаментальную роль перпендикуляра в метрической геометрии: взаимно-однозначное сопоставление каждой прямой (из достаточно хорошего пучка прямых) "перпендикулярной" гиперплоскости обычно порождает метрику; ср. §3.2.

Здесь же мы получаем вариант "случайной" метрики: каждой прямой отвечает не одна, а много гиперплоскостей.

В связи с $\|\bar{x}\| \neq \|-\bar{x}\|$ укажем релевантность этого соотношения для проблемы несимметрии времени. Принято определение 3.

Определение 3. Говорим, что направление течения времени не выделено (прошлое и будущее симметричны), если пространство-время допускает изоморфизм $t \to -t$, $\bar{x} \to \bar{x}$.

Теорема 5. Для того, чтобы в любой (аффинной) системе координат для аффинной эйнштейновой кинематики направление течения времени было бы не выделено, необходимо и достаточно, чтобы кинематика была *лоренцовой* KHH_2.

В самом деле, по условию при этом инвариантно множество $\partial O^+ \cup \partial O^- = \{(t,\bar{x}) \mid t = \|\bar{x}\| \vee t = -\|-\bar{x}\|\}$, откуда следует $\|\bar{x}\| = \|-\bar{x}\|$, после чего доказательство завершается применением теоремы 4.

Для отдельных наблюдателей λA направление времени может быть не выделено даже в анизотропном случае (например, в $KHH_{3,1,1-2}$), но так как для глобальных эффектов достаточно, чтобы оно хоть где-то хоть немного было выделено, то можно заключить, что введение в рассмотрение анизотропного пространства-времени позволит счесть решенной "загадку асимметрии времени". Заметим, что "комбинированное изменение четности" в виде отображения $t \to -t$, $\bar{x} \to -\bar{x}$ возможно в любой кинематике, ибо при этом $\partial O^+ \cup \partial O^-$ автоматически сохраняется.

4.3. Ортогональная гиперплоскость. При наличии метрики τ можно каждому $A > 0$ однозначно сопоставить ортогональную (см. определение 3 §3 и примеры (3.5.9), (3.6.6) и (3.7.9)) гиперплоскость, т.е. семейство векторов, производная в направлении которых от τ равна нулю:

$$\{\bar{X} \mid X^k \partial_k \tau(\bar{A}) = 0\} \qquad (4.3.1)$$

Эта запись относится к дифференцируемой в A метрике; включение же в рассмотрение точек недифференцируемости, где $\partial_{X+Y} \geq \partial_X + \partial_Y$ и множество ортогональных к A векторов уже не образует векторного подпространства, усложнило бы вопрос избыточно. В $KHH_{2,1}$ такая гиперплоскость $X^i A^k g_{ik} = 0$ совпадает с радарно определяемой гиперплоскостью, поэтому как эквивалентным радарному пользуются определением 4.

Определение 4. Говорим, что $p \leftrightarrow q \; (o\tau A)$, если $A_{op} = A_{oq}$.

Но в нелоренцовой эйнштейновой аффинной кинематике размерность $n \geqslant 3$, и такой равносильности не бывает никогда: ее запрещает теорема 4. Далее, ортогональная гиперплоскость как претендент на понятие "множества одновременных событий" может приводить к парадоксам. Например, в КИН$_{2,2}$ при $\alpha = 1$ световая прямая $t = x$ ортогональна всякой временной прямой λA при $A > 0$, как видно после непосредственного дифференцирования. Иначе говоря, ортогональная плоскость не разделяет $\overline{\rho^+} \setminus \rho$ и $\overline{\rho^-} \setminus \rho$. События ρ и $\rho + X$ одновременны (относительно любого наблюдателя к тому же), и при этом световой сигнал из ρ приходит в $\rho + X$. Сужение допустимого класса кинематик регулярными кинематиками избавляет от этого парадокса.

Теорема 6. В регулярной кинематике разные наблюдатели имеют различные ортогональные гиперплоскости, причем ортогональная к $A > 0$ гиперплоскость не касается $\overline{O^+}$.

Доказательство. Пусть, напротив, $Xh(A) = 0 \Leftrightarrow Xh(B) = 0$. Отображение h сопоставляет вектору A гиперплоскость $h(A)$, которой принадлежит X. По условию всякий такой вектор принадлежит и $h(B)$, откуда следует, что $h(A) = h(B)$, что нарушает взаимно-однозначность h, предположенного регулярным. В ходе доказательства теоремы 5 §3 мы уже установили, что при $\bar{A}\bar{B} = 0$ невозможно $\bar{B} \in \partial O^+ \mathbin{\&} \bar{A} \in O^+$, чем доказана вторая часть теоремы.

Из (3.7.9) видно, что даже при круговом конусе O^+ ортогональная одновременность не всегда совпадает с радарной, хотя кинематика регулярна и радарная одновременность здесь совпа-

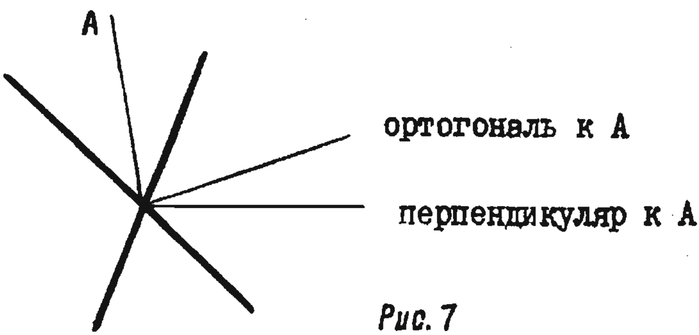


Рис. 7

дает с лоренцевой. Из этой формулы видно, как при возрастании α от нуля до единицы ортогональная к X гиперплоскость поворачивается и в пределе делается ортогональной к $A \in \partial O$, независимо от X.

Для канонически метризованной квазилоренцевой кинематики даже в двумерном случае ортогонали и перпендикуляры различаются: если $1 \leq \alpha < 2$, то ортогональная к вектору (t, x) прямая лежит между прямой $(\lambda t, \lambda x)$ и радарным перпендикуляром к ней (предполагаем $x \neq 0$). При $2 < \alpha < \infty$ расположение обратное, см. рис. 7. Для двумерной анизотропной КЛП$_{4,1}$, однако, радарное и ортогональное определения равносильны. То же относится к определению одновременности по Грюнбауму (см. замечание к теореме 1): множество одновременных событий не совпадает с ортогональю. Например, в КЛП$_{-1,1}$ в точке $(1,0)$ первое относительно оси темпорат описывается $t = 0$, а ортогональное оси темпорат множество — прямою $2t + (\beta - \alpha)x = 0$.

Резюмируем. Введение в рассмотрение кинематической метрики позволяет сохранить привычное представление, что множество одновременных событий является гиперплоскостью и потому может быть принято за собственное пространство наблюдателя A. При этом возможны парадоксы, но ограничение регулярными метриками исключает их все, кроме одного: несовпадение с одновременностью в смысле узкой каузальной структуры. Встает принципиальный вопрос: является ли одновременность свойством каузальным или метрическим? Как мы увидим ниже, этот вопрос допускает такую переформулировку: меняется ли одновременность, если мы выбираем другой лагранжиан?

С этим связана еще одна трудность. В специальной теории относительности указанием инерциального наблюдателя $A > 0$ однозначно указывается некоторая удобная координатная система: ее ось темпорат есть этот наблюдатель, а ее гиперплоскость $t = 0$ есть гиперплоскость, ортогональная наблюдателю и состоящая из событий, одновременных относительно него. В анизотропном же случае нет такого естественного однозначного и удобного соответствия; ср. ниже 4.3. Если даже согласиться выбирать в качестве такой гиперплоскости гиперплоскость, ортогональную A, прямые в ней не будут перпендикулярны A и потому эта система будет походить не на декартову (гильбертову, лоренцеву) систему отсчета, а на косоугольную (произвольную аффинную). При переходе же к другой гиперплоскости $t = 0$ меняется норма $\|\bar{x}\|$, причем не по аналитическим формулам...

4.4. Собственное пространство как векторное поле. Кроме воззрения на собственное пространство как на сечение в пространстве-времени, имеется другой взгляд на него. Пространство мыслится как набор ("вместилище") виртуальных тел, а не мгновенных состояний этих тел. Например, классически (по-видимому, до Пуанкаре) пространство понималось как совокупность всех взаимно покоящихся потенциальных материальных точек. Инерциальная точка у нас эксплицируется времениподобной прямой, взаимный покой – параллелизмом прямых. Рассмотрение же в аффинном пространстве семейства параллельных прямых сводится к простой операции факторизации A_n по фиксированному направлению $A>0$.

Определение 5. Собственным пространством наблюдателя $A>0$ в кинематике $(A_n, <)$ называется фактор-пространство A_n/A . Отношение эквивалентности здесь

$$p \sim q \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad p = q + \lambda A . \tag{4.4.1}$$

Это определение мало пригодно в случае трансляционных кинематик, но для аффинных (векторных) оно удобно как в эйнштейновом, так и в неэйнштейновом случаях. Фактически так понимается проблема пространства в работе [14], но начальные положения там кажутся более общими, сводясь, однако, к R^1_4 или ${}^1R_4$.

Теорема 7. Собственное пространство наблюдателя A изоморфно как векторная структура: для галилеевой кинематики – множеству абсолютно одновременных нуль векторов; для лоренцевой кинематики – множеству событий, одновременных относительно наблюдателя A радарно; для произвольной регулярной кинематики – ортогональной к A гиперплоскости. Для нелоренцевой эйнштейновой кинематики оно никогда не изоморфно множеству радарно одновременных относительно A событий. Собственные пространства различных наблюдателей изоморфны друг другу и имеют своим точным представителем пространство бивекторов $A \wedge E_n$.

Доказательство очевидно. О связи E_n/A с $A \wedge E_n$ говорилось в §3.8. С интерпретационной точки зрения бивектор $A \wedge X$, т.е. двумерная плоскость, есть как раз "направление" от наблюдателя A к материальной точке X , а все пространство – это и есть множество всех возможных направлений.

Свое назначение собственное пространство в физике выполняет, только если оно метризовано. Иначе о скоростях, например, говорить нельзя. Исходя из $(A_n, <)$, метрику для $A \wedge E_n$ можно вводить через координаты или абсолютно через каузальную структуру, а исходя из $(A_n, <, \tau)$, – еще дополнительно через метрическую структуру τ .

Определение 6. Пусть в $(A_n, <)$ фиксирована каноническая система координат $A \oplus E_{n-1}$, ось темпорат которой параллельна A . Тогда нормовой метрикой на $A \wedge E_n$ называется функция $\| . \| : A \wedge E_n \longmapsto [0, \infty)$, задаваемая формулой

$$X = (t, \bar{x}) \Rightarrow \| A \wedge X \| = \| \bar{x} \| . \qquad (4.4.2)$$

Определение корректно, ибо по всякому $\bar{\bar{a}} \in A \wedge E_n$ находится некоторый $X \in E_n$ при $\bar{\bar{a}} = \bar{A} \wedge \bar{X}$, а в названной системе координат по X находятся $(t, \bar{x})$ и, следовательно, $\| \bar{x} \|$. Если $\bar{\bar{a}} = A \wedge X = A \wedge Y$, то $Y = X + \lambda A$, а по выбору координатной системы это означает, что $t_Y = t_X + \lambda$ и $\bar{y} = \bar{x}$, так что $\| \bar{\bar{a}} \|$ найдено однозначно. В частности, $\| A \wedge A \| = 0$.

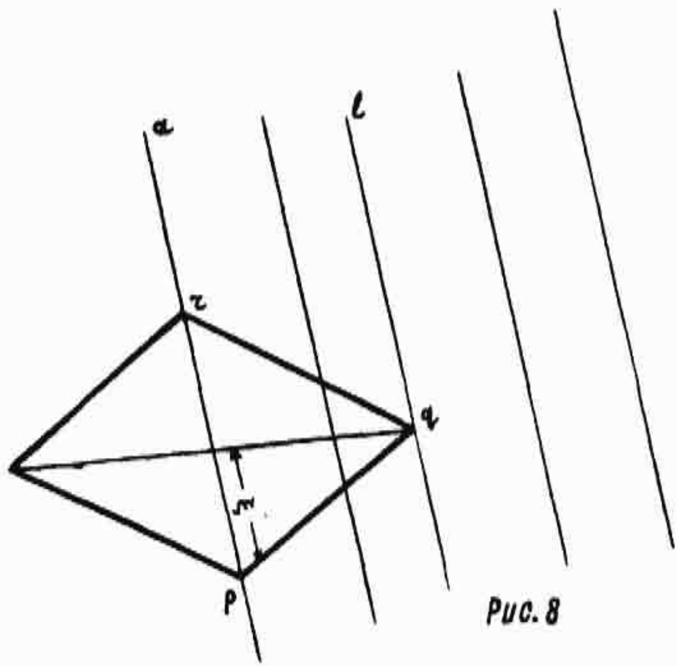


Рис. 8

Это определение лучше всего согласуется с определением одновременности по Грюнбауму; ср. теорему 11 ниже.

Определение 7. Пусть в $(A_n, <)$ фиксировано направление $A > 0$. Через $\mu(A \wedge X)$ обозначаем число ξ, называемое майкельсоновым расстоянием (метрикой), получаемое следующей конструкцией. Пусть ℓ – прямая в A_n, представляющая $A \wedge X$, а p – точка на прямой $\lambda A = a$. Обозначаем $q \in \ell \cap \partial p^+$ и $r = a \cap \partial q^+$, полагая $\frac{1}{2} pr = \xi a$. См. рис.8, из которого видно, что $\mu(A \wedge X)$ есть половина времени путешествия сканирующего X сигнала из A.

Определение корректно, ибо все промежуточные объекты находятся однозначно. Напомним, что длина бивектора $A \wedge X$ есть площадь параллелограмма, натянутого на A и X, а все такие параллелограммы со сторонами на a и ℓ равновелики.

Теорема 8. Пусть $(A_n, <)$ – эйнштейнова аффинная кинематика, $\lambda A > 0$ – произвольный инерциальный наблюдатель в ней, ρ – координатная гиперплоскость $t = 0$ в канонической координатной системе, $\| \cdot \|$ – соответствующая норма. Тогда майкельсонова метрика имеет вид

$$\mu(A \wedge X) = \frac{1}{2}\left(\|\Xi\| + \|-\bar{\Xi}\|\right) \tag{4.4.3}$$

В самом деле, из определения 7 видно, что ξ – есть указанный в теореме 1 параметр, а потому применима (4.2.2). Итак, майкельсонова метрика имеет содержательный смысл половины времени между испусканием и возвращением радиосигнала, отраженного от тела. Задана она инвариантно, исходя из одной лишь каузальной структуры, и довольно просто выражается формулой во всякой координатной системе.

Кроме этих двух метрик на $A \wedge E_n$ имеется еще гессианная метрика, вводимая определением 9 §3.

Теорема 9. Нормовая, майкельсонова и гессианная метрика совпадают для случая лоренцовой кинематики. Во всех трех метриках в произвольной анизотропной (лишь бы регулярной) кинематике скорости всякой материальной точки ограничены сверху некоторым числом. Майкельсонова метрика для каждого собственного пространства определена инвариантно, гессианная метрика вообще зависит от выбора системы координат, но ее компоненты при линейных преобразованиях преобразуются как компоненты тензора. Для разных наблюдателей A, B метризованные гессианные собственные пространства $(A \wedge E_n, H(A))$ и $(B \wedge E_n, H(B))$ для регулярного случая [illegible] друг другу и изометричны ортогональной к A гиперплоскости (относительно ограничения $h(A)$ на нее):

$$H_{ik}(A)X^iY^k = -h_{ik}(A)X^iY^k. \quad (4.4.4)$$

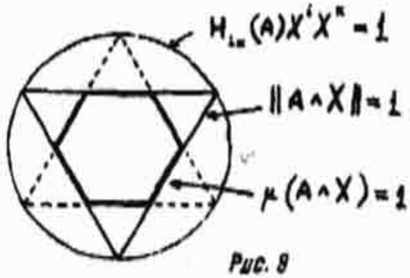


Рис. 9

В нерегулярном случае они могут быть неизометричными. Нормовая метрика зависит от выбора координатной гиперплоскости, пространство $(A \wedge E_n, \|\cdot\|)$ изометрично этой гиперплоскости с индуцированной метрикой $\|.\|$, но $(A \wedge E_n, \|.\|)$, вообще говоря, не изометрично $(B \wedge E_n, \|\cdot\|)$ при $A \neq \lambda B$.

Доказательство очевидно. Задержимся лишь на последнем утверждении. Если конус O^+ допускает ось симметрии $\lambda A > 0$, но не является эллиптическим, то в нем есть $\lambda B > 0$, не являющиеся осью симметрии. Поэтому в координатном расщеплении $A \oplus \beta$ норма должна быть симметричной $\|-\bar{x}\| = \|\bar{x}\|$, а в $B \oplus \beta$ – не симметричной, так что пространства не изометричны. На рис.9 показано расположение сфер для разных метрик в симплициальной трехмерной кинематике при значении $A = (1, \ldots, 1)$. К сожалению, общих теорем о неравенствах между этими метриками найти не удается.

4.5. **Майкельсонова система координат.** Майкельсонова метрика позволяет построить систему координат, максимально похожую на декартову. Она осуществляет "проекцию" мира на ось темпорат вдоль множества радарно одновременных событий.

Теорема 10. В эйнштейновой аффинной кинематике фиксируем начало O и вектор $A > 0$. Тогда существует непрерывное положительно-однородное отображение $\vartheta: A_n \to R$, для которого выполнены два условия – на одновременность и на порядок:

$$q \longleftrightarrow O + \vartheta_q A \ (\mathrm{rad}\ A), \quad (4.5.1)$$

$$x > 0 \Leftrightarrow \vartheta_x > \mu(A \wedge ox). \quad (4.5.2)$$

Отображение аддитивно $\vartheta_{x+y} = \vartheta_x + \vartheta_y$ тогда и только тогда, когда A – ось симметрии O^+.

Доказательство. Если $oq \parallel A$, положим $\vartheta_q = \frac{oq}{A}$. Если $oq \nparallel A$, то в 2-плоскости $A \wedge oq$ согласно теореме 2 однозначно определена прямая λY, перпендикулярная A. Воры ν так, чтобы $oq = \nu A + \lambda Y$, полагаем $\vartheta_q = \nu$ и получаем отображение, удовлетворяющее (4.5.2). Однородность и непрерывность его очевидны. Так как q радарно одновременно τ при $o\tau = \vartheta_x A$, то найдется $\xi > 0$ такое, что $p\tau = \xi A$ и $q \in \partial p^+$. По определению 7 $\mu(oq) = \mu(A \wedge oq) = \mu(A \wedge pq) = \xi$. Таким образом, если $\nu = \vartheta_q$, то $q \in \partial O^+$. Этим доказано (4.5.1). Из аддитивности ϑ следовала бы линейность ϑ. Взяв произвольно $E_{n-1} \subset E_n$, разделяющую O^+ и O^-, строим тогда линейное отображение $\varphi = \vartheta \times \beta$, где $\beta: A_* \longrightarrow A \wedge E_n = E_{n-1}$ канонически. Получаем систему координат, в которой $\mu(x) = \|\bar{x}\|$. Так как μ симметрична (4.4.3), то $\|\bar{x}\| = \|-\bar{x}\|$, чем доказано последнее утверждение.

Определение 8. *Майкельсоновой системой координат в эйнштейновой кинематике относительно наблюдателя $A > 0$ называем* отображение $E_n \mapsto (\vartheta_X, A \wedge X)$, при котором выполнены (4.5.1-2).

Майкельсонова система координат наиболее похожа на лоренцову (декартову) координатную систему в специальной теории относительности. В ней множество событий $\{(t,\bar{x}) | t = \vartheta_{(t,\bar{x})} = t_0\}$ состоит из радарно (т.е. инвариантно) одновременных$(t_0, 0)$ событий. Иными словами, множество $\vartheta_{(t,\bar{x})} = t_0$ перпендикулярно оси темпорат. В этой системе координат пространственное расстояние μ (т.е. на $\vartheta_{(t,\bar{x})} = t_0$) определено тоже инвариантно, через структуру порядка (с точностью до масштабного множителя). При этом конус ∂O^+ задается привычным уравнением $\vartheta_{(t,\bar{x})} = \mu(t,\bar{x})$ и можно было бы ввести метрику по-старому: $\tau = \sqrt{\vartheta^2(X) - \mu^2(A \wedge X)}$. Единственное – но радикальное – отличие от специальной теории относительности заключается в том, что эта система координат нелинейна. Множество $\vartheta = t_0$ не есть плоскость, отображение ϑ не аддитивно. Конечно, в общей теории относительности пользуются нелинейными координатами, но там это связано с нелинейностью (искривленностью) подлежащего пространства, а чтобы в теории линейных объектов приходилось прибегать к нелинейным координатам – этого не встречалось до теории анизотропного пространства-времени. Поскольку дифференциал есть *линейная часть приращения*, постольку нелинейность ϑ исключает возможность пользоваться дифференцированием темпораты в этом случае (пространственная координата линейна и допустимо ее дифференцирование). Таким образом, "самая близкая" к декартовой системе система координат оказывается максимально неудобной: если $dC = dA + dB$, то $\vartheta(dC) \neq \vartheta(dA) + \vartheta(dB)$.

4.6. Опыт Майкельсона в разных метриках. Рассмотрим часто упоминаемый в литературе опыт Майкельсона–Морли, не вдаваясь при этом в разнообразие неправильных описаний его существа. На фиксированном расстоянии r от источника $\lambda A > 0$ в разных направлениях помещают зеркала γ_1 и γ_2. В дату $p \in \lambda A$ из p посылают световые сигналы (синхронно) к γ_1 и γ_2, которые, отразясь от $q_1 \in \gamma_1$ и $q_2 \in \gamma_2$, возвращаются к λA в даты t_1 и t_2 соответственно. Если $t_1 = t_2$, то говорят, что опыт Майкельсона дал отрицательный результат (*"анизотропии не обнаружено"*), *а если* $t_1 \neq t_2$, *то пространство анизотропно по направлениям* $p \wedge \gamma_1$ и $p \wedge \gamma_2$ (свет идет по-разному в этих направлениях) и опыт дал положительный результат.

Из самого описания опыта видно, что помимо каузальной структуры (отношений $<$ и $\lessdot$) существенно фигурирует какое-то собственное пространство, связанное с источником λA, и расстояние r в этом пространстве. В пору Майкельсона никаких вопросов, связанных с этим пространством и расстоянием, не возникало: по сути всё мыслилось в рамках КНН$_1$ с "само собой существующей" метрикой на гиперплоскости абсолютно-одновременных событий. Нам же нужно различать случаи разных метрик.

Теорема 11. Если $n \geqslant 3$, то для того, чтобы в $(A \wedge E_n, \|\cdot\|)$ или $(A \wedge E_n, H(A))$ опыт Майкельсона для наблюдателя A по всем направлениям дал отрицательный результат, необходимо и достаточно, чтобы λA была осью симметрии O^+. Какова бы ни была эйнштейнова кинематика, в $(A \wedge E_n, \mu)$ для произвольного наблюдателя A опыт Майкельсона дает по всем направлениям отрицательный результат.

Доказательство. Если метрика нормовая, то сфера $\|A \cdot X\| = 1$ лежит в координатной гиперплоскости, а если метрика гессианная – то сфера $H_{ik}(A) X^i X^k = 1$ лежит в ортогональной к A гиперплоскости; в обоих случаях получается, что множество точек отражения света лежит в гиперплоскости. Но для отрицательного результата опыта необходимо и достаточно, чтобы множество точек отражения совпадало с $\partial p^+ \cap \partial t^-$, а плоскота этого множества согласно теореме 3 означает, что λA есть ось симметрии для O^+, чем доказано первое утверждение. Если же метрика майкельсонова, то по определению 7 ее сфера $\mu(A \wedge X) = 1$ есть как раз множество $\partial p^+ \cap \partial t^-$ (точнее, семейство приных, параллельных A и проходящих через $\partial\rho^{+}\cap\partial t^{-}$, ср. рис.8). Следовательно, множество точек отражения в этом случае всегда совпадает со сферой, так что опыт Майкельсона всегда дает отрицательный результат.

З а м е ч а н и е 1. Теорему во второй части можно усилить: не обязательно брать метрику собственного пространства в виде майкельсоновой. Достаточно взять ее в радарном виде, т.е. потребовать, чтобы расстояние τ события $q\in\partial\rho^{+}\cap\partial t^{-}$ от λA зависело бы только от длины ρ^{t}; иными словами $\tau=f(\rho)$ при произвольной f.

З а м е ч а н и е 2. Эта парадоксальная теорема о том, что невозможно обнаружить анизотропию заведомо анизотропного пространства-времени, прежде всего показывает, что выбор инвариантного способа исследования не всегда короче всего ведет к цели. Инвариантная метрика оказалась хуже для целей обнаружения анизотропии, нежели обе координатные. Этим оправдано сказанное в 4.2 о том, что радарный метод плохо приспособлен для улавливания анизотропии. Еще более глубокие эпистемологические размышления возникают в связи с этой теоремой на тему о роли конвенции (выбора дефиниций) в наших высказываниях об экспериментах. Об этом писал еще Пуанкаре, см. также работу [54].

4.7. Н е с т а б и л ь н о е с о б с т в е н н о е п р о с т р а н с т в о. Пуанкаре же принадлежит знаменитый философский вопрос: можно ли физическими экспериментами как-нибудь заметить гипотетическое расширение или сжатие нашего пространства. Вопрос возник до рождения теории относительности, тем паче современной космологии, и имелось в виду "абсолютное" собственно-пространство. Экспликация его идеи заключается в поисках такой замены определения 5, при которой потенциальные материальные точки не покоятся вечно, а разбегаются или сближаются. Геометрически это сводится к замене пучка параллельных прямых пучком прямых, имеющих общую точку, или более сложной системой прямых или кривых. Сейчас эта смутная идея "пространства" вытесняется более точным термином "система отсчета", которая дефинирована, например, в учебнике [51] определением 2.3.1 как невырожденное векторное поле, интегральные кривые которого являются материальными точками "пространства". В нашем определении 5 это поле бралось константным. Пуанкаре допускал, а Милн детально рассмотрел случай поля $V=\lambda X$ – расширяющееся пространство, когда все материальные точки словно бы вылетели из O и далее разбегаются (из $V=\lambda X$, т.е. $(1,\vec{v})=\lambda(t,\vec{x})$ получается

$\lambda = \frac{1}{t}$ и $\bar{x} = \bar{v}t$). Дабы изгнать саму особенность $O=(0,\bar{0})$, Милн перенормирует время, введя $\tau = \ell_{o\gamma} t$ (мы опускаем некоторые константы и подробности), и тогда точка O перемещается на $-\infty$. Согласно теории Милна [29] основной ток вещества происходит по интегральным кривым этого поля, а вещество распределено с плотностью $m(X) = m\left(1-\left(\frac{\bar{x}}{t}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. Занимает оно, естественно, конечный объем шара радиуса ct в эвклидовом пространстве $\overline{O^+} \cap \{t = const\}$. Так оно описывается в терминах координат $(t, \bar{x})$, соответствующих той конвенции, при которой собственное пространство дефинируется определением 5 как система параллельных прямых, а одновременность – радарная (тут совпадающая с ортогональной). Принятие же самих интегральных кривых этого тока вещества, т.е. пучка прямых, проходящих через O, за собственное пространство кардинально меняет картину. Ведь множество лучей в псевдоэвклидовом $^1R_4$ образует пространство Лобачевского. Формула для плотности вещества в нем принимает вид равномерного (пропорционального объему) распределения. Поверхность одновременности – поверхность, ортогональная всем линиям тока – оказывается псевдоэвклидовой сферой, а не гиперплоскостью. Таким образом, доказана теорема 12.

Теорема 12. Расширение неравномерно распределенного вещества в конечной области эвклидова пространства за конечный промежуток, начиная с сингулярности O, равносильно описывается моделью со стационарным вечным веществом, равномерно заполняющим всё бесконечное лобачевское пространство.

Более глубокое рассмотрение этих двух систем отсчета показывает [29], что в обеих имеет место один и тот же экспериментальный (обсервационный, говоря точнее) факт – красное смещение спектра света, испущенного удаленным источником (источник и наблюдатель суть линии тока). Этот факт можно интерпретировать как доплерово в одной системе и как "эффект динамики в τ-времени" – в другой. Изучение модели Милна показывает, как многое в истолковании явления зависит от априорного выбора системы понятий, которыми мы описываем его, вопреки распространенному наивному реализму, мнящему за каждым математическим символом объективную физическую реальность.

Пример этот был обобщен нами в 1959 г. на случай галилеевой кинематики, на случай произвольного пространства-времени постоянной кривизны (ненулевой) и может быть обобщен частично на случай произвольной эйнштейновой кинематики.

4.8. Аксиоматика специальной теории относительности. Мы приводили попутно разные критерии лоренцовости: теорема 5 §1, теорема 4 §3, формула (3.3.2), теоремы 4, 5, 10 §4. Выделим один из этих признаков в форме самостоятельной аксиоматики частно-релятивистского пространства-времени.

$СТО_1$. Пространство-время есть аффинное пространство.

$СТО_2$. В пространстве-времени имеется отношение строгого порядка $<$, согласующееся с алгебраическими операциями линейного пространства.

$СТО_3$. Будущее p^+ непусто и открыто хоть для одной точки.

$СТО_4$. Замыкание отношения $<$ само оказывается отношением порядка.

$СТО_5$. Для всякого инерциального наблюдателя λA множество событий x, равномерно одновременных p относительно λA, имеет касательную гиперплоскость в точке p.

$СТО_6$. Для всякой пары точек p, q при $p < q$ существует единственное число $\tau(p,q)$ со свойствами: 1) $\tau(p, p+\lambda pq) = \lambda\tau(p,q)$ для $\lambda > 0$ и 2) если $\tau(p,a) = 1$, то $\tau(p,q)$ однозначно определяется отношением $\frac{pq}{ps}$ при $ps \parallel pa$, $s \in \partial q^+$, $pr \parallel pa$ и $q \in \partial r^+$.

Теорема 13. Система аксиом $СТО_{1-5}$ однозначно задает неметризованную лоренцову кинематику $КЛП_2$.

В самом деле, $СТО_{1-3}$ задают векторную кинематику, которая в силу $СТО_4$ оказывается эйнштейновой (теорема 2 §1). Из аксиомы $СТО_5$ применением теоремы 4 заключаем, что кинематика есть $КЛП_2$.

Мы видели, что лоренцова кинематика может быть метризована по-разному, в том числе нелоренцовым, отличным от $КЛП_{2,1}$ способом. Нетрудно проверить, что $СТО_6$ не выполняется для $КЛП_{2,4}$ – орициклической кинематики с лоренцовым конусом. Но и в $КЛП_2$ во всяком случае имеется тензор g_{ik} (не зависящий от $X \in E_n$), заданный с точностью до множителя и задающий конус ∂p^+ уравнением $g_{ik}(x^i - p^i)(x^k - p^k) = 0$. Так как по $СТО_6$ для определения расстояния $\tau(p,q)$ достаточно задать где-то масштабный отрезок pa, и применением конусов ∂q^- и ∂q^+ точно однозначно вычисляется $\tau(p,q)$, то $\tau(p,q)$ должно выражаться через тензор g_{ik} и вектор pq, а в силу первого условия $СТО_6$ положительно-однородно по pq. Итак, нами доказана теорема:

Теорема 14. Система аксиом $СТО_{1-6}$ однозначно задает метризованную лоренцову кинематику $КЛП_{2,1}$ с $\tau(p,q) = \sqrt{g_{ik}(x^i_q - x^i_p)(x^k_q - x^k_p)}$, если какой-нибудь отрезок pa при $p < a$ назначить за масштабную единицу.

А.Д.Александров выдвинул и изучил ряд других аксиоматик специальной теории относительности [20], где вместо $СТО_5$ фигурируют свойства групп автоморфизмов конуса O^+; о них сказано в следующем параграфе. Он всегда останавливается на теоремах вида теоремы 13, не формулируя ни аксиом вида $СТО_6$, ни теорем вида 14. Аксиома типа $СТО_6$ неявно содержится в аксиоматике Милна, а также в той или иной форме во всех работах его последователей, исходящих из "сигнальных функций"; обзор см. в монографии [58]. Только благодаря ей получаются относительно простые результаты.

§5. АВТОМОРФИЗМЫ (СИММЕТРИИ) ЭЙНШТЕЙНОВЫХ КИНЕМАТИК

5.1. Другая аксиоматика специальной теории относительности. Мысль о том, что описание основных законов природы должно не зависеть от положения наблюдателя и тем самым от выбора наблюдателя, восходит, как известно, к Буридану. Уточнение этой идеи привело к использованию понятия "автоморфизм" – физики предпочитают термин "симметрии" – в теории пространства-времени. Фактическое ограничение изотропным пространством-временем привело к игнорированию других, кроме лоренцовой, групп автоморфизмов. Мы увидим, как резко различаются двумерный и n-мерный случаи.

Как упоминалось в ходе доказательства теоремы 4 §1, с геометрической точки зрения вопрос об автоморфизмах эйнштейновых кинематик почти однозначно связан с вопросом о проективных автоморфизмах выпуклых тел (в пространстве лучей). Опираясь на формулированные там факты, естественно получаем такую аксиоматику. Рассматриваем структуру $(A_n, <, \mathcal{G})$, где $\mathcal{G} \subset \{A_n \to A_n\}$. Налагаем аксиомы каузально-групповой аксиоматики $КГА_{1-5}$:

$КГА_1$. Для $(A_n, <)$ выполнены $СТО_{1-4}$.

$КГА_2$. $g \in \mathcal{G}$ – линейное отображение $g : A_n \longrightarrow A_n$, $g^{-1} \in \mathcal{G}$.

$КГА_3$. $g \in \mathcal{G}$ – изотонное отображение $p < q \Rightarrow gp < gq$.

$КГА_4$. Группа $\mathcal{G}$ действует транзитивно на множестве граничных лучей: $A, B \in \partial O^+ \Rightarrow \exists g \in \mathcal{G}\ \exists \mu > 0 \quad gA = \mu B$.

Тогда аналогично теоремам 13-14 §4 верна теорема 1.

Теорема 1. Система аксиом $КГА_{1-4}$ однозначно задает неметризованную лоренцову $КИП_2$, а при выполнении аксиомы $КГА_5$ = $СТО_0$ – метризованную лоренцову $КИП_{2,1}$.

Физический смысл этой теоремы очевиден: если для света все направления равноправны, то пространство-время есть пространство-время специальной теории относительности. Математически система аксиом допускает существенное ослабление, и как раз этим занимается хроногеометрическая школа.

3.2. Необходимые определения и общие теоремы.

Определение 1. Причинным автоморфизмом f аффинной кинематики $(A_n, <)$ называем взаимнооднозначное отображение $f: A_n \mapsto A_n$, при котором f и f^{-1} сохраняют порядок, т.е. $p < q \Leftrightarrow fp < fq$. Метрическим автоморфизмом f метрической кинематики $(A_n, <, \tau)$ называем такое взаимнооднозначное отображение $f: A_n \mapsto A_n$, при котором сохраняется метрика, т.е. $\tau(fp, fq) = \tau(p, q)$.

Ясно, что метрический автоморфизм непременно является причинным. Определение не предполагает сохранения других структур – например дифференциальной или линейной, – имеющихся на A_n. Одна из главных задач хроногеометрии состоит как раз в том, чтобы найти условия, при которых причинный (метрический) автоморфизм оказывается линейным (т.е. $КГА_2$ делается избыточной).

Определение 2. Группой Лоренца называется линейная группа автоморфизмов метрики (2.2.2) $\tau = \sqrt{t^2 - \bar{x}^2}$. Расширенной группой Лоренца называется линейная группа автоморфизмов конуса $t \geqslant |\bar{x}|$ (правильнее ее называть расширением связной компоненты группы Лоренца). Группой Пуанкаре называется линейная группа автоморфизмов метрики $\tau = \sqrt{(t - t_0)^2 - (\bar{x} - \bar{x}_0)^2}$.

Ясно, что расширенная группа Лоренца получается умножением связной компоненты группы Лоренца на гомотетии $X \to \lambda X$, $\lambda > 0$, а группа Пуанкаре – умножением группы Лоренца на параллельные переносы.

Теорема 2. В галилеевой $КИП_{1,1}$ с метрикой (2.2.1) причинные автоморфизмы имеют вид

$$\begin{cases} t' = t + \alpha \\ \bar{x}' = f(t, \bar{x}) \end{cases}, \qquad (3.2.1)$$

где $f(t, \cdot)$ – произвольная взаимнооднозначная функция $E_{n-1} \mapsto E_{n-1}$.

Метризация (2.2.1) может показаться слишком слабой, поэтому введем $КИП_{1,2}$, где сверх кинематической метрики (2.2.1) задана оно евклидова метрика в слое $t = t_1 = t_2$ одновременных событий

$$\tau\left((t,\bar{x}_1),(t,\bar{x}_2)\right) = |\bar{x}_2 - \bar{x}_1| = \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2} \qquad (5.2.2)$$

Это то, что принято называть классическим пространством-временем и с некоторой вольностью обозначать R^1_4 (полуевклидово индекса $n-1$).

Теорема 3. При $n = 4$ преобразования вида

$$\begin{cases} t' = t \\ \bar{x}' = \bar{w}(t) + \bar{x} + \bar{\alpha}\times\bar{x}\,\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} + \bar{\alpha}\times(\bar{\alpha}\times\bar{x})\,\dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} \end{cases}, \qquad (5.2.3)$$

где $\bar{w}: R \to E_{n-1}$ – произвольная дифференцируемая векторная функция $\alpha = |\bar{\alpha}|$, а $\times$ – знак векторного произведения трехмерных векторов, – сохраняют структуру полуевклидова пространства $КИН_{1,2}$ (2.2.1) и (5.2.2).

Теорема 4. Всякий причинный автоморфизм лоренцовой кинематики $КИН_{2,1}$ при $n \geqslant 3$ есть линейное преобразование из расширенной группы Лоренца. Она при $n = 4$ порождается преобразованиями вида

$$\begin{cases} t' = \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t + \dfrac{\bar{v}\bar{x}}{c^2}\right), & (v = |\bar{v}|), \\ \bar{x}' = \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\bar{x} + \bar{v}t + \left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}\right)\dfrac{\bar{v}\times(\bar{v}\times\bar{x})}{v^2}\right); \end{cases} \qquad (5.2.4)$$

$$\begin{cases} t' = t + t_0 \\ \bar{x}' = \bar{x} + \bar{x}_0 + \bar{\alpha}\times\bar{x}\,\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} + \bar{\alpha}\times(\bar{\alpha}\times\bar{x})\,\dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} \end{cases}, \qquad (5.2.5)$$

где $\bar{v}, \bar{\alpha} \in E_3$ и соответствуют скорости "буста" и углу евклидова вращения (напомним, что (5.2.4) отдельно не образуют группы).

Обычные галилеевы преобразования возникают при немотивированном дополнительном требовании, чтобы $\bar{w}$ была линейной $\bar{w}(t) = \bar{v}t$. Физически произвол (нелинейность) в $\bar{w}$ означает, что в галилеевом мире разрешается переход не только к инерциальным (линейным) системам отсчета, но и к произвольно движущимся со скоростью $\frac{d\bar{w}}{dt} \neq const$. Эта кинематическая невыделенность линейных перемещений в галилеевом (классическом) пространстве-времени была известна в XVII - IX в.в.; она вынуждалась коперниковским приписыванием собственного движения Земле – нашей лаборатории. Отсутствие других моделей пространство-времени заставляло думать, будто бы это – общее свойство пространство-времени. (Но, как видно из теоремы 4, в пространство-времени специальной теории относительности линейные преобразования выделены!) В то же время динамика Ньютона нуждалась в умении различать инерциальное движение $\ddot{x} = 0$ от неинерциального $\ddot{x} \neq 0$. Это неустранимое противоречие в *классической механике послужило* Беркли поводом для язвительных, но справедливых выпадов в адрес необоснованности классической механики. *Попытка же опровергнуть* критику Беркли на пути признания равноправия всех систем отсчета привела к своеобразной аргументации Маха, а затем Эйнштейна в терминах так называемого "принципа эквивалентности". Сейчас бытуют десятки различных формулировок этого "принципа", но они все не имеют отношения к проблемам пространство-времени: в реальном построении математического аппарата ни один из них не используется.

Теорема 5. Во всякой эйнштейновой аффинной кинематике группа причинных автоморфизмов содержит группу аффинных переносов.

Теорема 6. Симплициальная кинематика КИН$_{5,1}$ в качестве причинных автоморфизмов допускает любые возрастающие функции $f:(0,\infty)\mapsto(0,\infty)$, а в качестве метрических автоморфизмов – любые такие функции при условии

$$f_1(\xi^1)\cdot\ldots\cdot f_n(\xi^n) = \xi^1\cdot\ldots\cdot\xi^n \qquad (5.2.6)$$

При этом существует $(n-1)$-параметрическая линейная группа $\mathfrak{A}$, транзитивная на множестве положительных лучей

$$\forall i \quad \xi^{i\prime} = \alpha^i \xi^i, \quad (\alpha^1\cdot\ldots\cdot\alpha^n = 1, \quad \alpha^k > 0). \qquad (5.2.7)$$

Теорема 7. В орициклической кинематике КИН$_{2,4}$ при $n \geqslant 3$ причинные автоморфизмы линейны и сводятся к группе аффинных переносов плюс некоторой $\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1\right)$-параметрической *группе вращений* вокруг O, транзитивной на множестве положительных лучей. При $n = 4$ эта группа $\mathcal{L}$ порождается теми из преобразований Лоренца (5.2.4–5), которые оставляют неподвижным вектор $B = (1,\bar{\beta}) \in \partial O^+$, $\bar{\beta}^2 = c^2$, плюс преобразованиями вида

$$\begin{cases} t' = (1+v/c)^{-\kappa/2}(1-v/c)^{\frac{1-\kappa}{2}}(1+v/c), & (-1<\kappa<1), \\ \bar{x}' = \dfrac{\bar{x} + vt\bar{\beta} + \left(1-\sqrt{1-v^2/c^2}\right)\bar{\beta}\times(\bar{\beta}\times\bar{x})}{(1+v/c)^{\kappa/2}\,(1-v/c)^{(\kappa-1)/2}}. \end{cases} \qquad (5.2.8)$$

Группа $\mathcal{G}$ изоморфна орициклической подгруппе группы автоморфизмов $(n-1)$-мерного пространства Лобачевского.

Из этих теорем доказательства теорем 2, 3, 5 и 6 очевидны, за доказательством теоремы 4 отсылаем к обзорной статье [20], а доказательство теоремы 7 таково.

Из (2.2.5) следует, что всякий причинный автоморфизм орициклической кинематики одновременно есть причинный автоморфизм лоренцовой кинематики, поэтому по теореме 4 он линеен. Из той же формулы следует, что при таком автоморфизме луч $\lambda B = (\lambda, \lambda \vec{B}) \in \partial O^{+}$ должен быть инвариантным. Так как множество положительных лучей лоренцовой кинематики образует пространство Лобачевского, то подгруппа $\mathcal{L}$, сохраняющая фиксированную точку на абсолюте (луч B), есть орициклическая подгруппа – та подгруппа, которая пучок параллелей, относящихся к этой точке, переводит в себя, а потому переводит в себя и гиперповерхности, ортогональные пучку параллелей, т.е. орисферы (орициклы). В силу того, что на орисферах реализуется $(n-2)$-мерная евклидова геометрия, группа, сохраняющая данный пучок, оказывается группой подобий евклидова $(n-2)$-пространства, следовательно, имеет $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ параметров. Кроме того, она транзитивна на $(n-1)$-пространстве Лобачевского, т.е. на множестве положительных лучей кинематики. Имеем $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}$. Покажем, что $\mathcal{L}$ сохраняет инвариант (2.2.5) и тем самым $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$. Обозначим через $\mathcal{L}$ группу Лоренца, через $\mathfrak{h}$ – группу гомотетий. Пусть $\psi : \mathcal{L} \mapsto (0, \infty)$ произвольный гомоморфизм ("характер"). Сопоставлением $\eta \mapsto \eta\psi(\eta)$ убеждаемся, что $\mathcal{L}' = \{\eta\psi(\eta) \mid \eta \in \mathcal{L}\} \subset \mathfrak{h}\mathcal{L}$ изоморфна $\mathcal{L}$. Ее подгруппа $\mathcal{L}' = \{\eta\psi(\eta) \mid \exists \lambda\ \eta\psi(\eta)B = \lambda B\ \&\ \eta \in \mathcal{L}\}$ совпадает как множество с $\mathcal{L} = \{\eta \mid \exists \lambda\ \eta B = \lambda B\} \subset \mathfrak{h}\mathcal{L}$, а потому $\mathcal{L}$ изоморфна подгруппе группы $\mathcal{L}$. Выберем в качестве ψ коэффициент растяжения B, точнее, $\eta B = (\psi(\eta))^{\beta} B$ с неизвестным пока β. Это корректно, ибо по сказанному $\{\lambda B \mid \lambda > 0\}$ инвариантен, $\psi(\eta) > 0$. При действии произвольной $\eta \in \mathcal{L}$ сохраняются известные инварианты скалярного произведения $\eta(X)\eta(B) = XB$, $(\eta(X))^2 = X^2$. Обозначив $X' = \psi(\eta)\eta(X)$, будем иметь $(X')^2 = \psi^2(\eta)X^2$, $X'B = \psi\,\eta(X)B = \psi\,\eta(X)\eta(B)\psi^{-\beta} = XB\,\psi^{1-\beta}$. Для инвариантности выражения $\left(\frac{XB}{X^2}\right)^{\alpha/\beta}\sqrt{X^2}$ достаточно теперь положить $\beta = 1$, чем доказано сохранение (2.2.5) и тем самым $\mathcal{L} = \mathcal{G}$. Так как (3.2.8) есть преобразование Лоренца (3.2.5), умноженное на гомотетию при $\vec{v} = v\vec{B}/c$, то (3.2.6) тоже доказано.

Замечание 1. Группа $\mathfrak{M}$ (5.2.7) тоже транзитивна на множестве положительных лучей, а группа $\mathfrak{L}$ (5.2.6) транзитивна и обладает дополнительной подвижностью – вращением в плоскости, ортогональной направлению B .

Замечание 2. Физики зачастую игнорируют те автоморфизмы, которые не сохраняют орисферу, а сохраняют лишь ортогональный орисфере пучок параллелей. Так поступают А.Барут и Р.Рончка [6], т.2, стр.173; Ю.В.Новожилов [31], стр.86–87; Ф.И.Федоров [56], стр.202 и многие другие. Поэтому со световым вектором $B \in \partial O^+$ они в своих классификациях ассоциируют лишь 3-параметрическую, а не 4-параметрическую группу. Этим можно объяснить, почему самостоятельно обнаруживший орициклическую кинематику Богословский [12], найдя в группе автоморфизмов 4 параметра, решил, будто бы им получены "преобразования, обобщающие преобразования Лоренца". Эти преобразования, как и метрику (2.2.5) в других обозначениях, как сообщает Г.Буземан [16], рассматривал еще С.Ли. Преобразование, совмещающее одну орисферу с другой того же пучка, имеет вид (5.2.8). В вышеупомянутых работах оно не учитывается, ибо является произведением преобразования Лоренца и гомотетии. Но технически дело в том, что вложение орициклической группы в группу Лоренца происходит не прямым вложением, а через изоморфизм некоторой подгруппы группы $\mathfrak{L}_B$. Вся суть в том, что обе группы одинаково действуют на пространстве положительных лучей.

5.3. Критерии линейности причинных автоморфизмов. Это главная тема хроногеометрии. А.Д.Александрову принадлежит по существу теорема 8 [20].

Теорема 8. Если эйнштейнова кинематика не является прямой суммой кинематики меньшей размерности и одномерной кинематики, то всякий ее причинный автоморфизм линеен.

Наметим доказательство. Главная идея: по структуре порядка $<$ построить какую-нибудь однозначно определенную порядком линейную структуру; после этого из сохранения $<$ будет следовать сохранение линейности. В 1914–1935 А.Робб в аналогичных целях определил "световую прямую, заполненную точками p и q" (при $q \in \partial p^+$), как множество $(\partial p^+ \cap \partial q^+) \cup (\partial p^+ \cap \partial q^-) \cup (\partial p^- \cap \partial q^-)$. Предоставим читателю проверить, что во всякой эйнштейновой кинематике со строго выпуклым конусом O^+ это множество прямолинейно. А.Д.Александров рассматривает друг-множества. Прежде всего, из теоремы 7 §1 следует, что такой автоморфизм есть гомеоморфизм. В силу же непрерывности естественен такой геометрический факт: автоморфизм f отображает касательные в точке q плоскости к $\overline{p^+}$ в касательные же (в fq) к $\overline{(fp)^+}$, причем параллельные друг другу – в такие же, см. [1,20]. Геометрически ясно, что касательных плоскостей к выпуклому конусу $\overline{p^+}$ достаточно много, чтобы было возможно нижеописываемая конструкция. Возьмем n касательных плоскостей ω_k, образующих n-гранный угол V; при f угол V перейдет в параллельный по вышесказанному. Зафиксируем одно из ребер l угла V. Конус $\overline{p^+}$ имеет касательные плоскости, отличные от ω_k, так как иначе $\overline{p^+} = V$, т.е. $(A_n,<)$ была бы произведением (симплициальной кинематикой). Невозможно, чтобы все касательные плоскости, отличные от ω_k, проходили бы через l, так как тогда $(A_n,<) = K \times l$. Таким образом, имеется касательная плоскость ω, не проходящая через l и отличная от противоположной ему плоскости ω_k, а потому в ω не содержится ребро l и лишь хотя бы одно ребро l_k ($l_k \subset \omega_k$). Плоскость $\beta = l \wedge l_k$ пересекает ω по некоторой прямой m, причем под действием f все упомянутые прямые и плоскости переходят в им параллельные. По известному свойству трех прямых l, l_k и m получаем, что ограничение $f|_\beta$ аффинно. Поэтому ограничение $f|_l$ линейно, а так как l – произвольное ребро, то f линейно на всех ребрах угла V, откуда очевидно, что f линейно (аффинно).

Хотя в исключенном условием случае причинные автоморфизмы могут быть нелинейными, следующая теорема, тоже принадлежащая Александрову, в некотором смысле "ограничивает" эту нелинейность.

Теорема 9. Если f – причинный автоморфизм эйнштейновой кинематики, то $f(\overline{0^+})$ всегда является аффинным образом конуса $\overline{0^+}$, т.е. найдется аффинное отображение h, для которого $h(\overline{0^+}) = f(\overline{0^+})$, хотя, может быть, $\exists p \ hp \neq fp$.

Другая аналогичная теорема Александрова имеет дело не с одним автоморфизмом, а с группой их.

Теорема 10. Если группа причинных автоморфизмов эйнштейновой аффинной кинематики $(A_n,<)$ с неподвижной точкой $p \in A_n$ транзитивна на p^+, то существует группа аффинных автоморфизмов этой кинематики с указанным свойством транзитивности. Эта группа совпадает с исходной тогда и только тогда, когда $(A_n,<)$ не является прямой суммой кинематик меньшей разморности и одномерной.

Доказательства см. в обзорной статье [20]. Другой критерий линейности:

Теорема 11. Для того, чтобы автоморфизм f трехмерной симплициальной кинематики был линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовала точка $q > p$ такая, что: 1) f линейно на прямой pq и 2) f дифференцируемо на pq в точке p относительно хоть какого-нибудь ребра ℓ конуса ∂_q^+.

Доказательство см. в статье автора [39], где раскрыты используемые определения. Для $n = 2$ см. статью Бенца [8].

Теорема 12. Всякий метрический автоморфизм аффинной кинематики со строго вогнутой метрикой линеен.

Доказательство см. в статье Буземана [16]. Идея его в том, что строгая вогнутость метрики позволяет (см. теорему 2Б 8б) единственным образом определить "сегмент" между точками p и q при $p < q$ как $\{x \mid \tau(p,x) + \tau(x,q) = \tau(p,q)\}$. Поскольку определение дано через метрику τ, которая инвариантна при автоморфизмах, постольку такие сегменты переходят в себя, а поскольку они однозначно определяются концами, они суть аффинные отрезки между p и q. Техническая трудность состоит в переносе линейности на отрезки pq при отсутствии $p < q$.

Следствие. Метрические автоморфизмы симплициальной КИИ$_{5,1}$ и гибридной КИИ$_8$ кинематик – линейны.

Теорема 13. Пусть f – взаимно-однозначное отображение A_n на себя, $n \geq 3$. Если найдется пара точек $p, q \in A_n$, для которых лоренцова метрика обладает свойством $\tau(p,q) = \tau(fx, fy) \Leftrightarrow x = p \;\&\; y = q$, то f есть лоренцово преобразование.

Доказательство см. в статье Бенца [9].

5.4. Автоморфизмы, транзитивные на положительных лучах.

Относительно метрических автоморфизмов названного вида удается доказать теорему, облегчающую редукцию кинематик и, соответственно, их классификацию.

Определение 3. Говорим, что группа $\mathfrak{G}$ автоморфизмов (причинных или метрических) кинематики $(E_n, <)$ (или $(A_n, <, \tau)$) транзитивна на лучах, если для всяких $X, Y \in O^+$ найдется $g \in \mathfrak{G}$, при котором $gX = \lambda X$ для какого-нибудь положительного $\lambda \in \mathbb{R}$.

Определение 4. Пусть $(E, <) = (E_1 \oplus E_2, <_1 \times <_2)$. Обозначаем положительные конусы множителей и произведения соответственно O_1^+, O_2^+ и O^+. Преобразования вида

$$h: (X,Y) \longmapsto (\rho X, \gamma Y), \quad (X \in E_1, Y \in E_2; \rho, \gamma > 0) \qquad (5.4.1)$$

называем поворотами.

По определению 8 §1 видно, что

$$O^{+} = O_1^{+} \times O_2^{+}, \qquad \partial O^{+} = \left((\partial O_1^{+}) \times O_2^{+}\right) \cup \left(O_1^{+} \times \partial O_2^{+}\right), \quad (5.4.2)$$

а из аксиомы ВК$_2$ следует, что всякий поворот является причинным автоморфизмом прямой суммы. Более того, так как на луче $(\lambda\beta X, \lambda\gamma Y)$ любая кинематическая метрика τ принимает значения от нуля до бесконечности, то среди преобразований (5.4.1) содержатся также метрические автоморфизмы прямой суммы метрических кинематик. Группу метрических поворотов будем обозначать $\mathcal{f}_\gamma$. Вообще говоря, она не исчерпывает группы всех метрических поворотов.

Теорема 14. Во всякой прямой сумме значение любого поворота, являющегося метрическим автоморфизмом, однозначно определяется отношением $\gamma\beta^{-1}$, и, обозначив $\lambda = \gamma\beta^{-1}$, можно любой метрический поворот в ней однозначно представить в виде

$$f : (X, Y) \longmapsto (\lambda^{\varkappa-1} X, \lambda^{\varkappa} Y), \qquad \lambda > 0. \quad (5.4.3)$$

Доказательство. Так как поворот f – метрический автоморфизм, то $\tau(X,Y) = \tau(\beta X, \gamma Y) = \beta\tau(X, \lambda Y)$, откуда $\beta = \tau(X,Y)/\tau(X,\lambda Y)$, чем доказано, что $\beta = \beta(\lambda)$ (ведь по определению (5.4.1) β и γ одни и те же для всех $(X,Y) \in O^{+}$). Суперпозиции двух поворотов f_λ и f_μ имеют вид $f_\mu f_\lambda(X,Y) = f_\mu(\beta(\lambda)X, \lambda\beta(\lambda)Y) = (\beta(\mu)\beta(\lambda)X, \mu\beta(\mu)\lambda\beta(\lambda)Y)$ и в то же время по доказанному $(\beta(\lambda\mu)X, \lambda\mu\beta(\lambda\mu)Y)$, откуда $\beta(\lambda\mu) = \beta(\lambda)\beta(\mu)$, что означает существование числа $\varkappa$, для которого $\beta(\lambda) = \lambda^{\varkappa-1}$, и поэтому выполнено (5.4.3).

Теорема 15. Если $(E, <, \tau)$ допускает группу метрических автоморфизмов, транзитивную на лучах, то

$$X \in O^{+} \,\&\, Y \in \partial O^{+} \Rightarrow \tau(X+Y) > \tau(X). \quad (5.4.4)$$

Доказательство. Так как по определению метрики $\tau(X+Y) \geq \tau(X) + \tau(Y)$ и $\tau(Y) = 0$, то в противном случае мы имели бы $\tau(X+Y) = \tau(X)$. Поэтому для любого $Z = X + \lambda Y$, $0 \leq \lambda \leq 1$ было бы

$$\tau(X) = \tau(Z) \quad (5.4.5)$$

Однако для всего луча $Z = X + \lambda Y$ при $-\infty < \lambda \leq 1$ такое равенство невозможно, ибо этот луч пересекает ∂O^{+} и там $\tau(Z) = 0$, тогда как $\tau(X) > 0$. Поэтому найдется минимальное $\lambda = \lambda_1 \leq 0$, для которого (5.4.5) выполняется. Возьмем $Z_0 = Z(\lambda_1)$, $Z_1 = Z(\lambda)$ при $0 < \lambda_1 < 1$ и рассмотрим автоморфизм $\varphi : Z_0 \mapsto Z_1$. Он существует по условию теоремы. Отношения $Z_1 \in \partial Z_0^{+}$ и $\tau(Z_0) = \tau(Z_1)$

сохраняются при φ и φ^{-1}, но тогда $\varphi^{-1}(Z_0)$ лежит на той же прямой и для $\varphi^{-1}(Z_0)$ выполняется (5.4.5) при $\lambda < \lambda_0$, что противоречит выбору λ_0 как минимального.

Теорема 16. Число α, фигурирующее в (5.4.3), лежит в промежутке $0 < \alpha < 1$, если кинематика метрически транзитивна на лучах.

Доказательство. Покажем, что из $\lambda > 1$ следует $\lambda\beta(\lambda) > 1$. Так как из $\beta(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}$ видно, что $\lambda\beta(\lambda) = \lambda^{\alpha}$, то этим будет установлено, что $\alpha > 0$ при $\lambda > 1$. Имеем $(X,Y) = (\lambda^{-1}X, Y) + (X - \lambda^{-1}X, 0)$, причем $(X - \lambda^{-1}X, 0)$ – световой по (5.4.2), и тогда по теореме 15 $\tau(X,Y) > \tau(\lambda^{-1}X, Y)$. С другой стороны, $\tau(X,Y) = \tau(\beta(\lambda)X, \lambda\beta(\lambda)Y) = \lambda\beta\,\tau(\lambda^{-1}X, Y)$, так что $\lambda\beta > 1$. Аналогично доказывается, что при $\lambda > 1$ будет $\beta(\lambda) < 1$, т.е. $\alpha < 1$, и так же для $\lambda < 1$.

Теорема 17. Пусть векторные метрические кинематики $(E_1, <_1, \tau_1)$ и $(E_2, <_2, \tau_2)$ каждая обладают транзитивной на лучах группой $\mathcal{G}_i$ метрических автоморфизмов. Тогда их прямая сумма с метрикой

$$\tau(X,Y) = a\, \tau_1^{\alpha}(X)\, \tau_2^{1-\alpha}(Y), \quad 0 < \alpha < 1,\ a > 0 \tag{5.4.6}$$

(см. определение 2 §2) также обладает транзитивной на лучах группой $\mathcal{G}$ метрических автоморфизмов, каждый элемент из которой имеет вид

$$\varphi(X,Y) = \left(\lambda^{\alpha-1}\varphi_1(X), \lambda^{\alpha}\varphi_2(Y)\right), \quad \varphi_i \in \mathcal{G}_i. \tag{5.4.7}$$

В частности, если $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ линейны, ($\mathcal{G}_1 = \{\underline{A}\}$, $\mathcal{G}_2 = \{\underline{B}\}$), то $\mathcal{G}$ представляется группой матриц вида

$$\begin{pmatrix} \underline{A} & 0 \\ 0 & \underline{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{\alpha-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda^{\alpha-1} & & \\ & & & \lambda^{\alpha} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda^{\alpha} \end{pmatrix} \tag{5.4.8}$$

Для доказательства достаточно подставить (5.4.7) в (5.4.6).

Теорема 18. Пусть векторная кинематика $(E, <)$ метрической кинематики $(E, <, \tau)$ является прямой суммой векторных кинематик $(E_1, <_1)$ и $(E_2, <_2)$, а $(E, <, \tau)$ обладает группой $\mathcal{G}$ метрических автоморфизмов, транзитивной на лучах. Тогда существуют: числа $a > 0$ и $0 < \alpha < 1$, кинематические метрики τ_k на $(E_k, <_k)$ и группы $\mathcal{G}_k$ такие, что: 1) τ удовлетворяет (5.4.6); 2) $\mathcal{G}_k$ есть группа метрических автоморфизмов кинематики $(E_k, <_k, \tau_k)$; 3) $\mathcal{G}_k$ изоморфна подгруппе группы $L(\mathcal{G}) \circ \mathfrak{h}$, где через $L(\mathcal{G})$ обозначена та линейная группа, которая существует в силу теоремы 16, а $\mathfrak{h}$ – группа метрических поворотов.

Доказательство. По сказанному в связи с определением 4 и по теореме 10 заключаем, что группа $\mathfrak{h}$ преобразований (5.4.1) содержится в полной группе метрических автоморфизмов. По теореме 10 существует линейная группа метрических автоморфизмов, транзитивная на лучах. Обозначаем $\mathcal{G}' = L(\mathcal{G}) \cup \mathfrak{h}$. Выберем произвольно $B \in O_2$ и для всякого $X \in O^+$ положим

$$\tau_1(X) = \left(\tau(X, B)\right)^{\frac{1}{\alpha}} . \qquad (5.4.9)$$

Это вогнутая функция, ибо $\tau\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \tau^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left(\frac{X}{2}, \frac{B}{2}\right) + \left(\frac{Y}{2}, \frac{B}{2}\right)\right) \geqslant$ $\geqslant \left(\frac{1}{2}\tau(X,B) + \frac{1}{2}\tau(Y,B)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ по вогнутости τ, а последнее $\geqslant \frac{1}{2}\left(\tau_1(X) + \tau_1(Y)\right)$ по неравенству для степенных средних. При $X \in \partial O_1^+$ будем иметь $\tau_1(X) = 0$ и обратно, см. (5.4.2). Цепочка равенств $\tau_1(X) = \tau^{\frac{1}{\alpha}}(X, B) = \tau^{\frac{1}{\alpha}}(f(X,B)) = \tau^{\frac{1}{\alpha}}(\lambda^{\alpha-1}X, \lambda^{\alpha}B) = \left(\lambda^{\alpha}\tau\left(\frac{X}{\lambda}, B\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \lambda\tau_1\left(\frac{X}{\lambda}\right)$ доказывает однородность τ_1. Аналогично

$$\tau_2(Y) = \left(\tau(A, Y)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (5.4.10)$$

при произвольном $A \in O_1^+$, лишь бы $\tau_1(A) = 1$, является кинематической метрикой на $\langle E_2, <_2 \rangle$. По транзитивности $L(\mathcal{G})$ найдется $\varphi \in L(\mathcal{G})$ при $\varphi(X, Z) = (\nu Y, \nu Z)$ для произвольных фиксированных $Z \in O_2^+$ и $X, Y \in O_1^+$. Взяв поворот f с $\lambda = \nu^{-1/\alpha}$, получим $f \circ \varphi(X, Z) = (\lambda^{\alpha-1}\nu Y, Z)$, что в силу произвольности $Z \in O_2^+$ корректно определяет подгруппу $\mathcal{G}_1 \subset L(\mathcal{G}) \cup \mathfrak{h}$, действующую только на E_1, причем транзитивно на лучах (луч λX переведен в произвольный λY). Так как и φ и f суть метрические автоморфизмы метрики τ, то из (5.4.9) следует, что τ_1 инвариантна относительно $\mathcal{G}_1$. Аналогично для $\mathcal{G}_2$. Осталось проверить (5.4.6). Возьмем произвольно $(X, Y) \in O^+$ и пусть $\varphi \in \mathcal{G}_2$ переводит луч B в луч Y. Тогда имеем $\varphi(X, B) = (X, \varphi(B)) = (X, \tau_2(B)\tau_2^{-1}(Y)Y)$, ибо φ линеен и сохраняет метрику τ_2. Поэтому $\tau(X, Y) =$ $= \tau\left(X, \tau_2(Y)\tau_2^{-1}(B)\varphi(B)\right) = \tau_2(Y)\tau_2^{-1}(B)\left(\tau_2(B)\tau_2^{-1}(Y)X, \varphi(B)\right) =$ $= \frac{\tau_2(Y)}{\tau_2(B)}\tau\left(\frac{\tau_2(B)}{\tau_2(Y)}X, B\right)$ в силу линейности всех рассматриваемых преобразований и в силу выбора φ тождественным на E_1. Так как φ к тому же метрический автоморфизм, то равенство можно продолжить, получив $\tau(X, Y) = \frac{\tau_2(Y)}{\tau_2(B)}\tau_1^{\alpha}\left(\frac{\tau_2(B)}{\tau_2(Y)}X\right) =$ $= \tau_2^{1-\alpha}(Y)\tau_2^{\alpha-1}(B)\tau_1^{\alpha}(X)$, что дает (5.4.6) при $\alpha = \tau_2^{\alpha-1}(B)$. Ясно, что если на $(E_1, <_1)$ существует другая кинематическая метрика τ_1', инвариантная относительно группы, транзитивной на лучах, то $\tau_1' = \xi\tau_1$.

Замечание. Эта теорема позволяет до некоторой степени редуцировать задачу о виде кинематической метрики той кинематики, которая допускает группу, транзитивную на лучах. Такая метрика, оказывается, всегда представима в виде

$$\tau = a\,\tau_1^{\alpha_1}\tau_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\tau_k^{\alpha_k}, \quad \Big(0<\alpha_i<1,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1\Big), \tag{5.4.11}$$

где τ_i заданы на векторных кинематиках $(\mathbf{V}_i, <_i)$ (возможно, несимметричных), уже не распадающихся в прямую сумму никакая. Объединяя все одномерные множители, можно считать, что α_1 относится к обобщенной симплициальной КИН$_{5,2}$ (2.5.1) при, возможно, $\alpha_1=0$, тогда как все прочие множители относятся к несимплициальным кинематикам размерности $n \geqslant 3$. Такими множителями могут быть лоренцова кинематика, орициклическая кинематика – обе с эллипсоидом в качестве канонического выпуклого тела. При этом, в силу теоремы 20 следующей рубрики эти две кинематики различаются только при $n \geqslant 3$. Поэтому, учитывая только названные возможности, для числа всех неизоморфных между собой кинематик с транзитивной на лучах группой и не содержащих одномерных множителей получаем, что оно равно числу разбиений числа n на суммы из не менее, чем по три, слагаемых $n=\sum\alpha_i$ $(\alpha_i \geqslant 3)$. Такое число пока не сосчитано в комбинаторике. Но трудностей больше, чем только с подсчитыванием числа кинематик. Неизвестно, всегда ли каноническое выпуклое тело будет эллипсоидом (шаром)? Если бы мы не имели в виду кинематическую метрику, т.е. допускали бы произвольные векторные кинематики, то в число допустимых множителей входили бы все цилиндрические кинематики, у которых каноническое множество K представляет собой произведение канонического множества K' меньшей размерности на отрезок $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Ведь если K' допускает группу $\mathfrak{G}$, транзитивную на внутренности K', то $\mathfrak{G}\times\mathfrak{P}$, где $\mathfrak{P}$ – группа проективных преобразований на $(0,1)$, транзитивна на K. Эта группа точно совпадает с группой причинных автоморфизмов соответствующей кинематики. Но требование сохранения метрики исключает такой случай: ведь тогда метрика окажется константой на цилиндрическом множителе ξ и нарушится одна из аксиом ВК$_{5-7}$. Если каноническое тело – шар, то известно, какова группа автоморфизмов. Она транзитивна на внутренности шара, и если транзитивна на границе его, то она – группа Лобачевского (и кинематика лоренцова), а если она имеет одну неподвижную точку на границе, то она орициклическая (и кинематика орициклическая). Как заметил В.В.Горбацевич, из тооремы А.Д.Александрова (1967) вытекает, что других групп, удовлетворяющих названным условиям, нет. Поэтому мы можем усилить наш результат, доложенный на хроногеометрической конференции 1982, в виде:

Теорема 19. Пусть метрическая векторная кинематика K допускает группу автоморфизмов, транзитивную на лучах. Пусть, если она распадается в произведение векторных кинематик, то всякий сомножитель, не являющийся симплициальной кинематикой ($n \geq 1$), имеет строго выпуклый конус. Тогда K есть произведение только симплициальных ($n \geq 1$), лоренцовых ($n \geq 3$) и орициклических кинематик ($n \geq 3$).

5.5. Автоморфизмы в двумерном случае. В двумерном случае конус ∂O^+ превращается в пару прямых, которые выбором системы координат всегда можно представить в виде $x = \pm t$. Поэтому O^+ одновременно является и симплициальным конусом (симплекс – отрезок) и эллиптическим конусом (шар – отрезок). В этом совпадении заложена исключительность $(A_2, <)$, не всегда сознаваемая авторами, особенно пишущими на философские темы и для наглядности пожелавшими предложить свой оригинальный вывод формул пространственно-временных преобразований. В этом же совпадении причина того, что до теоремы Александрова (первая фраза теоремы 3) дошли так поздно: ведь согласно теореме 6 симплициальная кинематика допускает нелинейные автоморфизмы, поэтому для получения линейных лоренцовых преобразований в двумерном случае необходимо заранее предполагать линейность!

Как сказано, в $(A_2, <)$ всегда имеется линейная однопараметрическая группа причинных автоморфизмов, очевидно изоморфная расширенной группе Лоренца, но выглядеть она может неузнаваемо. Например, рассмотрим линейные метрические автоморфизмы (5.2.7) в их ограничении на плоскость (t, x) (координаты (1.2.5)). Прямые выкладки дают с учетом (1.2.7)

$$\begin{cases} nt' = t\left((n-1)\lambda + \lambda^{1-n}\right) + x(n-1)\left(\lambda^{1-n} - \lambda\right), \\ nx' = t\left(\lambda^{1-n} - \lambda\right) \quad + x\left(\lambda + (n-1)\lambda^{1-n}\right), \end{cases} \tag{5.5.1}$$

а эти преобразования сохраняют инвариант

$$(t - x)(t + (n-1)x), \tag{5.5.2}$$

который есть частный случай (2.2.12) для КНН$_{4,1}$. (Общий случай был бы получен, если бы мы рассматривали преобразования в другой 2-плоскости.)

КНН$_{4,1}$ очевидно изоморфна лоренцовой КНН$_{2,1}$, см.

(2.2.13), но ее интерпретация в записи $\tau = \sqrt{(c_1 t - x)(c_2 t + x)}$ как модели, где скорости света по противоположным направлениям различны, настолько соблазнительна, что подобные инварианты предложены всеми, кто писал о (двумерной) анизотропии [13, 33,53]. Я вспоминаю, что около 1951 г. такого рода формулы показывал мне А.И.Попов, тоже критикуя основы теории относительности. Рассуждениями доказательства теоремы 7 нетрудно обнаружить, что из метрики (2.2.12) можно получить новую кинематическую метрику

$$\tau(t, x) = \left(\frac{c_2 t + x}{c_1 t - x}\right)^{\alpha} \sqrt{(c_1 t - x)(c_2 t + x)}\ , \tag{5.5.3}$$

действительно найденную Петрышиным и переходящую в орициклическую (2.2.5) при $c_1 = c_2$. В его записи соответствующие преобразования (автоморфизмы) выглядят так ($\alpha := \frac{\varkappa}{2}$):

$$\begin{cases} t' = \left(1 - \frac{v}{c_1}\right)^{\alpha - 1/2} \left(1 + \frac{v}{c_2}\right)^{-\alpha - 1/2} \left(t + \frac{vx}{c_1 c_2}\right) \\ x' = \left(1 - \frac{v}{c_1}\right)^{\alpha - 1/2} \left(1 + \frac{v}{c_2}\right)^{-\alpha - 1/2} \left(vt + \left(1 + \frac{c_1 - c_2}{c_1 c_2}\right) x\right). \end{cases} \tag{5.5.4}$$

Никто из авторов этого направления не получил формул для случая, когда размерность больше двух.

Теорема 20. Группа преобразований Петрышина (5.5.4), являющихся метрическими автоморфизмами кинематической метрики (5.5.3), изоморфна связной компоненте двумерной группы Лоренца. Орициклическая кинематика в двумерном случае изоморфна лоренцовой (не считая отражения $t \to t$, $x \to -x$, не входящего в связную компоненту).

Доказательство. Преобразованием координат

$$\begin{cases} \tilde{x}\, 2\sqrt{c_1 c_2} = (c_1 + c_2)\, x \\ \tilde{t}\, 2c\sqrt{c_1 c_2} = 2c_1 c_2 t + (c_1 - c_2)\, x\ , \quad c = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \end{cases} \tag{5.5.5}$$

переводим (5.5.3) в орициклическую форму

$$\tau(\tilde{t}, \tilde{x}) = \left(\frac{c\tilde{t} + \tilde{x}}{c\tilde{t} - \tilde{x}}\right)^{\alpha} \sqrt{c^2 \tilde{t}^2 - \tilde{x}^2}\ . \tag{5.5.6}$$

Тогда автоморфизмы (5.5.4) принимают вид

$$\begin{cases} \tilde{t}' = \left(1 - \frac{v}{c}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{v}{c}\right)^{-\alpha} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\tilde{t} + \frac{v\tilde{x}}{c^2}\right) \\ \tilde{x}' = \left(1 - \frac{v}{c}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{v}{c}\right)^{-\alpha} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(v\tilde{t} + \tilde{x}\right)\ , \end{cases} \tag{5.5.7}$$

и, если обозначить через h_v гомотетию

$$(\tilde{t}, \tilde{x}) \mapsto \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c}\right)^{\alpha} (\tilde{t}, \tilde{x})\ , \tag{5.5.8}$$

через p_v – автоморфизмы (5.5.7), а через ℓ_v – лоренцово преобразование, то $p_v = h_v \circ \ell_v$. Осталось проверить, что это представление сохраняется при суперпозиции (групповом законе). Но для этого достаточно вспомнить закон суперпозиции $v = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}$ при лоренцовых преобразованиях, что при гомотетиях коэффициенты растяжения перемножаются, и применить тривиальную формулу

$$\frac{(1-v_1)(1-v_2)}{(1+v_1)(1+v_2)} = \frac{1-(v_1+v_2)/v_1v_2}{1+v_1v_2(v_1+v_2)} .$$

Хотя данная теорема очевидна из общих соображений, мы не пожалели места на явное доказательство, потому что слишком много работ посвящено "обобщениям" преобразования Лоренца такого вида. В n-мерном случае при $n > 2$ в принципе невозможно получить ничего, кроме формул Лоренца, если стать на путь рассмотрения преобразований в двумерном направлении и затем варьировать направления. Отсылая за общей теоремой к работе А.Д. Александрова, обратимся к примерам. В той же симплициальной кинематике ограничение общей группы автоморфизмов на 2-плоскость приняло такой хороший вид (3.3.1) только из-за "подгаданного" выбора этой плоскости. Если бы мы провели через ось темпорат 2-плоскость общего положения ω, не проходящую ни через одно ребро конуса O^+, то обнаружили бы, что вообще нет автоморфизмов ξ этой кинематики, при которых ω неподвижна.

В самом деле, возьмем произвольную $(n-1)$-мерную грань ψ конуса $\bar{O}^+$. Плоскость ω пересекает ее по некоторой прямой, по условию не совпадающей ни с одним ребром. Следовательно, в гиперплоскости ψ имеются n неподвижных прямых ($n-1$ ребер и $\omega \cap \psi$) при всяком автоморфизме ξ, так что $\xi = 1$.

Аналогично, в еще более богатой автоморфизмами орициклической КИН$_{2,4}$ нет автоморфизма, который бы сохранял 2-плоскость ω, проходящую через ось темпорат и не проходящую через выделенный в этой кинематике вектор $A \in \partial O^+$. В самом деле, вспомним, что автоморфизмы этой кинематики отличаются от лоренцовых вращений разве лишь множителями (гомотетиями). Прямая λA неподвижна, поэтому неподвижна некоторая проходящая через нее гиперплоскость ψ (ортогональная A в лоренцовом смысле). Она касается ∂O^+ и потому единственная неподвижная на ней прямая может быть λA, но должна быть неподвижна также $\omega \cap \psi$, чем доказано утверждение.

§6. КРИВЫЕ (МАТЕРИАЛЬНЫЕ ТОЧКИ) В КИНЕМАТИКАХ

6.1. Общие определения. Мы проводим последовательное изучение свойств как дифференцируемых, так и негладких кривых в разных классах кинематик, сравнивая галилеевы возможности-концепции с лоренцовыми и с анизотропными. Интерпретацию мы доведем до векторов энергии-импульса, в связи с чем придется затронуть "законы" сохранения. Геометрически, кроме векторной функции одного переменного (кривая), можно рассматривать векторную функцию нескольких переменных (теория поверхностей, теория перемещения стержня, теория перемещения пластины) или бивекторную функцию (теория электромагнетизма), но по соображениям объема мы этого здесь не делаем. Особый интерес представляют сферы в анизотропном пространстве, а также конгруэнция кривых – "ток вещества". По-видимому, я дополню эти "дополнительные главы".

Геометрически различаются "путь" и "кривая", они могут быть дифференцируемыми, могут не быть. Могут согласовываться с отношением порядка (его замыканием), могут не согласовываться. В рассмотрение можно включать конечные точки кривой, можно не включать. От последнего усложнения мы заранее избавляемся, ограничиваясь только "дугами" кривых $[p,q]$. Вот серия основных определений:

Определение 1. Путь γ есть непрерывное отображение $\gamma : [\alpha,\beta] \to A_n$, где $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Говорим, что γ и γ' эквивалентны, если найдется сюръективный гомеоморфизм $\omega : [\alpha,\beta] \to [\alpha,\beta]$, взаимно сохраняющий порядок ($s < t \Leftrightarrow \omega s < \omega t$), при котором $\gamma' = \gamma \circ \omega$. Фактормножество всех путей по этому отношению эквивалентности называется кривой; обозначаем ее γ – конкретным представителем (конкретной параметризацией) в этом классе путей.

Определение 2. Кривая γ называется изотонной в $\langle A_n, < \rangle$, если $s < t \Rightarrow \gamma s < \gamma t$. Она называется каузальной, если $s < t \Rightarrow \gamma t \in \overline{(\gamma s)}^+$, и гранично-изотонной, если $s < t \Rightarrow \gamma t \in \partial(\gamma s)^+$. Всюду подразумевается $\forall s,t \in [\alpha,\beta]$. Соответствующие классы кривых $\omega(<)$, $\omega(\leqslant)$ и $\omega(\partial<)$.

Все три условия согласуются с определением эквивалентности, так что определение 2 корректно. Ясно, что мыслимые классы кривых этим не исчерпываются. Например, можно образовать токой класс: γ — для всяких $s,t\in[\alpha,\beta]$ найдется положительный вектор $A\in O^+$, к которому перпендикулярна прямая $\gamma s\gamma t$. Эти кривые можно было бы назвать "тахионами", но мы их изучать не будем.

Теорема 1. Во всякой (соответственно эйнштейновой) аффинной кинематике образ $\gamma([\alpha,\beta])$ всякого изотонного (соответственно каузального) пути γ есть линейно упорядоченное отношением следования $<$ (соответственно предельного следования $\leqslant$) связное множество, причем все эквивалентные пути имеют один и тот же образ. Отображение γ есть взаимно-изотонный гомеоморфизм $[\alpha,\beta]$ на $\gamma([\alpha,\beta])$. Обратно, всякое связное и линейно упорядоченное относительно $<$ (соответственно $\leqslant$) множество в $(A_n,<)$ является образом некоторого изотонного (соответственно каузального) пути.

Для доказательства достаточно рассмотреть координатное представление.

Интерпретацию такого рода кривые ассоциируются с материальными точками, т.е. с непротяженными, но длящимися процессами. "Процесс" означает, что из любых двух событий (состояний процесса) одно может причинно воздействовать на другое (непосредственно или опосредованно, через промежуточные события), а связность отвечает физическому представлению, что процесс длится "непрерывно", "без дыр". В этом понимании тахионы являются не процессом, а мгновенным состоянием некоего тонкого стержня.

Определение 3. Касательным в $p=\gamma s$ вектором к пути γ называется $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\gamma s\gamma(s+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, обозначается $\gamma_* s$. Касательным в $p=\gamma s$ лучом к кривой $\gamma([\alpha,\beta])$ называется предельный луч $\lambda\lim\frac{1}{\varepsilon}\gamma s\gamma(s+\varepsilon)$, $\lambda>0$. Путь называется дифференцируемым в точке p, если он имеет касательный вектор в $p=\gamma s$ и $\gamma_* s\neq 0$. Дифференцируемые пути называются эквивалентными, если указанный в определении 1 гомеоморфизм является диффеоморфизмом. Так как касательные векторы всех эквивалентных путей лежат на одном луче, то корректны такие дефиниции: кривая называется времениподобной в точке $p=\gamma s$, если $\gamma_* s\in O^+$; называется гладкой каузальной, если $\gamma_* s\in\overline{O^+}$; и называется световой, если $\gamma_* s\in\partial O^+$. Если тип кривой один и тот же для всех $s\in[\alpha,\beta]$, то соответственно именуем всю кривую. Эти классы обозначаем $\Omega(<)$, $\Omega(\leqslant)$ и $\Omega(\partial<)$.

Определение 4. Параметризацию s гладкого пути γ в точке $p=\gamma s$ называем натуральной, если: 1) кинематика метрическая и 2) в ее метрике выполняется $\tau(\gamma_* s) = 1$. Если параметризация натуральна на всем $[\alpha, \beta]$, то $\int_\alpha^\beta ds$ называем длиной дуги кривой γ от $\gamma\alpha$ до $\gamma\beta$ и обозначаем $\operatorname{arcl}(\gamma; \alpha, \beta)$.

Теорема 2. Во всякой метрической аффинной кинематике у любой временноподобной кривой γ существует длина дуги и при произвольной параметризации t выполняется

$$\operatorname{arcl}(\gamma; \alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \tau(\gamma_* t)\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{h_{ik}(\gamma_*)\, \gamma_*^i \gamma_*^k}\, dt. \quad (6.1.1)$$

Доказательство очевидно, вторую половину формулы см. (3.2.5). Обычно (6.1.1) принимается за определение длины дуги невременноподобных кривых также. Ср. определение 8 и теорему 25 ниже. Для независимости $\operatorname{arcl} \gamma$ от параметризации необходима и достаточна, как видно из (6.1.1), положительная однородность τ, что есть в векторных и отсутствует в трансляционных кинематиках. Интерпретацию значению этого интеграла понимается как собственное время наблюдателя γ от даты $\gamma\alpha$ до даты $\gamma\beta$.

Теорема 3. Во всякой эйнштейновой кинематике в канонической координатной системе любая кривая γ представляется в виде $\gamma t = (t, \bar{x}(t))$, где $\bar{x}$ – произвольная непрерывная функция $[\alpha, \beta] \to E_{n-1}$. При этом требование изотонности равносильно $\|\bar{x}(t_2) - \bar{x}(t_1)\| < t_2 - t_1$, требованию каузальности – условию $\|\bar{x}(t_2) - \bar{x}(t_1)\| \le t_2 - t_1$; а для гранично-изотонных кривых $\|\bar{x}(t_2) - \bar{x}(t_1)\| = t_2 - t_1$. Если кривая дифференцируема, то касательная представляется $\gamma_* t = (1, \dot{\bar{x}}(t))$, $\dot{\bar{x}} = \frac{d\bar{x}}{dt}$, причем условие $\|\dot{\bar{x}}\| < 1$ выделяет временноподобные кривые, условие $\|\dot{\bar{x}}\| \le 1$ – гладкие каузальные, а $\|\dot{\bar{x}}\| = 1$ – световые. В канонической метрике длина дуги выражается формулой

$$\operatorname{arcl}(\gamma; \alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \left(1 - \|\dot{\bar{x}}\|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}} dt, \quad 1 \le \mu < \infty. \quad (6.1.2)$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 3 §1 и определений 2–3.

Величина $\tau(\gamma_*)$ допускает интерпретацию как масса частицы γ. Впрочем, это не общепринятая интерпретация. Чаще (см. [51], 3.1.1) материальной точкой называют пару (m, γ), где m и γ никак не соотнесены.

Определение 5. Если s – натуральная параметризация и в направлении, дополнительном к γ_*, введена метрика, то длина $\frac{d}{ds}\gamma_* = \dot{\gamma}_*$ называется первой кривизной k_1 кривой γ, а единичный вектор n_1 на 2-плоскости $(\gamma_*, \dot{\gamma}_*)$, ортогональный γ_* и образующий на этой плоскости с γ_* положительную ориентацию, называется первой нормалью. Кривизна κ_m и нормаль n_m определяются индуктивно: n_{m+1} ортогонален $(m+2)$-плоскости $(\gamma_*, n_1, \ldots, n_m, \dot{n}_m)$, а κ_m – длина проекции $\dot{n}_m$ на n_{m+1}, $(n_0 = \gamma_*)$.

Обычно в регулярных кинематиках мы за метрику будем принимать ту, которая задается "тензором" $h(\gamma_*)$, так что "ортогонален" здесь значит $h_{ik}(\gamma_*) X^i Y^k = 0$. В галилеевом случае – заданную по (5.2.2). Производную по s обозначаем точкой сверху. Исходя из определения 4 и (3.2.5), получаем теорему 4.

Теорема 4. В регулярной кинематике $\gamma_* \dot{\gamma}_* = 0$ и $h_{ik}(\gamma_*) n_m^i \dot{n}_m^k = 0$, а также $h_{ik}(\gamma_*) n_m^i n_\ell^k = 0$ при $m \neq \ell$.

Доказательство тривиально. Полезно помнить, что согласно теореме 5 §3 значения $h(\gamma_*)$ на всех X, ортогональных γ_*, отрицательны, поэтому, в частности, из $\dot{\gamma}_* = \lambda\gamma_* + \kappa_1 n_1$ следует $h_{ik}(\gamma_*) \dot{\gamma}_*^i n_1^k = -\kappa_1$ и т.п.

6.2. Дифференцируемые кривые в галилеевом мире. В галилеевой кинематике большинство выше введенных априорных классов кривых пусто – по физическим соображениям. Например, у граничной изотонной должно было бы быть $t = const$ вдоль нее, что соответствовало бы бесконечно большой (и значит исключенной!) скорости; см. §0.2. Представляют интерес лишь изотонные кривые $(t, \bar{x}(t))$, как в случае, когда $\bar{x}$ произвольная непрерывная функция, так и когда $\bar{x}$ произвольная дифференцируемая функция ("временноподобная", хотя такая терминология редка в галилеевом случае). Длина дуги $[\alpha, \beta]$ такой кривой (6.1.1) всегда равна $t_\beta - t_\alpha$. Это относится и к КИП$_{1,2}$, оснащенной дополнительно структурой (5.2.2) евклидова пространства на E_{n-1}. Функции в (5.2.3) можно трактовать как "переносное движение" произвольного вида. Мы ограничимся 4-мерным случаем.

Теорема 5. В галилеевой кинематике в натуральной параметризации для всякой кривой класса C^4 имеют место формулы Френе

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_* = \kappa_1 n_1 \\ \dot{n}_1 = \kappa_2 n_2 \\ \dot{n}_2 = -\kappa_2 n_1 + \kappa_3 n_3 \\ \dot{n}_3 = -\kappa_3 n_2 \end{cases} \tag{6.2.1}$$

Доказательство проводится в рамках полуевклидовой геометрии, и формулы отличаются от евклидовых и псевдоевклидовых. Существенно, что все нормали, содержась в единственном "абсолютно одновременном" гиперпространстве, ортогональны касательной, а потому ортогональны ей и их производные.

Теорема 6. В галилеевой кинематике всякой дифференцируемой материальной частице $\gamma \subset A_4$ взаимнооднозначно с точностью до евклидовых автоморфизмов соответствуют пара: скалярная функция от времени $\kappa_1(t)$ и кривая в 3-мерном евклидовом пространстве $\bar{x}(t) \subset R_3$.

Доказательство. По кривой находим ее скалярные функции κ_1, κ_2, κ_3. По функциям $\kappa_2(t)$ и $\kappa_3(t)$ в силу теоремы Дарбу для трехмерного евклидова пространства R_3 однозначно с точностью до переноса-поворота строится кривая в R_3, у которой κ_2 является кривизной, κ_3 – кручением, а t есть длина дуги. Необходимым и достаточным условием существования такой кривой по теореме Дарбу являются выполнение уравнений

$$\begin{cases} \dot{\nu}_1 = \kappa_2 \nu_2 \\ \dot{\nu}_2 = -\kappa_2 \nu_1 + \kappa_3 \nu_3 \\ \dot{\nu}_3 = -\kappa_3 \nu_2 \end{cases}, \tag{6.2.2}$$

а в силу (6.2.1) они выполнены. Обратно, если имеется кривая $\bar{x}(t) \subset R_3$, то она удовлетворяет (6.2.2) и в R_3 по ней однозначно строится функция $\dot{\gamma}_* = \kappa_1 n_1$, если задана $\kappa_1(t)$, а по $\dot{\gamma}_*$ – кривая $\gamma \subset A_4$.

Интерпретация. Никогда не будучи сформулированной в явном виде, эта теорема по сути была известна еще в XVIII в. Кривая в R_3 трактовалась как траектория материальной точки, а функция κ_1 – как сила, действующая на нее. Действительно, видно, что проекция $\ddot{\bar{x}}$ на направление n_1 равна κ_1. Таким образом, в рамках ньютоновой динамики κ_1 есть сила, действующая в направлении n_1, а это направление есть касательное к трехмерной траектории направление. Расщепление материальной точки на силу, действующую на нее, и траекторию ее в трехмерном пространстве нелинейность преобразований (5.2.3) практически не мешает. Нелинейное слагаемое $\bar{x}' = \dot{w}(t) + \bar{x}$ можно трактовать как переносное движение, т.е. как траекторию, аддитивно добавляемую к первоначальной траектории. Именно так поступают в теории переносного и относительного движений.

6.3. Недифференцируемые кривые в галилеевом мире. Если отказаться от ограничения дифференцируемыми кривыми, то в галилеевом мире возможны странные кривые. Сначала напомним, что в галилеевой кинематике в силу (1.2.1) функция $(t, \bar{x}(t))$ является изотонной кривой при любой непрерывной $\bar{x}(t) \subset E_{n-1}$.

Теорема 7. В галилеевой кинематике существует почти везде дифференцируемая изотонная кривая γ, у которой $\gamma_* = const$ во всех точках существования, но $\gamma\alpha \neq \gamma\beta$. Иначе: в галилеевом пространстве-времени возможно такое механическое перемещение частицы γ, что 1) во всякий момент времени (за исключением множества лебеговой меры нуль) частица γ имеет мгновенную скорость $\bar{v}$; 2) в каждой точке, где эта скорость существует, она равна нулю, $\bar{v} = 0$; 3) частица не покоится, а перемещается на любое конечное расстояние за конечный промежуток времени без нарушения причинной упорядоченности.

Доказательство. Известна "канторова лестница" $w(t)$. Это такое сюръективное отображение $w:[0,1] \mapsto [0,1]$, которое непрерывно, не убывает ($s < t \Rightarrow w(s) \leq w(t)$), имеет производную w' всюду за исключением множества лебеговой меры ноль и в точках существования $w' = 0$, но $w(1) - w(0) > \int_0^1 w'(t)dt = 0$, ибо $w(0) = 0$, $w(1) = 1$. Возьмем теперь частицу $\gamma(t) = (t, \bar{x}_0 w(\frac{t}{t_0}))$, где t_0 произвольная константа, а $\bar{x}_0$ произвольный постоянный вектор. Тогда почти везде существует скорость частицы γ и она равна нулю, ибо $\gamma_* t = (1,0)$ во всех точках существования. Но за промежуток времени от нуля до t_0 эта точка перемещается из 0 в $\bar{x}_0$.

В XVIII–XIX в.в. физики не знали о существовании недифференцируемых кривых. В XX в. они не интересовались галилеевым пространством-временем. Поэтому ни они, ни философы не обсуждали такие патологические механические перемещения.

6.4. Дифференцируемые кривые в эйнштейновых кинематиках. При ограничении дифференцируемыми кривыми совпадут два важных класса из шести, введенных в 6.1.

Теорема 8. Класс гранично-изотонных дифференцируемых кривых содержится в классе световых кривых для всякой эйнштейновой кинематики, т.е. $\omega(\partial<) \cap C^1 \subset \Omega(\partial<)$.

В самом деле, по определению 2 $t < t' \Rightarrow \gamma t' \in \partial(\gamma t)^+$, а по определению 3 касательный в точке γt луч получается пределом лучей $\gamma t \gamma t' = \gamma t' - \gamma t$, каждый из которых содержится в $\partial(\gamma t)^+$. В силу замкнутости $\partial(\gamma t)^+$ тогда $\gamma_* t \in \partial(\gamma t)^+$, ч.т.д.

Теорема 9. Класс каузальных дифференцируемых кривых содержится в классе гладких каузальных для всякой эйнштейновой кинематики, т.е. $\omega(\leqslant) \cap C^1 \subset \Omega(\leqslant)$.

Доказательство повторяет предыдущее с заменой $\partial(\gamma t)^+$ на

$\overline{(\gamma t)^+}$. Существенно лишь существование касательного луча.

Теорема 10. Класс гладких каузальных кривых содержится в классе каузальных кривых для всякой эйнштейновой кинематики, у которой каноническая норма $\|\bar{x}\|$ (в каком-либо координатном представлении) дифференцируема, т.е. $\Omega(\leqslant) \subset \omega(\leqslant) \cap C^1$, а класс времениподобных — в классе изотонных, т.е. $\Omega(<) \subset \omega(<) \cap C^1$.

Доказательство. Пусть $\gamma t = (t, \bar{x}(t))$. Согласно теореме 3 $\|\frac{dx}{dt}\| \leqslant 1$ в любой канонической системе координат. По условию существует $\frac{d\|x\|}{dx}$, а по выпуклости нормы $\|x+dx\| - \|x\| \leqslant \|dx\|$ и потому из $\|\frac{dx}{dt}\| \leqslant 1$ следует $\frac{d\|x\|}{dt} \leqslant 1$. Значит, $\|x(t)\| - \|x(t_1)\| = \int_{t_1}^{t} \frac{d\|x\|}{dt}\,dt \leqslant t - t_1$. Выбирая начало координат в $x(t_1)$, получим неравенство $\|x\| \leqslant t$, чем по теореме 3 доказана каузальность γ. Если γ времениподобна, то $\gamma_* \notin \partial C^+$ и тогда в силу теоремы 8 γ не может быть гранично-изотонной ни в одной точке, а будучи по доказанному каузальной, она, следовательно, изотонна. Включения в теореме 3 и последнее в теореме 10 нельзя обратить, что доказывается предъявлением примера дифференцируемых изотонных кривых, являющихся световыми в некоторых точках $\gamma t = (t, \sin t, 0, 0)$ или во всех точках, как у кривых из рубрики 6.5.

Теорема 11. В 4-мерной регулярной (в частности, в лоренцовой) кинематике любая времениподобная кривая γ класса C^4 в натуральной параметризации удовлетворяет уравнениям Френе,

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_* = & k_1 n_1 & & \\ \dot{n}_1 = k_1 \gamma_* & & + k_2 n_2 & \\ \dot{n}_2 = & - k_2 n_1 & & + k_3 n_3 \\ \dot{n}_3 = & & - k_3 n_2 & \end{cases} \qquad (6.4.1)$$

В лоренцовой кинематике функции $k_1(s)$, $k_2(s)$ и $k_3(s)$ определяют кривую γ однозначно с точностью до автоморфизмов псевдоевклидова 4-пространства (5.2.4-5).

Доказательство следует обычным приемам дифференциальной геометрии и опирается на определение 5.

Следствие. В специальной теории относительности нельзя говорить о трехмерных траекториях материальных точек (частиц).

В самом деле, из (6.4.1) видно, что три нормали (ортогональные касательному вектору γ_*) не образуют замкнутого относительно дифференцирования трехмерного пространства, так что функциям k_1 и k_3 невозможно сопоставить инвариантно никакой трехмерной кривой, вопреки ситуации в галилеевой кинематике, ср. (6.2.2). Можно было бы попробовать перейти к собственному пространству $\gamma_* \wedge A_4$ наблюдателя γ_* и рассмотреть уравнения относительно $\gamma_* \wedge n_1$, $\gamma_* \wedge n_2$ и $\gamma_* \wedge n_3$. Тогда, действительно, слагаемое с линейной функцией κ_1 выпадет из уравнения для $\frac{d}{ds}(\gamma_* \wedge n_1)$, но из-за того, что γ_* переменна, оно появится в уравнениях для $\frac{d}{ds}(\gamma_* \wedge n_i)$ при $i = 2,3$. Все упирается в тот факт, что в лоренцовой кинематике собственное пространство наблюдателя, движущегося с переменной скоростью, само переменно. Впрочем, K_1 принято по-прежнему называть "силой".

В анизотропном случае мы ничего не можем сказать о справедливости теоремы Дарбу, т.е. последней фразы в теореме 11. Обратим внимание, что в анизотропном случае, если у нас имеются две кривые γ и μ, то ассоциированные с ними "тензоры" $h(\gamma_*)$ и $h(\mu_*)$ совершенно разные, и одна и та же пара векторов, ортогональных относительно γ_*, может не быть ортогональной (или единичной длины и т.п.) относительно μ_*.

Исходя из формулы (6.1.1), естественно рассмотреть функционал

$$L(\gamma; p, q) = \int_{s_0}^{s_1} \tau(\gamma_*) \, ds, \qquad p = \gamma\alpha, \quad q = \gamma\beta, \qquad (6.4.2)$$

когда кривые γ берутся из какого-нибудь фиксированного класса Γ.

Теорема 12. В лоренцовой кинематике при $p \ll q$ функционал (6.4.2) достигает в классе $\Gamma = S\ell(\iota)$ гладких каузальных максимума на времениподобной прямой, соединяющей p и q, и только на ней. Эта экстремаль удовлетворяет уравнению Эйлера, и через точку $p \in \Lambda_4$ в данном направлении $X \in \mathcal{O}^+$ проходит единственная экстремаль. Тот же функционал в том же классе достигает минимума, равного нулю, на световой изотропной кривой, не удовлетворяющей уравнению Эйлера. При $q \in \partial p^+$ функционал (6.4.2) тождественно обращается в нуль как на кривых, удовлетворяющих уравнению Эйлера, так и на неудовлетворяющих.

Доказательство. Уравнения Эйлера $\frac{\partial \tau}{\partial p^i} = \frac{d}{ds}\frac{\partial \tau}{\partial X^i}$ в силу независимости метрики τ от p принимают вид $\frac{\partial \tau(X)}{\partial X^i} = \mathrm{const}$, а так как для лоренцовой кинематики $h_{ik}(X) = g_{ik}$, то по (3.2.5) $g_{ik}\frac{dp^k(s)}{ds} = a_i$, что при выборе натуральной параметризации вдоль γ и ортонормальном базисе даст $\dot{x}^i(s) = a^i$, т.е. линейные уравнения $x^i = a^i s + b^i$. При этом всякая времениподобная прямая допускает малую вариацию в классе гладких каузальных кривых, при которой (вариации) эта прямая оказывается внутренней точкой; этим оправдано применение уравнений Эйлера. С учетом условия Лежандра и (2.7.1) отсюда следует первая часть теоремы. Ясно, что если существует изотропная световая кривая, она не допускает вариации в классе гладких каузальных, при которой она оказалась бы внутренней точкой среди вариаций: ведь при сколь угодно малой вариации световая касательная сделается уже пространственноподобной либо же кривая останется на границе вариации. Поэтому, хотя на всякой световой $L(\gamma)=0$, логика получения уравнений Эйлера к световой изотропной неприменима. Ясно, что ни одна прямая не может быть одновременно и световой и изотропной, поэтому такая кривая и не может удовлетворять уравнению Эйлера. Реально такие кривые будут предъявлены и изучены в следующей рубрике (теорема 18). Этим доказана вторая часть теоремы. Третья часть теоремы очевидна.

Так хорошо обстоит дело только в лоренцевом случае КИП$_{21}$. В галилеевой кинематике уравнения Эйлера ничего не дают, функционал (6.4.3) ничего не выделяет.

Теорема 13. В галилеевой кинематике функционал (6.4.3) достигает в классе дифференцируемых времениподобных кривых минимума на любой кривой из этого класса и всегда $L(\gamma)p,q) = \tau(p,q) = t_q - t_p$.

Доказательство очевидно.

Отсюда следует, что функционал (6.4.2) в галилеевой кинематике на самом деле постоянен по кривым, зависит только от начала и конца пути. "Ход времени" не зависит от способа перемещения точек, тел, наблюдателей. Именно из-за привычки к такой модели мышления, обнаружив неконстантность этого функционала в лоренцевой кинематике, стали говорить о "парадоксах" близнецов и т.п.

С другой стороны, сравнение теорем 12 и 13 еще раз показывает, что в галилеевой кинематике прямолинейное, инерциальное движение никак не выделено, тогда как в релятивистской – выделено, является привилегированным. Можно еще раз напомнить сказанное в 5.2: классическая галилеево-ньютонова механика обладала тем дефектом, что не умела в принципе отличать инерциальное перемещение от ускоренного (хотя очень нуждалась в этом умении!). Только с созданием модели пространства-времени, в которой отношение порядка не вырождено (см. определение 6 81), удалось избавиться от этого, указанного Борном, недостатка; увы, даже создатель такой модели не понимал, что он, собственно, сделал.

В анизотропной эйнштейновой кинематике тоже есть неожиданности.

Теорема 14. В регулярной эйнштейновой кинематике при $p < q$ функционал (6.4.2) достигает в классе гладких каузальных максимума на времениподобной прямой, соединяющей p и q, и только на ней. Эта экстремаль удовлетворяет уравнению Эйлера, и через точку p в предписанном направлении $X \in O^+$ проходит единственная экстремаль. Если сопрягающее отображение h вырождается, то число кривых, на которых достигается максимум, возрастает, экстремаль может не быть прямолинейной. В частности, для кинематики с канонической метрикой КИН$_{3,1}$ в случае, когда тело $\|x\| = 1$ имеет плоскую грань (ребро), множество экстремалей, удовлетворяющих уравнению Эйлера, проходящих через заданную точку в данном направлении, заполняет область в линейном пространстве размерности этой грани (т.е. на единицу меньшей, чем размерность грани конуса O^+).

Доказательство. Как в лоренцовой кинематике, получаем $\partial_i \tau = const$, что в случае обратимости сопрягающего отображения (3.2.1) однозначно дает $\frac{dp^i}{dt} = h^{ik} a_k$, а в случае нерегулярности сюда добавляется еще ядро отображения h. Осталось применить теорему 8 §3.

Например, на КИН$_3$ в координатах (1.2.5) введем каноническую метрику (2.2.7) при $n = 3$. Имеем

$$\|(x, y)\| = \max\{x + y, y - 2x, x - 2y\}. \quad (6.4.3)$$

Уравнениям Эйлера очевидно удовлетворяет любая кривая $(t, x(t), y(t))$ при $\dot{x} > 0$, $\dot{y} > 0$, $\dot{x} + \dot{y} = const < 1$, ибо

$$\tau = \sqrt{t^2 - (\max\{\dot{x} + \dot{y}, \dot{y} - 2\dot{x}, \dot{x} - 2\dot{y}\})^2} \quad (6.4.4)$$

имеет одно и то же значение на всех таких кривых (включая прямые $ax = by = t$ с $a > 0$, $b > 0$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$). См. рис. 10. Наглядно это означает, что частица,

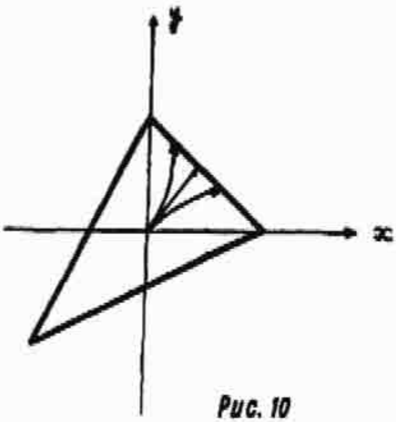


Рис. 10

выходящая из нуля в направлении к грани $x+y=1$, словно бы обладает свободой воли, но обязана двигаться единственным детерминированным образом, но может равновероятно перемещаться любым из однопараметрического семейства разрешенных движений $(t,\ x(t),\ at - x(t))$ при $0 < \dot{x} < a$.

Одна из формулировок принципа детерминизма гласит, что движение материальной точки однозначно определено, если известны ее начальное положение и скорость (или ее лагранжиан). В анизотропном случае, как видим, эта формулировка может нарушаться. Фронт световой волны в нашем примере содержит прямолинейный участок, принцип наименьшего действия сохраняется, но всякая материальная точка, брошенная в направлении этого участка, словно бы приобретает дополнительную степень свободы параллельно этому участку. Подчеркнем, что этот эффект чисто метрический, а не каузальный. Если на том же причинном конусе $КИИ_5$ взять симминимальную метрику $КИИ_{5,1}$, то согласно теореме 10 §3 никакого вырождения не будет, никакой свободы выбора движения не появится, движение будет происходить по прямой.

6.5. Вращающиеся фотоны. Предъявим кривые, упомянутые во второй части теоремы 12, и изучим их. Имея в виду физические применения, удобнее явно выписывать скорость света $c \neq 1$, так что $g_{\alpha\alpha} = -c^2$, $2 \leq \alpha \leq 4$. Удобно также перейти к полярным координатам $\bar{x} = (r\sin\vartheta\cos\varphi,\ r\sin\vartheta\sin\varphi,\ r\cos\vartheta)$.

Теорема 15. Световые изотонные (во всех точках, в лоренцовой кинематике) это те и только те кривые $\gamma \in C^1$, которые одновременно удовлетворяют условиям

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = c^2, \tag{6.5.1}$$

$$(r_2-r_1)^2 + 2r_1r_2\left(1+\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\right) < c^2(t_2-t_1)^2, \tag{6.5.2}$$

причем знак неравенства всегда строгий. Это прямо следует из теоремы 3.

Теорема 16. Существует решение (6.5.1–2), причем подходящим выбором системы координат каждая такая кривая может быть представлена в виде

$$\gamma^t = (t,\ r_0\cos\eta t,\ r_0\sin\eta t,\ 0), \qquad \eta = \frac{c}{r_0}. \tag{6.5.3}$$

Доказательство. Рассмотрим проекцию $\tilde{\gamma} = (t,\ 1,\ \vartheta(t),\ \varphi(t))$ кривой $\gamma = (t, r, \vartheta, \varphi)$ на сферу единичного радиуса вдоль радиус-вектора. Через $\rho_{1,2}$ обозначим расстояние между точками (ϑ_1, φ_1).

$=(\vartheta(t_1), \varphi(t_1))$ и (θ_2, φ_2) на единичной сфере. По теореме косинусов сферической тригонометрии $\cos\rho_{12} = \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_1 - \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_2-\varphi_1)$ и потому из (6.5.2) следует

$$(\tau_2-\tau_1)^2 + 4\tau_1\tau_2 \sin^2\frac{\rho_{12}}{2} < c^2(t_2-t_1)^2 , \tag{6.5.4}$$

причем, так как (6.5.2) при $t_2-t_1 \to 0$ переходит в (6.5.1), для $\tau = 1$, и мы получаем элемент длины на единичной сфере, то имеем $\frac{d\rho}{dt} = c$. Это означает, что длина ρ кривой $\tilde{\gamma}$ линейно зависит от t, т.е., в частности, $\rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}$. Но последнее означает, что $\tilde{\gamma}$ является геодезической на сфере, т.е. дугой большого круга. Так как такая кривая целиком лежит в двумерной плоскости, проходящей через центр, то и вся исходная γ содержится в этой же плоскости. Если обозначить через $\bar{a} \in P_3$ единичный вектор, ортогональный этой плоскости и надлежаще ориентированный, то евклидовым поворотом, при котором $\bar{a}$ переходит в орт оси аппликат (достаточно в (5.2.3) положить $\bar{\alpha} = \frac{\arccos a_3}{\sqrt{1-a_3^2}}\, \bar{a} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$), достигаем того, что плоскость вращения есть (x, y), т.е. $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, а ось вращений – ось z и вращение положительно ориентировано. При этом уравнение (6.5.1) превращается в $\dot{\tau}^2 + \tau^2\dot{\varphi}^2 = c^2$, т.е. дает либо эллипс, либо прямую. Прямая исключается, как не удовлетворяющая (6.5.2). Следовательно, проекция γ на плоскость (x, y) есть эллипс. Подходящим лоренцовым преобразованием (5.2.4) с $\bar{v} \in R_3$ можно всякий эллипс превратить в окружность: достаточно направить $\bar{v}$ вдоль большей оси и подобрать $|\bar{v}|$ с нужным сжатием. Следовательно, в этой системе координат вдоль нашей кривой $\dot{\tau} = 0$. Обозначая соответствующую константу $\tau = \tau_1$ и замечая, что теперь $\tilde{\gamma} = \gamma$ и потому $\rho = \tau_1 \varphi$, откуда $\varphi = \tau_1 t + \alpha$, где α константа, переносом начала обращаемая в ноль, получаем требуемое (6.5.3).

Определение 6. Изотонные световые кривые называем вращающимися фотонами.

Напомним, что обычным фотоном называется прямолинейная световая гранично-изотонная кривая, в подходящей системе координат имеющая вид $\gamma t = (t, ct, 0, 0)$, что не является частным (предельным) случаем (6.5.3) при $\tau_1 \to \infty$).

Теорема 17. Вращающийся фотон есть материальная точка, которая в среднем движется со скоростью $\bar{v}'$ при постоянном параметре $\bar{v} \in R_3$ и со световой скоростью вращается при этом вокруг оси $\bar{a} \in R_3$ ($\bar{a}^2 = 1$) на расстоянии τ_1. Названная скорость $\bar{v}'$ выражается формулой

$$v' = \frac{\bar{x} + \bar{v}t + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)\left(\frac{\bar{v}(\bar{x}\bar{v})}{v^2} - \bar{x}\right)}{t + \frac{\bar{x}\bar{v}}{c^2}} , \qquad (6.5.5)$$

если в качестве $\bar{x}$ подставлено

$$\frac{x}{\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\eta t - \varphi)\sin\varphi + a_3\left(\sin(\eta t - \varphi)\sin\varphi + \cos\eta t\right) \\ \sin(\eta t - \varphi)\cos\varphi + a_3\left(\sin(\eta t - \varphi)\cos\varphi - \sin\eta t\right) \\ -\sqrt{1 - a_3^2}\cos\eta t \end{pmatrix} \qquad (6.5.6)$$

при обозначении $a_1 = \sqrt{1 - a_3^2}\cos\varphi$, $a_2 = \sqrt{1 - a_3^2}\sin\varphi$, $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Всякая дуга вращающегося фотона имеет ненулевой инвариант

$$\tau(\gamma t_1, \gamma t_2) = \sqrt{(t_2 - t_1)^2 - \frac{4\tau_0^2}{c^2}\sin^2\frac{c(t_2 - t_1)}{2\tau_0}} . \qquad (6.5.7)$$

При фиксированной точке γt_0 класс вращающихся фотонов шестипараметрический, и каждая частица в нем однозначно задается указанием трехмерного вектора $\bar{v}$, единичного трехмерного вектора $\bar{a}$ и скаляра τ_0 .

Доказательство очевидно следует из теоремы 16 (с учетом сказанного в ее доказательстве) и (5.2.4–5).

Мы не знаем, можно ли вместо задания двух векторов $\bar{v}$, $\tau_0\bar{a} \in R_3$ обойтись заданием бивектора $\underline{\underline{f}} \in A_4$.

Для наглядности выпишем вид вращающегося фотона, когда ось вращения – ось z , а параметр $\bar{v}$ направлен вдоль оси абсцисс:

$$\gamma t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(t + \frac{\tau_0 v}{c^2}\cos\frac{ct}{\tau_0},\ vt + \tau_0\cos\frac{ct}{\tau_0},\ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\tau_0\sin\frac{ct}{\tau_0},\ 0\right) \quad (6.5.8)$$

и когда параметр $\bar{v}$ направлен вдоль оси аппликат:

$$\gamma t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(t,\ -\tau_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\sin\frac{ct}{\tau_0},\ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\tau_0\cos\frac{ct}{\tau_0},\ vt\right) . \quad (6.5.9)$$

Теорема 18. Через всякие точки $p < q$ можно провести вращающийся фотон.

В самом деле, достаточно выбрать прямую pq за ось темпорат, в этой системе координат взять кривую (6.5.3) при $2\pi\tau_0 = c(t_q - t_p)$, а затем параллельно перенести ее, чтобы на нее попала точка p . Этою теоремою завершается доказательство теоремы 12.

Обращаясь к интерпретации, вспомним про нейтрино. Говорят, будто бы нейтрино движется со скоростью света, но имеет ненулевую массу покоя. Может быть, экспериментально с ненулевой массой покоя отождествляется как раз конечная величина (6.5.7)? Никакой дефиниции понятия нейтрино в учебнике [51] не дано, поэтому точнее высказаться я не могу. Кроме инварианта (6.5.7) с вращающимся фотоном можно связать и целочисленный инвариант: число n оборотов его между датами t_1 и t_2, т.е.

$$n = \mathcal{E}nt\, \frac{c(t_2 - t_1)}{2\pi r_0} \qquad (6.5.10)$$

и более привычную физикам величину – частоту $\nu = \frac{1}{n}$.

Вращающиеся фотоны – это материальные частицы, которые в собственном пространстве любого наблюдателя движутся по двумерным кривым, занимают плоскость. Как видно, одномерных (в собственном пространстве) дифференцируемых кривых такого рода не существует. Но при отказе от требования дифференцируемости в плоскости $(t, x, 0, 0)$ существуют изотонные кривые, у которых касательная всюду в точках существования – световая; см. книгу [37], где они названы "дикими частицами".

6.6. **Недифференцируемые кривые в эйнштейновых кинематиках.** Дифференцируемых кривых недостаточно для всех требуемых в теории пространства-времени построений. Самый близкий к C^1 класс – класс кусочно-дифференцируемых кривых, имеющих касательную везде, за исключением конечного числа точек. Но и этих "криволинейных ломаных" недостаточно: предел последовательности кусочно-гладких кривых может не быть кусочно-гладкой кривой, см. примеры в книге автора [37]. В то же время мы видели в рубр. 6.3, что расширение класса допустимых кривых до класса почти везде дифференцируемых кривых приводит к неприятным парадоксам. Оказывается, что рассмотрение эйнштейновых кинематик поможет устранить парадокс и уточнить класс кривых.

Сначала напомним некоторые определения и сведения из анализа. Функция $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ называется абсолютно непрерывной, если по любому $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого семейства непересекающихся интервалов $(\alpha_i, \alpha_i + h_i) \subset (\alpha, \beta)$ из $\sum h_i < \delta$ следует $\sum |f(\alpha_i + h_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$. Всякая абсолютно непрерывная функция непрерывна, но не наоборот. Сумма, разность, произведение и частное абсолютно непрерывных функций – абсолютно непрерывны. Суперпозиция абсолютно непрерывных функций, как и предел последовательности их, может не быть абсолютно непрерывна. Суперпозиция дифференцируемой и абсолютно непрерывной функции абсолютно непрерывна. Абсолютно непрерывная функция имеет на отрезке ограниченную вариацию и почти везде (за исключением множества лебеговой меры ноль) имеет интегрируемую по Лебегу производную f', причем

$$f(t)-f(\alpha)=\int_{\alpha}^{t} f'(\xi)\,d\xi \quad . \tag{6.6.1}$$

Последнее равенство можно принять за эквивалентное определение абсолютно непрерывной функции. Другое эквивалентное определение: это функции, удовлетворяющие условию Липшица с показателем единица:

$$|f(t_2)-f(t_1)| \leq a\,|t_2-t_1| \quad . \tag{6.6.2}$$

Еще одно – функции, которые отображают всякое множество меры нуль во множество тоже меры нуль (если при этом функция непрерывна и имеет конечную вариацию). Существуют функции, имеющие производную почти везде, но не являющиеся абсолютно непрерывными, причем для таких функций

$$f(t)-f(\alpha) \geq \int_{\alpha}^{t} f'(\xi)\,d\xi \tag{6.6.3}$$

и хоть где-то знак неравенства строгий (например, канторова лестница из §6.3).

Теорема 19. В эйнштейновой кинематике всякая каузальная кривая в любом каноническом координатном представлении задается абсолютно непрерывными функциями.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 3 и (6.6.2).

Следствие 1. Всякая каузальная кривая в эйнштейновой кинематике может быть координатно представлена в виде

$$\gamma t=\left(t,\ \bar{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\bar{v}(\xi)\,d\xi\right) \quad , \tag{6.6.4}$$

где $\bar{v}(t)$ – скорость, существующая почти везде, за исключением, быть может, множества лебеговой меры нуль на отрезке $[\alpha,\beta]$.

Следствие 2. В эйнштейновой кинематике (все равно – изотропной или анизотропной) не может существовать кривой из теоремы 7, имеющейся в галилеевой кинематике.

В самом деле, для той кривой $\int_{t_0}^{t}\bar{v}\,d\xi=0 \neq \bar{x}(t)-\bar{x}(t_0)$, чем нарушено (6.6.4). Этим мы избавляемся от очень неприятной парадоксальной кривой, но некоторые парадоксы имеются и в эйнштейновой, даже лоренцовой, кинематике.

Теорема 20. Во всякой эйнштейновой кинематике (в том числе в лоренцовой) существует каузальная кривая с непрерывной касательной, почти везде удовлетворяющая условию $\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}=0$, но отличная от прямолинейной $\bar{x}=\bar{a}t+\bar{b}$.

Доказательство. Фиксируем $t_0>0$, $\overline{w}_0$ и рассмотрим кривую $\gamma t=\left(t,\ \bar{w}_0\int_0^{t}\frac{w(\xi)}{w(t_0)}\,d\xi\right)$, $t\leq t_0$, где $w(t)$ – канторова лестница. Интеграл от w существует, и в силу $\int_0^{t} f(\xi)\,d\xi \leq t\max\{f(t)\}$ кривая

γ будет каузальной для всех $0 \le t \le t_0$. Вторая производная существует почти везде и $\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \frac{d\bar{w}}{ds} = 0$, чем завершено доказательство.

Множество каузальных кривых замкнуто относительно операции перехода к пределу, но для доказательства этого факта нам придется припомнить некоторые общетопологические факты.

Если ρ – произвольная метрика Фреше на A_n, а f_i, f – функции $[0,1] \mapsto A_n$, то говорят, что f_i равномерно сходятся к f, если $\sup\{\rho(f_i(t) - f(t)) \mid t \in [0,1]\} \to 0$.

Равномерная сходимость по определению зависит от выбора ρ. У нас нет такой выбранной метрики на A_n; кинематическая метрика τ не обладает свойствами метрики ρ Фреше, не удовлетворяя неравенству треугольника $\rho(p,r) \le \rho(p,q) + \rho(q,r)$, но так как A_n аффинно, то на нем всегда можно выбрать какую-нибудь ρ, например, евклидову. Оказывается ([26], 44.V, теорема 2), что если фиксировать две точки p и q при $p < q$, то в эйнштейновой кинематике, где в силу теоремы 2 §1 замыкание интервала компактно, во множестве всех отображений $[0,1] \to \overline{\langle p,q \rangle}$ равномерная сходимость уже не зависит от выбора ρ; точнее, топология равномерной сходимости совпадает с компактно-открытой топологией пространства $\overline{\langle p,q \rangle}^{[0,1]}$ и тем самым является топологическим инвариантом. Более того, она совпадает с непрерывной сходимостью, согласно которой $\lim f_i = f$ тогда и только тогда, когда для всякого x из $\lim x_i = x$ следует $\lim f_i(x_i) = f(x)$. Поэтому при рассмотрении предельных переходов для кривых с фиксированными концами p и q можно позволять себе определенную "небрежность" в конкретизации топологии.

Аналогично, в эйнштейновой кинематике множество всех замкнутых подмножеств в $\overline{\langle p,q \rangle}$, обозначаемое $2^{\overline{\langle p,q \rangle}}$, компактно, метризуемо, его топология сходимости по Хаусдорфу $\sup\{\rho(x, F_i), \rho(y, F) \mid x \in F, y \in F_i\} \to 0$ есть топологический инвариант и совпадает с экспоненциальной топологией и с топологией сходимости множеств $F_i \to F$, см. Куратовский [26], 42. II. Из теоремы 14 из [26], 46.II, мы вспоминаем, что семейство всех замкнутых связных подмножеств в $\overline{\langle p,q \rangle}$ замкнуто в $2^{\overline{\langle p,q \rangle}}$. В силу теоремы 1 отсюда вытекает:

Теорема 21. Поточечный предел последовательности каузальных кривых с фиксированными концами в эйнштейновой аффинной кинематике является связным множеством.

Ясно, что ничего этого нельзя применить к галилеевой кинематике, где $\overline{\langle p,q\rangle}$ некомпактен (см. теорему 2 §1). Теперь нетрудно доказать основную теорему о сходимости:

Теорема 22. Предел последовательности каузальных кривых с фиксированными концами в эйнштейновой кинематике является каузальной кривой. Из всякого семейства каузальных кривых с фиксированными концами в эйнштейновой кинематике можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\gamma_i \to \gamma$ в том смысле, что $\gamma_i t \to \gamma t$ для любого $t \in [0,1]$. Тогда очевидно, что $s < t \Rightarrow \gamma s \leqslant \gamma t$, ибо для всякого i верно $\gamma_i s \leqslant \gamma_i t$. Так как по теореме 21 $\gamma([0,1])$ связно, то по теореме 1 γ есть каузальная кривая. Так как $2^{\overline{\langle p,q\rangle}}$ компактен, то вторая часть теоремы тривиальна.

Замечание 1. Сходимость кривых, в каком бы ее смысле ни понимать, относится у нас только к точкам кривых, а не к их касательным. Ничего нельзя сказать о сходимости скоростей в (6.6.4).

Замечание 2. Почти никакие общетопологические свойства, указанные выше для $\overline{\langle p,q\rangle}^{[0,1]}$ и $2^{\overline{\langle p,q\rangle}}$, не сохраняются, если рассматривать $A_n^{[0,1]}$ и 2^{A_n}, т.е. ими нельзя воспользоваться применительно к бесконечным кривым (на отрезках $(0,1]$, $[0,1)$ или $(0,1)$).

Определение 7. Через $\tilde{C}^1$ обозначим класс функций (кривых), обладающих производной почти везде на отрезке задания. Через $\tilde{\Omega}(\leqslant)$ обозначим класс тех кривых γ, которые: 1) почти везде имеют касательную γ_* и 2) в точках существования $\gamma_* \in \overline{O^+} \setminus 0$.

Теорема 23. У изотонной кривой γ в эйнштейновой кинематике в точке существования $\gamma_* \in O^+$, у каузальной $\gamma_* \in \overline{O^+}$. Обратно, если кривая γ в регулярной кинематике задана абсолютно непрерывными функциями и в точках существования $\gamma_* \in O^+$ (соответственно $\overline{O^+} \setminus 0$), то γ изотонная (каузальная). При этом

$$\tilde{\Omega}(\leqslant) \not\subset \omega(\leqslant) \cap \tilde{C}^1 \subset \tilde{\Omega}(\leqslant) \qquad (6.6.5)$$

Первая часть доказывается в точности, как в теоремах 8–9. Доказательство второй части повторяет доказательство теоремы 10 с одной тонкостью. Так как $x(t)$ – абсолютно непрерывна, то $\|x(t)\|$ как суперпозиция абсолютно непрерывной и дифференцируемой функции тоже абсолютно непрерывна, а потому $\|x(t)\| - \|x(t_0)\| = \int_{t_0}^{t} d\|x\|$, после чего работают соображения доказательства теоремы 10.

Определение 8. Назовем длиной каузальной кривой γ следующую точную нижнюю границу:

$$\mathcal{A}rcl(\gamma;p,q) = \inf\Big\{\sum_{k=0}^{m}\tau(p_k,p_{k+1})\Big|\, p_k\in\gamma \;\&\; p\leqslant p_k\leqslant p_{k+1}\leqslant q\Big\} \quad (6.6.6)$$

по всем разбиениям дуги $[p,q]$, не нарушающим порядка $\leqslant$.

Теорема 24. В эйнштейновой аффинной кинематике длина дуги $\mathcal{A}rcl(\gamma;p,q)$ не зависит от параметризации кривой γ, всегда $0\leqslant\mathcal{A}rcl(\gamma;p,q)\leqslant\tau(p,q)$ и на времениподобной прямой правое равенство достигается. Имеет место

$$\mathcal{A}rcl(\gamma;p,q) = \lim\{\Sigma\,\tau(\gamma t_{k+1}-\gamma t_k)\,|\; t_{k+1}-t_k\to 0\}. \quad (6.6.7)$$

Доказательство первых утверждений тривиально; см. определение 1 §2. Последнее следует из того, что в силу вогнутости τ сумма в (6.6.6) не возрастает при добавлении новых точек дробления.

Заметим, что в аналогичном случае длины недифференцируемой дуги относительно метрики Фреше предел в (6.6.7) берется не по параметру $t_{k+1}-t_k\to 0$, а по расстоянию $\rho(\gamma t_k,\gamma t_{k+1})\to 0$, но для кинематической метрики возможно $\tau(\gamma t_{k+1}-\gamma t_k)\to 0$, когда γt_k и γt_{k+1} лежат поблизости от световой отнюдь не близко друг от друга.

Теорема 25. Во всякой метрической эйнштейновой кинематике для любой каузальной

$$\mathcal{A}rcl(\gamma;p,q) = \int_{\alpha}^{\beta}\tau(\gamma_* s)\,ds, \quad p=\gamma\alpha,\; q=\gamma\beta, \quad (6.6.8)$$

где справа стоит интеграл Лебега.

По внешнему виду эта формула совпадает с (6.1.1), но там имеется в виду интеграл Римана, дифференцируемая γ и определение через натуральный параметр. Здесь же в некоторых точках может вообще не существовать γ_*.

Доказательство. Обозначим через σ некоторое параметрическое разбиение $\sigma=\{[t_k,t_{k+1}]\}_{k=0}^{i}$ интервала $[\alpha,\beta]$ и возьмем последовательность σ^μ разбиений при $\lim(t^\mu_{k+1}-t^\mu_k)=0$, $\mu\to\infty$; получим по (6.6.7) $\mathcal{A}rcl(\gamma;p,q)=\lim\Sigma\,\tau(t^\mu_{k+1}-t^\mu_k,\ \bar{x}(t^\mu_{k+1})-\bar{x}(t^\mu_k))$. В силу однородности τ можно преобразовать правую часть

$$\mathcal{A}rcl = \lim\Sigma\,(t^\mu_{k+1}-t^\mu_k)\,\tau\Big(1,-\frac{\Delta\bar{x}(t^\mu_k)}{\Delta t^\mu_k}\Big), \quad (6.6.9)$$

а так как $\bar{x}(t)$ абсолютно непрерывна, то почти везде существует предел и равен $\lim\frac{\Delta\bar{x}}{\Delta t}=\frac{d\bar{x}}{dt}$. Введем в рассмотрение ступенчатые функции $f^\mu=\min\{\tau(1,\frac{d\bar{x}}{dt})\,|\,t\in[t^\mu_k,t^\mu_{k+1})\}$. Тогда

$$\lim_{\mu}\sum_{k=0}^{n} \Delta t_k^{\mu}\,\tau\Big(1,\frac{\Delta \bar{x}_k^{\mu}}{\Delta t_k^{\mu}}\Big) = \lim_{\mu}\int_a^b f^{\mu}(t)\,dt \;. \qquad (6.6.10)$$

В то же время по определению $f^{\mu''} \nearrow f^{\mu}$ и в силу предыдущей теоремы получаем, что f^{μ} есть последовательность неотрицательных ступенчатых функций, которая, монотонно возрастая, сходится почти везде к $\tau(1,\frac{d\bar{x}}{dt})$. Следовательно, по основной лемме для интеграла Лебега

$$\int_a^b \tau\big(1,\frac{d\bar{x}}{dt}\big)\,dt = \lim_{\mu}\int_a^b f^{\mu}(t)\,dt \;. \qquad (6.6.11)$$

Объединяя теперь (6.6.9–11) и переходя к произвольному параметру, получаем (6.6.8), а используя (6.1.1), можем теперь писать

$$Arcl(\gamma;p,q) = arcl'(\gamma;p,q)\;, \qquad (6.6.12)$$

когда правая часть существует.

Теорема 26. Во всякой метрической эйнштейновой кинематике $\tau(p,q) = \sup\{Arcl(\gamma;p,q)\,|\,\gamma\in\omega(q)\}$, где допускаются все каузальные. На времениподобных прямых этот супремум достигается.

Доказательство очевидно. Ср. также теорему 12 §5.

Теорема 27. В эйнштейновой кинематике свойства экстремалей функционала (6.4.2) при расширении класса гладких каузальных до класса каузальных и замене интеграла Римана на интеграл Лебега меняются так: уравнения Эйлера должны теперь выполняться не везде, а почти везде. Поэтому ко всем решениям уравнений Эйлера $\ddot{x}=0$ могут быть добавлены функции, почти везде имеющие $\ddot{x}=0$, и надо только проверить, что так полученные решения будут удовлетворять требованиям определения 2. Ср. теорему 20.

Интерпретация. Таким образом, едва лишь мы отказываемся от ограничительного условия искать законы механики исключительно в классе C^{∞}, мы сразу достигаем, что даже в отсутствии силы ($mes\,\{t\,|\,\ddot{\bar{x}}(t)\neq 0\} = 0$) и при начальных условиях покоя ($\bar{x}(0)=p$, $\dot{\bar{x}}(0)=0$) возможны неинерциальные перемещения. Принцип механического детерминизма этим подрывается полностью.

Принцип механического детерминизма, как мы видим (пример (6.4.8) и теорема 27), расщепляется на две различные формулировки: одна, связанная с метрической анизотропией пространства-времени, и другая, связанная с классом допустимых материальных точек.

Формулировка 1. Движение материальной точки однозначно определено, если известны: 1) ее начальное положение и скорость и 2) ее лагранжиан.

Формулировка 2. Движение материальной точки однозначно определено, если известны: 1) ее начальное положение и скорость и 2) функция, равная второй производной от положения этой точки.

Мы видим, что вторая формулировка нарушается даже в обычной специальной теории относительности, если только не закрывать глаза на функции, не принадлежащие классу C^2. Первая формулировка нарушается лишь при очень специальном выборе анизотропного пространства-времени и материи в нем, в регулярном случае она не нарушается. Это различение в формулировках проливает новый свет на старые споры Лагранжа, Мопертюи и Эйлера относительно философского смысла "принципа наименьшего действия".

U.7. Энергия-импульс материальной точки в простом случае. Материальная точка, т.е. пара (m,γ), естественно дает вектор $m\gamma_*$ вдоль своей мировой линии. Собственно, других векторов в отсутствие априори заданных тензорных функций она дать и не может. Принято говорить о векторе энергии-импульса материальной точки. Обычно, записав в какой-нибудь координатной системе выражение $m\gamma_*$, находят его зависимость от трехмерной скорости и т.п. При этом как-то забывается, что рассмотрение координатной системы, отличной от порожденной направлением $m\gamma_*$, есть введение другого вектора A в рассмотрение. Только учебник [51] избегает этой некорректности, сразу говоря об энергии материальной точки (m,γ) относительно наблюдателя A.

Определение 9. В лоренцовой кинематике пусть (m,γ) – дифференцируемая материальная точка в натуральной параметризации, а $A>0$. Тогда энергией $\mathcal{E}$ точки (m,γ) относительно наблюдателя A назовем скалярное произведение $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\tau(A)} A\gamma_*$, а импульсом $\bar{p} = \frac{m}{\tau(A)} A \wedge \gamma_*$ [illegible]; иными словами, импульс $\bar{p}$ есть $m\gamma_*$ в собственном пространстве наблюдателя A, см. теорему 7 §4.

Теорема 28. В лоренцовой кинематике при выборе координатной гиперплоскости ортогонально к A энергия и импульс любой дифференцируемой материальной точки представляются соответственно

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \hat{p} = \frac{m\bar{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{U.7.1}$$

могут рассматриваться как компоненты n-мерного вектора

$(\mathcal{E}c^{-2}, \bar{p})$ длины m, и всегда

$$\mathcal{E}^2 - c^2\bar{p}^2 = m^2c^4. \qquad (6.7.2)$$

В самом деле, согласно теореме 3 и определению 4 тогда

$$\gamma_* = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\bar{v}^2}{c^2}}}(1, \bar{v}), \qquad (6.7.3)$$

откуда $(\mathcal{E}c^{-2}, \bar{p}) = m\gamma_*$ и вытекает всё утверждаемое.

Единственный недостаток этого определения и теоремы в исключении из рассмотрения частиц с $m=0$ или $v=c$, к которым натуральная параметризация неприменима. От этого недостатка избавляются, доопределяя натуральную параметризацию на тех частицах, которые получаются пределом из времениподобных при $v \to c$, так, чтобы $m\gamma_*$ имел конечное представление в координатах. Тогда необходимо $m=0$.

Энергия и импульс вводятся физиками также как производные от лагранжиана. Хотя при этом чаще всего говорят тоже "вектор" энергии-импульса, правильное, конечно, говорить "ковектор".

Определение 10. Функцией Лагранжа дифференцируемой материальной точки (m,γ) называется согласно §0 из [20] функция $L(\bar{v}) = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, а импульсом (лагранжевым) и энергией (лагранжевой) называются соответственно выражения

$$\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \bar{v}}, \qquad \mathcal{E} = \bar{v}\underline{p} - L. \qquad (6.7.4)$$

При этом подразумевается ортогональная система отсчета, связанная с наблюдателем $A>0$, относительно которого γ имеет скорость $\bar{v}$, и всё относится к лоренцовой кинематике.

Теорема 20. Энергия всегда совпадает с лагранжевой энергией и

$$\mathcal{E}^2 - c^2\underline{p}^2 = m^2c^4, \qquad (6.7.5)$$

но вектор $mc^2\gamma_*$ сопряжен не ковектору лагранжевой энергии-импульса $(\mathcal{E}, \underline{p})$, а ковектору $(\mathcal{E}, -\underline{p})$.

Доказательство. Вычисляя $\underline{p}$ и $\mathcal{E}$ по (6.7.4), получим

$$\underline{p} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (6.7.6)$$

а опуская индекс у $mc^2\gamma_*$, получаем отсюда с учетом (6.7.3):

$$mc^2\underset{=}{g}\,\gamma_* = (\mathcal{E}, -\underline{p}), \qquad (6.7.7)$$

ибо g_{ik} диагональный вида $(1, -c^{-2}, -c^{-2}, -c^{-2})$.

Замечание. Знак минус в (6.7.7) связан с наличием минусов в основной квадратичной форме специальной теории относительности, но дорого он теряется в рассуждениях. Его нет при перебрасывании индексов в трехмерном пространстве. Как отмечалось в §3, перебрасывание индексов – это координатное выражение инвариантной операции перехода к сопряженному вектору (ковектору). Строго говоря, знак минус указывает на различие в дефинициях вектора энергии-импульса через $m\gamma_{\mu}$ и ковектора энергии-импульса через лагранжиан. Это связано с тем известным фактом, что переменная, канонически сопряженная со временем, есть обобщенная энергия, взятая с обратным знаком.

Исходя из (6.7.2) и того, что для фотона $m=0$, по определению полагают для фотона $|\bar{p}|=\beta$, получая затем $\mathcal{E}=\beta c$ и вектор энергии-импульса фотона в виде $\Phi=(\beta c^{-1},\beta,0,0)$ и ковектор энергии-импульса фотона $\underline{\Phi}=(\beta c,\beta,0,0)$, $\underline{\Phi}\neq g\Phi$. Аналогично для вращающегося в плоскости $z=0$ фотона, отталкиваясь от (6.5.5–6), имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{E}=\beta c\big(c-u\cos(\eta t-\varphi)\sin\varphi+a_1u(\cos(\eta t-\varphi)\sin\varphi-\sin\eta t)+\\+v\sin(\eta t-\varphi)\sin\varphi+a_1v(\cos(\eta t-\varphi)\cos\varphi-\cos\eta t)+\\+w\sqrt{1-a_1^2}\sin(\eta t-\varphi)\big);\end{aligned}\tag{6.7.8}$$

$$\bar{p}=\begin{pmatrix}u\left(\beta+\frac{(\mathcal{E}-\beta c^2)(c-\sqrt{c^2-\bar{v}^2})}{u^2+v^2+w^2}\right)-\beta\sqrt{c^2-\bar{v}^2}\big(\cos(\eta t-\varphi)\sin\varphi+a_1(\cos(\eta t-\varphi)\sin\varphi+\sin\eta t)\big)\\ v\left(\beta+\frac{(\mathcal{E}-\beta c^2)(c-\sqrt{c^2-\bar{v}^2})}{u^2+v^2+w^2}\right)+\beta\sqrt{c^2-\bar{v}^2}\big(\sin(\eta t-\varphi)\sin\varphi+a_1(\cos(\eta t-\varphi)\cos\varphi-\cos\eta t)\big)\\ w\left(\beta+\frac{(\mathcal{E}-\beta c^2)(c-\sqrt{c^2-\bar{v}^2})}{u^2+v^2+w^2}\right)+\beta\sqrt{c^2-\bar{v}^2}\sqrt{1-a_1^2}\sin(\eta t-\varphi)\end{pmatrix}.\tag{6.7.9}$$

6.8. **Энергия-импульс в анизотропном мире.** В анизотропном случае понятия расщепляются и возникают четыре варианта дефиниции энергии и импульса. В одних вариантах они образуют 4-мерный вектор (ковектор), в других – нет, но каждый вариант доставляет определенное обобщение формуле (6.7.2) или тем ее частным случаям, когда $\bar{p}=0$ или $m=0$, т.е. внутренняя энергия и энергия-импульс фотона в анизотропном случае присутствуют, как и в изотропном. Известно, что исторически именно наличие этих двух экспериментально проверяемых следствий специальной теории относительности послужило доводом в пользу принятия ее физиками как "истинной". Мы убеждаемся, что наличие этих следствий не связано с изотропностью специально-релятивистского пространства-времени (с наличием богатой группы симметрий), а порождается лишь ограниченностью скорости каузального воздействия (ср. теорему 9 §4). Правда, в анизотропном случае нет единой константы c для всех направлений, а имеется своя по каждому направлению в E_{n-1}. Дабы не раздувать объем рассмотрением всех этих констант, мы сформулируем ниже определения и теорему в тех масштабах, которые отвечают $c = 1$ в теории относительности.

Определение 11. Функцией Лагранжа дифференцируемой материальной точки (m, γ) в канонической координатной системе $(t, \vec{x})$ называем $L = -m\tau(t, \vec{x})$ при $\dot{t} = 1$ и $\dot{\vec{x}} = \vec{v}$. Лагранжевой энергией $\mathcal{E}_\Lambda$ называем $\mathcal{E}_\Lambda = -\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\Big|_{(\dot{t}, \dot{\vec{x}}) = (1, \vec{v})}$, а лагранжевым импульсом $p_\Lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}\Big|_{(\dot{t}, \dot{\vec{x}}) = (1, \vec{v})}$. Примитивным вектором энергии-импульса называем $(\mathcal{E}_n, \vec{p}_n) = m\gamma_*$ при $\tau(\gamma_*) = 1$. Майкельсоновой энергией в системе отсчета наблюдателя $A > 0$ $(\tau(A) = 1)$ называем $\mathcal{E}_M = \vartheta(m\gamma_*)$ (см. §4.3), а майкельсоновым импульсом $\vec{p}_M = A \wedge m\gamma_*$. Ортогональной энергией в системе A называем $\mathcal{E}_0 = A\,m\gamma_*$, а ортогональным импульсом $\vec{p}_0 = p_M$.

Теорема 30. Компоненты лагранжевой энергии и импульса с обратным знаком образуют ковектор в E_n^*, причем

$$\left(\mathcal{E}_\Lambda, -\underline{p}_\Lambda\right) = \underline{h}\left(\mathcal{E}_n, \vec{p}_n\right) \tag{6.8.1}$$

в обозначении (6.7.7). Всегда

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_n \geqslant \|\vec{p}_n\|, \qquad \mathcal{E}_\Lambda \geqslant \|-\underline{p}_\Lambda\|^* , \\ &\mathcal{E}_M \geqslant \mu(\vec{p}_M), \qquad \mathcal{E}_0 \geqslant \sqrt{\vec{p}_0^{\,2}} , \end{aligned} \tag{6.8.2}$$

где $\|\ \|$ – каноническая норма в E_{n-1}, $\|\ \|^*$ – сопряженная ей в E_{n-1}^*, μ – майкельсонова метрика в $A \wedge E_{n-1}$, а $\vec{p}^{\,2}$ вычислен в гессиановой метрике. Выполняются также соотношения

$$\mathcal{E}_n \mathcal{E}_\Lambda - \vec{p}_n \underline{p}_\Lambda = m^2 , \tag{6.8.3}$$

$$\mathcal{E}_0^2 - \vec{p}_0^{\,2} = m\,h_{ik}(A)\,\gamma_*^i \gamma_*^k , \qquad (\tau(\gamma_*) = 1), \tag{6.8.4}$$

а для майкельсоновой

$$\vec{p}_M = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{E}_M = m . \tag{6.8.5}$$

Доказательство. По определению $(\mathcal{E}_n, \vec{p}_n) = \frac{m}{\tau(\gamma_*)}(1, \vec{v})$, откуда по (3.2.1) $\underline{h}(\mathcal{E}_n, \vec{p}_n) = m\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}(1, \vec{v}), \frac{\partial \tau}{\partial \vec{x}}(1, \vec{v})\right)$, а в силу наличия знака минус в определении L получаем (6.8.1). Первое неравенство в (6.8.2) выполняется в силу теоремы 3 §1, после чего применение теоремы 2 §3 обеспечивает выполнение второго неравенства в (6.8.2), ибо $(\mathcal{E}_\Lambda, -p_\Lambda) \in E_n^*$. Третье в (6.8.2) неравенство совпадает с (4.3.2). Для получения (6.8.4) воспользуемся (3.8.5), что дает $H_{ik}(A)p^i p^k = -m^2\left(h_{ik}(A)\gamma_*^i\gamma_*^k - (A\gamma_*)^2\right)$, откуда требуемое. Так как справа стоит неотрицательное число, то верно четвертое неравенство в (6.8.2). (6.8.3) есть следствие теоремы Эйлера применительно к τ . Для доказательства (3.8.5) замечаем, что из определения 8 04 следует, что при $\rho = 0$ вектор γ_* коллинеарен A , а потому $\theta(\gamma_*) = 1$, откуда $\mathcal{E} = m$.

Замечание 1. Нельзя ожидать выполнения $\mathcal{E}_n^2 - \bar{p}_n^2 = m^2$, ибо метрика τ не обязана быть канонической. Точно также нельзя ожидать $\mathcal{E}_\Lambda^2 - p_\Lambda^2 = m^2$. В (3.8.4) справа стоит, вообще говоря, не константа $m^2 h_{ik}(A) \gamma_*^i \gamma_*^k$. На инерциальных частицах это константа, но, возможно, отличная от m^2 , если только $h_{ik}(A)$ не сводится к тензору g_{ik} . Можно было бы нормировкой $h(A)\gamma_*\gamma_* = 1$ вместо $\tau(\gamma_*) = 1$ сделать этот член константой, но тогда непостоянным оказался бы член с $\tau(\gamma_*)$.

Замечание 2. Энергия и импульс в майкельсоновом варианте $(\mathcal{E}_M, \bar{p}_M)$ не образуют вектора в E_Λ , так как майкельсоновы координаты нелинейны, а вектор должен был бы быть линейным. Так как скалярное произведение тоже нелинейно, вообще говоря, то ортогональные энергия и импульс тоже не образуют вектора.

Замечание 3. Посредством предельного перехода можно, как говорилось, корректно определить фотоны, т.е. материальные точки с нулевой массой, движущиеся прямолинейно с постоянной скоростью света в данном направлении. Вращающиеся фотоны возможны не во всяком анизотропном пространстве-времени.

Иногда забывают про знак минуса в (3.7.7) и определяют ковектор энергии-импульса как $U = h(\gamma_*)$, а Богословский [12] даже называет вектором энергии-импульса ориклической кинематики $g^{ik} h_{kj} \gamma_*^j$, где g и h связаны соотношением (3.7.7). Впрочем, он никак не использует полученный объект.

Исходя из определения функции Лагранжа, мы можем в силу теоремы 27 утверждать теперь, что при ограничении классом дважды непрерывно дифференцируемых материальных точек движение материальной точки в регулярном анизотропном пространстве-времени удовлетворяет принципу наименьшего действия, кроме разве вращающихся фотонов. При расширении допустимого класса до имеющих почти всюду вторую производную нарушается принцип механического детерминизма, при включении в рассмотрение нерегулярных кинематических метрик принцип наименьшего действия не выделяет однозначно реального движения.

Закон сохранения в анизотропном пространстве-времени не выполняется, вообще говоря. Рассмотрим случай "упругих столкновений", когда частицы (m_1, γ_1) и (m_2, γ_2) , сталкиваясь, превращаются в частицу (m, γ) (или, напротив, та распадается) без сопровождающих диссипативных процессов, полей и т.п. Определением упругого столкновения является равенство

$$m\gamma_* = m_1\gamma_{1*} + m_2\gamma_{2*} \qquad (6.8.6)$$

(скорость $c = 1$). В силу теоремы 29 тогда в лоренцовом мире ковекторы лагранжевой энергии-импульса также складываются (6.7.7), и потому "при упругом столкновении энергия-импульс материальных точек сохраняется." В анизотропном случае (6.7.7) заменяется на (6.8.1), а сопрягающее отображение h_{ik} уже не линейно, в отличие от g_{ik}, так что при упругом столкновении

$$(\mathcal{E}_n, \bar{p}_n) = \sum_i (\mathcal{E}_{in}, \bar{p}_{in}), \qquad (6.8.7)$$

но

$$(\mathcal{E}_\lambda, p_\lambda) \neq \sum_i (\mathcal{E}_{i\lambda}, \bar{p}_{i\lambda}). \qquad (6.8.8)$$

Точно так же майкельсонова энергия не складывается, вообще говоря, при упругом столкновении. Ортогональная энергия-импульс складывается, пока измерения проводятся в одной и той же системе отсчета A, так как в силу теоремы 4 §3 скалярное произведение линейно по второму множителю. Но незаконен был бы переход: энергия объекта относительно первой системы отсчета $\mathcal{E}$, а энергия первой системы относительно второй $\mathcal{E}'$, поэтому энергия объекта относительно второй системы $\mathcal{E} + \mathcal{E}'$. Ведь по первому множителю скалярное произведение не линейно. С импульсами трудностей не возникает, потому что скалярное произведение, которым они определены, линейно.

Разница между реально измеренной лагранжевой энергией и суммой лагранжевых энергий соударяющихся частиц будет в эксперименте выглядеть как "дефект" или "эксцесс", и появится соблазн "объяснить" ее в рамках изотропного мира как импульс гипотетической частицы, родившейся при столкновениях. Но скорее вырисовываются такие аналогии: в специальной теории относительности две материальные точки, предоставленные самим себе, не должны сближаться; уклонение их от первоначального состояния, изменение расстояния между ними – свидетельствовали бы о нарушении закона гравитации. Дабы все же описать присутствующий в природе феномен гравитации, Эйнштейн ввел (в общей теории относительности) пространство с кривизной: кривизна сама по себе "порождает" такое несохранение. Аналогично, вводя анизотропию, мы автоматически предусматриваем некоторое несохранение в упругих реакциях. Обычно при нарушении энергетического баланса в реакциях распада принято снисывать дефицит за счет гипотетической частицы (подобно тому, как в сближении двух тел Ньютон списывал дефицит за счет "силы тяготения"). Мы показали, что в принципе этот дефицит можно относить за счет геометрии самого пространства-времени.

Summary. The notion "eigen-space of an observer A " splits into three different notions for the anisotropic spacetime $(E_n, <, \tau)$: as a set of simultaneous events relatively A , as a hyperplane orthogonal to the vector A , as a factorspace E_n/A . The case of an unstable eigen-space is studied also. The problem of time reversion can be solved at the anisotropic case. The Galilean, Lorentzean and anisotropic spacetimes are compared as to their symmetry groups and some errors of physicists are exposed. Different classes of curves (differentiable: timelike, causal and lightlike -- nondifferentiable: isotonic and so on) are considered, the energy-moment of their corresponding point particles are obtained. The conservation laws are discussed.

Гл.3. ФИНСЛЕРОВО ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

§7. ПРОСТРАНСТВО ФИНСЛЕР-АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

7.1. **Вводные соображения.** В гл.1–2 мы изучали структуры $(A_4, <)$ или $(A_4, <, \tau)$. Сейчас мы хотим развить наши структуры в том направлении, чтобы заменить аффинное A_4 на более общее пространство. Физическая необходимость в таком обобщении вытекает из соображений-интерпретаций §4. Основное в аффинном пространстве – это его линейная структура, геометрически проистекающая из того факта, что в нем есть параллели: через точку p вне прямой λA проходит параллельная λA прямая $\lambda B = p + \lambda A$. Физическая интерпретация этому – событие p вне инерциального наблюдателя λA можно рассматривать как происходящее у наблюдателя $B > C$, покоящегося относительно A. Наличие системы (конгруэнции) взаимно-неподвижных наблюдателей, покрывающих всё пространство-время, – вот главная гипотеза, на которой базируется применимость глав 1–2 (в том числе и псевдоевклидовой геометрии ${}^{1}R_4$) к физике. Как и должно быть в геометрии с единственной параллелью и как мы видели в §4, рассто-

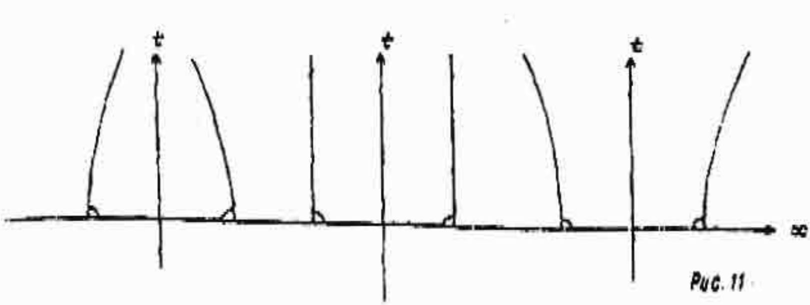


Рис. 11

яния между двумя взаимнопокоящимися материальными точками (наблюдателями) не меняются со временем. Это – важное упрощение во всех построениях.

Но такие модели ни единственно возможные априори, ни единственно требуемые эмпирически. Априори можно мыслить такое поведение двух взаимно-неподвижных в данную дату тел: они, как меридианы на глобусе, начнут сближаться (оставаясь прямыми-геодезическими). Ведь взаимная неподвижность в рассмотренных в §4 случаях, в частности, означает, что названные две прямые имеют общий перпендикуляр в некоторой дате. Так и меридианы ортогональны экватору, однако сближаются. Разумеется, априори возможно и прямо противоположное – две прямые перпендикулярны третьей, но затем расстояние между ними увеличивается хоть до бесконечности (как на плоскости Лобачевского). См. рис. 11. Если учесть сказанное в §0.2 насчет исключения бесконечно-быстрых перемещений, то техническое уточнение сказанного заключалось бы в том, что вместо "сфера" и "плоскость Лобачевского" пришлось бы говорить о "полусферической геометрии" S^1_1 или об антидеситтеровом мире ${}^1S_1$ в случаях сближения "инерциальных наблюдателей", и о "полулобачевской геометрии" ${}^1S^1_1$ или о деситтеровом мире ${}^{11}S_1$ в случаях их разбегания; эти четыре геометрии получаются "гибридизацией" галилеево-эйнштейновости со сближением-разбеганием. (Конечно, получаются при некоторых дополнительных аксиомах. В частности, как и в A_n, должна существовать достаточно богатая группа автоморфизмов пространства-времени, совмещающих любую точку с любой другой. Но только это уже будут не параллельные переносы, конечно.)

Эмпирически соблазнительно применить модели сближения перпендикуляров к рассмотрению случая свободного падения: два шарика в капсуле, свободно падающей на точечную гравитирующую массу, постепенно сближаются друг с другом, в перспективе имея возможность столкнуться. Подобные соображения склоняют отказываться от ограничения аффинными моделями A_n, побуждают искать более общих математических пространств. Мы не будем особо задерживаться на выше названных четырех моделях [34,35], а сразу рассмотрим более общие, когда два перпендикуляра к общей прямой могут вести себя переменно: то сближаясь, то разбегаясь, то – на каких-то участках – сохраняя расстояние неизменным. См. рис.12. Это означает, что мы отказываемся не только от линейности-аффинности модели, но

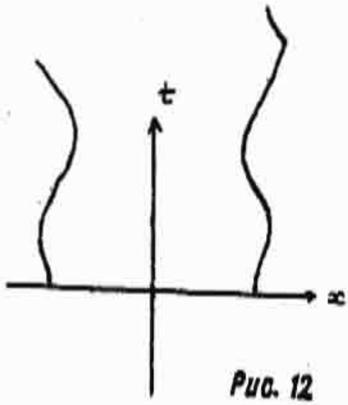


Рис. 12

и от "космологического принципа", согласно которому достаточно малые (но не бесконечно-малые) области пространства-времени устроены одинаково, т.е. допускают автоморфизмы, налагающие одну такую область на другую. Наша модель будет максимально близка стандартной модели общей теории относительности: это некий мир, в бесконечно-малом устроенный, как в гл. 1–2 (соответственно, как в специальной теории относительности). Настолько близко, насколько это возможно в анизотропном случае, причем сейчас уже лучше формулировать уточненное: "насколько это возможно в инфинитезимально-анизотропном случае".

Что же мы оставляем? Мы оставляем произвольные координаты $(x^1, \dots, x^n)$, считая пространство-время топологическим многообразием. Поэтому, например в отличие от §1.4, запись $(t+t', x+x', y+y', z+z')$ уже не имеет никакого физического содержания, но запись $(t, x, y, z) = \lim(t_k, x_k, y_k, z_k)$ еще истолковывается как физически осмысленная: события с координатами (t_k, x_k, y_k, z_k) стремятся к событию (t, x, y, z). Точно так же осмысленным остается и дифференцирование координат (dt, dx, dy, dz). Сложение дифференциалов от координат физически содержательно истолковывается как операция сложения скоростей (мгновенных, в общем событии). Итак, мы обобщаем A_n в форме гладкого многообразия M_n.

Но гладкое многообразие – слишком широкое обобщение для нашего уровня рассмотрения. Нам нужно еще уметь дифференцировать функции и векторы на M_n. В A_n проблемы не возникало: по самому определению A_n разным точкам $p, q \in A_n$ отвечало одно и то же векторное пространство E_n, а потому все операции над векторами – включая дифференцирование – корректно определялись как операции в этом единственном векторном пространстве E_n. Здесь же в точке $p \in M_n$ одно касательное пространство, а в точке $q \in M_n$ – другое. Как соотнести их друг с другом, чтобы можно было бы говорить о приращении вектора X при переходе от точки p к точке q? В общей теории относительности оснащают M_n операцией ковариантного дифференцирования ∇, иначе называемой "аффинной связностью". Структура (M_n, ∇) заменяет собой A_n. И затем ее можно обогащать метрикой g_{ik} или структурой порядка $\prec$. Но, увы, аффинная связность есть структура, разработанная только применительно к тому, что называется тензором, т.е. к объектам из $E_n \otimes \ldots \otimes E_n \otimes E_n^* \otimes \ldots \otimes E_n^*$, зависящим как функции разве что от точки $p \in M_n$. Как мы видели в §3, наш главный объект – сопрягающее отображение $\div$ – не является тензором, и оно нелинейно зависит от вектора X (тут – из касательного пространства). Значит, нашей первой задачей будет изложение теории, заменяющей теорию аффинной связности на случай двух переменных p и X. Пересказу этой малоизвестной теории, которая называется теорией финслер-аффинной связности, и будет посвящен этот параграф. Ничего специфичного именно для кинематик в этом параграфе не содержится, он равно применим и к случаю выпуклой метрики, и к седловой метрике. Мы вынуждены в дальнейшем отказаться от сравнений с галилеевым миром, потому что обобщение ковариантного дифференцирования ∇ на случай абсолютной одновременности очень громоздко [30]. Так как мы в целях экономии места опустили несколько десятков страниц теории поверхностей в анизотропном пространстве-времени, то мы вынуждены вводить ∇ чисто формально, не прибегая к естественным аналогиям с деривационными формулами дифференциальной геометрии, в которых возникают компоненты вроде компонент Кристоффеля или параллельного переноса вдоль поверхности. Теорию финслеровой связности мы будем излагать без претензий на исчерпывающее изложение, ограничиваясь только тем, что нам безусловно понадобится в §8.

7.2. **Финслерово многообразие.** Если есть какое угодно топологическое пространство M, то можно рассматривать $\mathbb{R}^M$ – пространство непрерывных отображений из M в $\mathbb{R}$. Если M является топологическим многообразием M_n, т.е. таким хаусдорфовым пространством со счетной базой, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$, то в $\mathbb{R}^M$ можно (разными способами) выделить некоторое достаточно богатое подмножество (алгебру) F функций, называемых гладкими функциями, как описывает следующее определение:

Определение 1. Пусть M_n – топологическое n-мерное многообразие. Говорим, что $F = F(M)$ есть алгебра гладких функций на M_n, если

1) всякая $f \in F$ есть некоторое непрерывное отображение открытого множества $U \subset M$ в $\mathbb{R}$ (т.е. $U = \mathrm{Dom}\, f$);

2) для всякой $p \in M_n$ найдутся n функций $f_i \in F$ при $p \in \mathrm{Dom}\, f_i$ таких, что не существует C^∞-дифференцируемой функции $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (отличной от константы на $f_1 \times \ldots \times f_n (\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Dom}\, f_i) \subset \mathbb{R}^n$), для которой $g(f_1, \ldots, f_n) = const$ на какой-нибудь окрестности p;

3) для всякой $p \in M_n$ и любых $n+1$ функций $f_i \in F$ при $p \in \mathrm{Dom}\, f_i$ найдется $\ell \leq n+1$ и C^∞-дифференцируемая функция $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для которой $f_\ell = g(f_1, \ldots, f_{\ell-1}, f_{\ell+1}, \ldots, f_{n+1})$ на некоторой окрестности точки p.

Называем C^∞-гладким многообразием пару (M_n, F), обычно кратко обозначаемую M_n. То подмножество из F, области задания функций из которого имеют общую точку p, обозначают $F(M, p)$ или короче F_p. Совокупность функций пункта 2 называется картой в точке p; это произведение (комплект) $(f_1, \ldots, f_n) : \bigcap \mathrm{Dom}\, f_i \to \mathbb{R}^n$, а сами f_i в таком контексте называются координатами точки q и пишутся с индексами вверху: $x^i(q)$. Пункт 3 гарантирует гладкое преобразование координат x^i к координатам $x^{i'}$ на пересечении карт, так что нетрудно получить атлас, покрывающий всё M_n.

Определение 2. Пусть $A = (\Omega, E, \times)$ – некоторая алгебра, т.е. векторное пространство или модуль E над скалярами Ω с операцией умножения между векторами $e_1 \times e_2 = e_3$, а E' – другое векторное пространство или модуль над A. Тогда дифференцированием $\mathcal{D} : A \to E'$ называется такое линейное отображение $E \to E'$, при котором выполнено правило Лейбница $\mathcal{D}(e_1 \times e_2) = \mathcal{D}(e_1) e_2 + e_1 \mathcal{D}(e_2)$.

Известно, что для скаляров $\mathcal{D}(\omega) = 0$, а совокупность всех $\mathcal{D}$ образует векторное пространство (соответственно, модуль) над Ω (возможно, бесконечномерное). Так как $f \in F_p$ составляют алгебру (даже кольцо) над $\mathbb{R}$ (при $(f \times g)(x) = f(x) g(x)$), то можно говорить о дифференцированиях $\mathcal{D} : F_p \to F_p$, а так как $\mathbb{R}$ можно рассматривать как векторное пространство же над $\mathbb{R}$, то можно говорить о дифференцированиях $\mathcal{D} : F_p \to \mathbb{R}$. Подчеркнем, что такой подход плодотворен только при ограничении дифференцируемыми функциями. В случае субдифференцируемости, как видно из сопоставления (2.6.5) и BK_ϑ, для производных, вообще говоря, $(X+Y)_\tau(0) \neq X_\tau(0) + Y_\tau(0)$, и поэтому полагать для абстрактных операторов по определению $(X+Y)f = Xf + Yf$ неэффективно.

Определение 3. Касательным пространством $T_p M$ к (M_n, F) в $p \in M_n$ называется множество дифференцирований $X : F_p \to \mathbb{R}$.

Пространство дифференциалов $\{df \mid f \in F_p\}$, т.е. градиентов $df = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^a}\right) = (\partial_a f)$ называется кокасательным пространством к (M_n, F) и обозначается $T_p^* M$. Между $T_p M$ и $T_p^* M$ вводится естественная операция сопряжения $df\, X = X f(p) = X^i \partial_i f$, так что градиент есть тот ковектор, свертка вектора X с которым дает производную по направлению X от f. Касательным расслоением гладкого многообразия M_n называется множество $TM = \{T_p M \mid p \in M_n\}$, оснащенное естественной топологией, естественной гладкостью и проекцией $\pi : TM \mapsto M_n$ при $\pi(p, \dot{x}) = p$ для любого $\dot{x} \in T_p M$. Тензором и тензорным полем соответственно валентности (k, ℓ) называется элемент из произведения $T_\ell^k M = \underbrace{T_p M \otimes \ldots \otimes T_p M}_{k} \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \ldots \otimes T_p^* M}_{\ell}$ или же из сечения $M_n \mapsto M_n \times T_\ell^k M$. Элементы из $T_0^0 M$ по определению суть скаляры, т.е. $f \in F_p$, а $T_p M$ и $T_p^* M$ в этой записи выражаются $T_0^1 M$ и $T_1^0 M$. Градуированная алгебра тензоров при всех $k, \ell \geq 0$ называется тензорной алгеброй над (M_n, F).

Доказывается, что благодаря C^∞-дифференцируемости $f \in F_p$ касательное пространство имеет размерность n, что оно сопряжено $T_p^* M$, что дифференцирования $\mathfrak{D} : F_p \mapsto F_p$ образуют тензорное поле $M_n \mapsto M_n \times T_0^1 M$ (в данном случае векторное), что π – гладкая проекция. Эти и другие следствия из определений общеизвестны, см. [11].

Определение 4. Финслеровым многообразием $\mathfrak{M}$ называется открытое множество $\mathfrak{M} \subset TM$, не содержащее $0 \in T_p M$ ни при одной $p \in M_n$. Точки его суть $\wp = (p, \dot{x})$ при $\dot{x} \in T_p M$. Финслеровым вектором X называется элемент $(\wp, X) \in \mathfrak{M} \times T_p M$ при условии $\pi \wp = p$. Аналогично финслеров тензор $X^{\cdots}_{\cdots}$ валентности (k, ℓ) есть $(\wp, X) \in \mathfrak{M} \times T_\ell^k M$, когда тензорное пространство $T_\ell^k M$ берется в точке $\pi \wp$. Финслерово поле валентности (k, ℓ) есть сечение $\mathfrak{M} \mapsto \mathfrak{M} \times T_\ell^k M$ при том же условии. Модуль этих полей обозначается $\Pi_\ell^k M$, а объединение $\bigoplus \Pi_\ell^k M$ всех таких модулей при произвольных $k, \ell \geq 0$ обозначается ΠM и называется градуированной финслер-тензорной алгеброй.

При $k = \ell = 0$ получаются финслеровы скаляры, т.е. функции на $\mathfrak{M} \subset TM$, т.е. $g(p, \dot{x})$ при $p \in M_n$, $\dot{x} \in T_p M$. Эти финслеровы гладкие скалярные функции $g \in \Pi_0^0 M$ связаны с $f \in F$ естественно: $f \circ \pi \in \Pi_0^0 M$.

Механическая интерпретация финслеровых функций – неголономные объекты, т.е. объекты, зависящие не только от геометрических связей, но и от скоростей и связей между скоростями.

При произвольных преобразованиях координат в окрестности точки $p \in M_n$ в касательном пространстве T_pM индуцируются линейные преобразования, поэтому все данные определения координатно-инвариантны. Точнее, имеет место теорема 1.

Теорема 1. В координатном представлении точкой финслерова многообразия является комплект $2n$ чисел $(p^1,\ldots,p^n;\,\xi^1,\ldots,\xi^n)$ с законом преобразования

$$\begin{cases} p^{i'} = p^{i'}(p^1,\ldots,p^n) \in C^\infty \\ \xi^{i'} = \xi^k \dfrac{\partial p^{i'}(p^1,\ldots,p^n)}{\partial p^k} \end{cases} \qquad (7.2.1)$$

;

суммирование подразумевается.

В самом деле, $\mathfrak{p} = (p,\xi)$ есть элемент из произведения $M_n \times T_pM$, в котором p представляется комплектом $(p^1,\ldots,p^n)$ при произвольных преобразованиях, указанных в первой формуле (7.2.1), а $\xi \in T_pM$ представляется комплектом $(\xi^1,\ldots,\xi^n)$, который при этих преобразованиях преобразуется линейно, т.е. по второй формуле (7.2.1).

Рассматривая $\dfrac{\partial f(p',\xi')}{\partial p^i}$, $\dfrac{\partial f(p',\xi')}{\partial \xi^i}$ и подставляя туда значения из (7.2.1), получим теорему 2.

Теорема 2. Частные производные от финслеровых скалярных функций преобразуются так:

$$\begin{cases} \partial_i f = \mathcal{D}_i^{k'} \partial_{k'} f + \xi^\ell \dfrac{\partial^2 p^{k'}}{\partial p^i \partial p^\ell} \dot{\partial}_{k'} f \\ \dot{\partial}_i f = \mathcal{D}_i^{k'} \dot{\partial}_{k'} f \end{cases} \qquad (7.2.2)$$

,

где стандартно на будущее обозначены частные производные по точкам p и по векторам ξ так:

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial p^i}, \qquad \dot{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \qquad (7.2.3)$$

и, как обычно, обозначаем

$$\mathcal{D}_k^{i'} = \frac{\partial p^{i'}(p^1,\ldots,p^n)}{\partial p^k}. \qquad (7.2.4)$$

Обратим внимание, что матрица Якоби для (7.2.1)

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_k^{i'} & 0 \\ \xi^\ell \partial_i \partial_\ell p^{i'} & \mathcal{D}_i^{i'} \end{pmatrix} \qquad (7.2.5)$$

и матрица преобразований (7.2.2) не взаимно-обратны в отличие от случая многообразия M_n. Собственно, всю финслерову теорию можно было бы получить, как учение об инвариантах при координатных преобразованиях (7.2.1). Может вызвать недоумение в определении 4 исключение $0 \in T_pM$ из финслерова многообразия $\mathfrak{M}$. Но согласно теореме 8 §2 [illegible] кинематическая метрика не дифференцируема в нуле, равно как и эвклидова метрика $\sqrt{x^2+y^2}$. Наши же F и $\Pi_p^n M$ состоят только из дифференцируемых функций. Поэтому нерасширенное [illegible] $\mathfrak{M}$ на [illegible] (или другие точки) означает разрешение использовать недифференцируемые в нуле функции, в частности названные метрики.

Проекция $\pi: TM \to M_n$ и ее дифференциал $d\pi$, обозначаемый также π_*, будут играть в дальнейшем изложении заметную роль. Например, для $\mathfrak{M}$ как многообразия размерности $2n$ естественно возникает касательное в точке $\mathfrak{p}=(p,\xi)$ пространство $T_{\mathfrak{p}}\mathfrak{M}$ и тем самым $\pi_*: T_{\mathfrak{p}}\mathfrak{M} \to T_p M$ по формуле $\pi_*(dp, d\xi) = dp$. Таким образом посредством π_* операция дифференцирования по направлению над функциями "двух переменных" p и ξ заменяется операцией того же рода над функцией одной переменной p.

7.3. Ковариантное дифференцирование и финслерова связность. Ковариантное дифференцирование понимается как дифференцирование вдоль некоторого пути. Но в финслеровом многообразии $\mathfrak{M}$ речь пойдет не о пути γ в M_n ($\gamma: [\alpha,\beta] \to M_n$, $\gamma = p(t)$), а о пути Γ в $\mathfrak{M} \subset TM$, т.е. о $\Gamma: [\alpha,\beta] \to TM$, $\Gamma = (p(t), \xi(t))$ и о касательной $\Gamma_* \in T_\Gamma \mathfrak{M}$ при $\Gamma_* = (\frac{dp}{dt}, \frac{d\xi}{dt})$. Если $\pi\Gamma$ вырождается в одну точку, то такой путь $\Gamma \subset (p, T_pM)$ называется вертикальным, а путь $\gamma \subset M_n$ называется горизонтальным. Громоздкость многих формул финслеровой теории связности в значительной мере обусловлена тем, что вектор из $T\mathfrak{M}$, вдоль которого определяется ковариантная производная, $2n$-мерен, а результат этого дифференцирования надо разместить в n-мерном пространстве T_pM. Общее же число производных "удваивается", так как сверх производных ∂_k по точкам возникают еще производные $\dot\partial_k$ по векторам.

Теорема 3. Для всякого финслерова скаляра $f \in \Pi^0_0 M$ частные его производные по векторной переменной в точке $\mathfrak{p}=(p,\xi)$ образуют ковектор в кокасательном пространстве T^*_pM.

Доказательство очевидно из (7.2.2).

Определение 5. Ковектор $(\dot\partial_k f)$ называется вертикальной ковариантной производной скаляра $f \in \Pi^0_0 M$ и обозначается $(f_{;k})$ или $(\nabla_{;k} f) = \nabla_; f$.

Дабы исчерпывающим образом использовать $2n$-мерный объект $(\partial_k f, \dot\partial_k f)$ из $T^*_{\mathfrak{p}}\mathfrak{M}$, ему надо сопоставить два n-мерных объекта: вертикальную и какую-то другую производную.

Определение 6. Фундаментальным спуском (лифтом) ρ называется гомоморфизм $\rho: T_{\mathfrak{p}}\mathfrak{M} \to T_p M$ ($p = \pi\mathfrak{p}$) с таким свойством: по любой $f \in \Pi^0_0 M$ найдется $A \in T^*_pM$, для которого при всяком $\Phi \in T_{\mathfrak{p}}\mathfrak{M}$ выполняется

$$A(\pi_*\Phi) + (\nabla_; f)\rho\Phi = \Phi f, \qquad (7.3.1)$$

где Φf, как обычно, обозначает действие Φ на f в смысле определения 3, но только для $f \in \Pi_0^\circ M$, а не для $f \in T_0^\circ M$, т.е. иными словами,

$$\Phi f = \frac{df}{d\Phi} = \partial_\kappa f \, \frac{dp^\kappa}{dt} + \dot{\partial}_\kappa f \, \frac{dZ^\kappa}{dt} \quad . \qquad (7.3.2)$$

В силу произвольности Φ коэффициент A находится однозначно и потому ему можно дать название. При фиксированном фундаментальном спуске ρ коэффициент при $\pi_* \Phi$ называется горизонтальной производной от f. Обозначается $(f_{,\kappa})$ или $\nabla_\kappa f$.

Теорема 4. В координатном представлении задание фундаментального спуска ρ эквивалентно заданию n^2 компонент $N_\kappa^i = N_\kappa^i(p, Z) \in \Pi_0^\circ M$, преобразующихся по закону

$$N_\kappa^i \mathcal{D}_i^{i'} - N_{\kappa'}^{i'} \mathcal{D}_\kappa^{\kappa'} = Z^i \partial_i \partial_\kappa p^{i'} \quad . \qquad (7.3.3)$$

При этом

$$\rho^i(dp, dZ) = dZ^i + N_\kappa^i \, dp^\kappa \quad , \qquad (7.3.4)$$

$$f_{,\kappa} = \partial_\kappa f - N_\kappa^s \, \dot{\partial}_s f \quad . \qquad (7.3.5)$$

Доказательство. Как произвольный гомоморфизм ρ представляется координатно в виде $\rho^i : (U, V) \mapsto N_\kappa^i U^\kappa + M_\kappa^i V^\kappa$. Пусть (7.3.1) выполняется. Тогда, в частности, при $U^\kappa = dp^\kappa = 0$, $V^\kappa = dZ^\kappa$ (условие $\frac{dp^\kappa}{dt} = 0$ инвариантно) имеем $\pi_* \Phi = 0$ и $\Phi f = \dot{\partial}_\kappa f \, \rho \Phi^\kappa = \dot{\partial}_\kappa f \, M_s^\kappa \, dZ^s$. Здесь и далее $\rho \Phi^\kappa$ – вольность записи вместо $(\rho \Phi)^\kappa$. Применяя (7.3.2) при $dp^\kappa = 0$, получаем $\dot{\partial}_\kappa f \, dZ^\kappa = \dot{\partial}_\kappa f \, M_s^\kappa \, dZ^s$, откуда по произвольности $\dot{\partial}_\kappa f$ и dZ^κ заключаем, что $M_\kappa^i = \delta_\kappa^i$, чем доказано (7.3.4). Так как ρ введен инвариантно, то правая часть (7.3.4) преобразуется как вектор, т.е.

$$dZ^{i'} + N_{\kappa'}^{i'} \, dp^{\kappa'} = \left(dZ^i + N_\gamma^i \, dp^\gamma \right) \mathcal{D}_i \qquad (7.3.6)$$

откуда с учетом (7.2.5) получаем (7.3.3). Попутно заметим полезную формулу, следующую из вида матрицы Якоби (7.2.5):

$$dX^{i'} = \mathcal{D}_s^{i'} \, dX^s + X^s \partial_s \partial_\gamma p^{i'} \, dp^\gamma \quad , \qquad (7.3.7)$$

частный случай которой мы только что применили. Подстановкой (7.3.4) в (7.3.1) получаем (7.3.5), чем завершено доказательство.

Следствие. Для того, чтобы в некоторой системе координат $N_i^{i'} = 0$, необходимо, чтобы в любой системе координат функция $N_i^s(p, Z)$ была линейной по Z.

Для доказательства достаточно положить $N_{i'}^{i'} = 0$ в (7.3.3).

Определение 7. Финслеровой связностью ∇ относительно заданного фундаментального спуска ρ назовем отображение

$$\nabla : T\mathfrak{M} \times \Pi M \to \Pi M \quad , \qquad (7.3.8)$$

если оно удовлетворяет следующим четырем условиям:

1) при каждом $\Phi \in T_{p}\mathfrak{M}$ отображение $\nabla_\Phi : \Pi M \to \Pi M$ есть сохраняющее валентность дифференцирование в градуированной алгебре ΠM, причем, если $X \in C^\infty$, то $\nabla_\Phi X \in C^\infty$;

2) на скалярах $f \in \Pi^0_0 M$ выполняется $\nabla_\Phi f = \Phi f$;

3) для $X \in \Pi^0_1 M$ и $Y \in \Pi^1_0 M$ выполняется правило Лейбница

$$\nabla_\Phi (XY) = (\nabla_\Phi X) Y + X (\nabla_\Phi Y) \quad ; \qquad (7.3.9)$$

4) отображение ∇_Φ линейно по Φ, т.е. $\nabla_{\lambda\Phi + \mu\Psi} = \lambda\nabla_\Phi + \mu\nabla_\Psi$ для $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Пару (ρ, ∇) или, подробнее, $(\mathfrak{M}, \rho, \nabla)$ обозначаем просто ∇.

Определение 8. В $2n$-мерном касательном пространстве $T\mathfrak{M} \subset TTM$ при фиксированной карте в M_n обозначим орты e_k, $\dot{e}_k$, так что всякий $\Phi \in T\mathfrak{M}$ имеет вид $\Phi = \Phi^k e_k + \dot{\Phi}^k \dot{e}_k$. Вводим компоненты Γ^i_{jk}, C^i_{jk} через $\nabla_{e_k} \pi_* e_j = \Gamma^i_{jk} \pi_* e_i$, $\nabla_{\dot{e}_k} \pi_* e_j = C^i_{jk} \pi_* e_i$ и $F^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - C^i_{jl} N^l_k$, называемые компонентами финслеровой связности и принадлежащие $\Pi^0_0 M$.

Замечание. Согласно определению 7 в выражении $\nabla_\Phi X$ вектор $\Phi \in T\mathfrak{M}$, а вектор $X \in TM$ и $\nabla_\Phi X \in TM$. Поэтому в финслеровой теории связностей бессмысленно выражение $\nabla_X X$. Осмыслены лишь $\nabla_X \pi_* X$ или $\nabla_X \rho X$, чем обусловлена некоторая громоздкость в определении компонент Γ и C.

Теорема 5. Для всяких $u \in \Pi^1_0 M$ и $\Phi = (\frac{dp}{dt}, \frac{dX}{dt})$ выполняется

$$\nabla_\Phi u^i = \frac{du^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} u^j \frac{dp^k}{dt} + C^i_{jk} u^j \rho\Phi^k \qquad (7.3.10)$$

или равносильно

$$\nabla_\Phi u^i = \frac{du^i}{d\Phi} + F^i_{jk} u^j \pi_*\Phi^k + C^i_{jk} u^j \rho\Phi^k \ . \qquad (7.3.11)$$

При этом компоненты F и C преобразуются по формулам

$$F^i_{jk} = F^{i'}_{j'k'} D^i_{i'} D^{j'}_j D^{k'}_k + D^i_{i'} \partial_j \partial_k p^{i'} \quad , \qquad (7.3.12)$$

$$C^i_{jk} = C^{i'}_{j'k'} D^i_{i'} D^{j'}_j D^{k'}_k \quad . \qquad (7.3.13)$$

Доказательство. Взяв $u = u^i e_i$ и воспользовавшись линейностью и тем, что u^i суть скалярные функции ($i = 1, \dots, n$), к которым применимо условие 2) определения 7, сразу получаем (7.3.10). Используя (7.3.4) и определение 8, получим (7.3.11). Для нахождения закона преобразования компонент $\underline{\zeta}$ положим $dp^i = 0$. Тогда в силу (7.3.7) dU^i и dZ^i оказываются векторами и (7.3.10) принимает вид:

$$\nabla_\Phi U^i = \frac{dU^i}{dt} + C^i_{jk} U^j \frac{dZ^k}{dt} \quad . \tag{7.3.14}$$

Левая часть и первое слагаемое в правой части суть векторы, следовательно, вектором является второе слагаемое. Оно же представляется как произведение C^i_{jk} на два вектора, т.е. само должно быть тензором, чем доказано (7.3.13). Пользуясь полученным, видим, что в (7.3.11) первые два слагаемых правой части составляют вектор, т.е. закон преобразования этой суммы с учетом (7.3.7) имеет вид

$$\mathfrak{D}^{i'}_s dU^s + U^s \partial_s \partial_k p^{i'} dp^k + F^{i'}_{j'k'} U^{j'} dp^{k'} = \mathfrak{D}^{i'}_s \left(dU^s + F^s_{jk} U^j dp^k \right) ,$$

тем самым это в точности вид преобразования компонент обычной аффинной связности, откуда следует (7.3.12).

Следствие. По всякому фундаментальному спуску p найдется финслерова связность ∇. Достаточно при фиксированных N^i_k взять тензор C и аффинную связность F произвольно.

Замечание. Мацумото [28] называет финслеровой связностью тройку $(\underline{\xi}, \underline{\zeta}, \underline{N})$, где $\underline{F}$ – аффинная связность на M_*, $\underline{\xi}$ – "вертикальная связность", а $\underline{N}$ – "нелинейная связность". Мы в своем изложении следовали в основном Монтесиносу [30].

Определение 9. Для финслеровой связности (p, ∇) и произвольного тензора $U \in \Pi M$ называем горизонтальной ковариантной производной, обозначаемой $U_{,k}$, и вертикальной ковариантной производной, обозначаемой $U_{;k}$, соответствующие компоненты в разложении ∇_Φ по $\pi_* \Phi$ и $p\Phi$, т.е. $\nabla_\Phi U = U_{,k} \pi_* \Phi^k + U_{;k} p\Phi^k$.

Теорема 6. Определение корректно, названные коэффициенты находятся для любого тензора не ниже первого ранга однозначно и равны, например, для тензора U валентности (1,1):

$$U^i_{j,k} = U^i_{j:k} + F^i_{hk} U^h_j - F^h_{jk} U^i_h \quad , \tag{7.3.15}$$

$$U^i_{j;k} = \dot\partial_k U^i_j + C^i_{hk} U^h_j - C^h_{jk} U^i_h \quad . \tag{7.3.16}$$

где обозначено для краткости

$$A_{:k} = (\partial_k - N^s_k \dot\partial_s) A \tag{7.3.17}$$

и использованы обозначения (7.2.3). Если A – скаляр, то по (7.3.5) $A_{|k} = A_{,k}$.

Доказательство. Аналогично (7.3.10) находятся формулы

$$\nabla_\varphi u^i_j = d_\varphi u^i_j + F^i_{hk} u^h_j \pi_* \varphi^k + C^i_{hk} u^h_j \rho \varphi^k - F^h_{jk} u^i_h \pi_* \varphi^k - C^h_{jk} u^i_h \rho \varphi^k ,$$

а аналогично рассуждениям доказательства теоремы 4 $d_\varphi u^i_j = u^i_{j|k} \pi_* \varphi^k + \partial_k u^i_j \rho \varphi^k$, откуда следуют (7.3.15–16).

Иными словами, k-компонента горизонтальной производной – это "частная производная" по тому пути φ, для которого $\rho\varphi = 0$ и $\pi_* \varphi^i = \delta^{ik}$, а вертикальная – для которого $\pi_* \varphi = 0$ и $\rho \varphi^i = \delta^{ik}$. Заметим, что для скаляров определение (7.3.1) внешне выглядит частным случаем определения 9 в силу п.2 определения 7, но оно не может быть устранено отсылкой к общему случаю, ибо (7.3.1) является дефиницией самого ρ. Заметим также, что никак нельзя путать $\partial_k \xi$ и $\xi_{,k}$ (вопреки привычкам обычной аффинной связности и римановой геометрии).

Для выделения классов финслеровых связностей полезна следующая теорема о трансформационных свойствах определенных выражений:

Теорема 7. Произведение $z^j F^i_{jk}(p,z)$ преобразуется как N^i_k, а частная производная $\partial_j N^i_k(p,z)$ преобразуется как C^i_{jk}. Поэтому $N^i_k(p,z) - z^j F^i_{jk}(p,z)$ является тензором, а $\partial_j N^i_k$ можно принять за компоненты аффинной связности $\hat{F}$.

Доказательства проводятся непосредственной подстановкой (7.3.12) в $z^j F^i_{jk}(p,z)$ и подстановкой (7.3.3) в $\partial_j N^i_k$ с учетом (7.2.2).

Определение 10. Тензор $\Delta^i_k(p,z) = N^i_k(p,z) - z^j F^i_{jk}(p,z)$ называется тензором склонения (девиации). Финслерову связность, у которой $\Delta^i_k = 0$, называют связностью без склонения. Если дана финслерова связность (ρ, ∇), представляемая координатно тройкой (F, C, N), то связность, представляемую тройкой $(F, 0, N)$, называют связностью Рунда относительно (ρ, ∇). Связность, представляемую тройкой $(\partial N, C, N)$, называют связностью Хасигучи относительно (ρ, ∇). Связность, представляемую тройкой $(\partial N, 0, N)$, называют связностью Бервальда относительно (ρ, ∇).

7.4. Финслер-аффинная связность. Вводимых теоремой 4 и определением 8 компонент избыточно много. В обычной аффинной связности имеется n^3 компонент Γ^i_{jk}. Естественно, что при удвоении числа переменных число компонент удвоилось бы, а у нас их получилось $2n^3 + n^2$. Кроме того, в той аффинной связности, которая стандартно вводится в теории относительности, компонент $\bar{\Gamma}$ даже меньше: их не n^3, а $\frac{n^2(n+1)}{2}$, поскольку для теории значимы только коэффициенты в уравнении геодезической $\ddot{p}^i + \Gamma^i_{jk}(p)\dot{p}^j\dot{p}^k = 0$, т.е. исключительно симметрическая часть компонент $\Gamma^i_{(jk)}$, а на кососимметрическую $\Gamma^i_{[jk]}$ налагаются упрощающие условия $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. При переходе к финслеровым объектам хотелось бы сохранить тот же уровень громоздкости, увеличивая его лишь там, где это неизбежно.

От лишних n^2 компонент N^i_k можно избавиться за счет определения 10: положить тензор склонения равным нулю, в результате $\bar{N}$ выразятся через $\bar{F}$. Так подсказывается определение:

Определение 11. Финслер-аффинной связностью ∇ называется та финслерова связность (ρ, ∇), в которой ρ таково, что тензор склонения равен нулю, а $\bar{F}$ и $\bar{C}$ симметричны, т.е.

$$N^i_k(p,\dot{z}) = \dot{z}^j F^i_{jk}(p,\dot{z}), \qquad F^i_{jk} = F^i_{kj}, \qquad C^i_{jk} = C^i_{kj}. \qquad (7.4.1)$$

Обратим внимание, что в обычной аффинной связности (над функциями из $F = T^1_0 M$) компоненты N^i_k отсутствуют, т.е. нули, а потому $N^i_k \neq \dot{z}^j F^i_{jk}$ и она не является финслер-аффинной!

Из формул (7.3.12), имея в виду, что $\mathfrak{D}^i_k$ в них не зависят от $\dot{z}$, можно стандартным приемом [47] гарантировать существование карты, в которой $F^i_{jk} = 0$ (в точке или вдоль кривой; но не в области, конечно). Из (7.4.1) тогда вытекает, что в некоторой карте $\forall \dot{z}$ $N^i_k(p,\dot{z}) = 0$. Это позволяет утверждать такую теорему:

Теорема 8. В финслер-аффинной связности $\dot{z}^j \dot{z}^k \dot{\partial}_l F^i_{jk} = 0$.

Доказательство. Прежде всего, в силу законов преобразования (7.2.2) и (7.3.12) эта запись инвариантна, т.е. корректна. Далее, по (7.3.3) в названной карте $N^s_k = \dot{z}^j \partial_j \partial_k p^{i'} \mathfrak{D}^s_{i'}$. Подставляя N^s_k из (7.4.1) и дифференцируя по $\dot{z}^t$, получаем непосредственно $F^s_{tk} + \dot{z}^j \dot{\partial}_t F^s_{jk} = \partial_t \partial_k p^{i'} \mathfrak{D}^s_{i'}$, а свертывая его с $\dot{z}^k$, используя симметрии и сравнивая с первым равенством, получаем требуемое.

Попутно мы установили полезную формулу

$$\dot{\partial}_t \left(F^i_{jk} - \dot{z}^s \dot{\partial}_j F^i_{sk} \right) = 0. \qquad (7.4.2)$$

7.5. Финслеровы кривизны и кручения. Эти объекты, как известно, возникают в теории пространств аффинной связности при альтернировании двух производных. У нас встречаются производные различного типа, поэтому сочетаются разнообразные комбинации, так что образуется 5 тензоров кручения (их три ненулевых даже для финслер-аффинной связности) и три тензора кривязи. Альтернирование удобно записывать в форме скобок Ли $[\nabla,\nabla']\xi = \nabla'\nabla\xi - \nabla\nabla'\xi$.

Определение 12. Финслеровы тензоры третьего ранга $\underline{\underline{T}}$, $\underline{\underline{R}}$, $\underline{\underline{\zeta}}$, $\underline{\underline{P}}$ и $\underline{\underline{S}}$, фигурирующие в нижеследующем операторном разложении (7.5.1), называются тензорами финслерова кручения, а тензоры четвертого ранга $\underline{\underline{R}}$, $\underline{\underline{P}}$ и $\underline{\underline{S}}$ тем же – тензорами финслеровой кривизны:

$$[\alpha\nabla_j + \beta\nabla_{;j}\,,\, \gamma\nabla_k + \delta\nabla_{;k}] = \alpha\gamma\,\underline{\underline{R}}_{jk} + (\alpha\delta-\beta\gamma)\underline{\underline{P}}_{jk} + \beta\delta\,\underline{\underline{S}}_{jk} -$$
$$- (\alpha\gamma T^i_{jk} + (\alpha\delta-\beta\gamma)\zeta^i_{jk})\nabla_i - (\alpha\gamma R^i_{jk} + (\alpha\delta-\beta\gamma)P^i_{jk} + \beta\delta S^i_{jk})\nabla_{;i} \qquad (7.5.1)$$

Записанный в (7.5.1) оператор действует на $\xi\in\Pi^0_0 M$ или на $U\in\Pi^1_0 M$, причем, например, по определению $(\underline{\underline{R}}_{jk}U)^i = R^i_{sjk}U^s$, тогда как $\underline{\underline{R}}_{jk}\xi = 0$ (что формально то же самое для пустого множества индексов s).

В публикациях по финслеровой геометрии чаще пишут $R_{j\ kl}^{\ i}$ вместо нашего R^i_{jkl} и т.п., но, сохраняя традиции римановой геометрии, мы выбрали наше обозначение, хотя из-за этого иногда знаки меняются сравнительно с другими публикациями. Определение 12 априори может вызвать сомнения в существовании, корректности, единственности разложения; они устраняются следующей теоремой:

Теорема 9. Разложение определения 12 корректно и справедливы следующие вычислительные формулы:

$$T^i_{jk} = 2F^i_{[jk]} , \qquad (7.5.2)$$

$$R^i_{jk} = 2N^i_{[j;k]} , \qquad (7.5.3)$$

$$\zeta^i_{jk} = C^i_{jk} , \qquad (7.5.4)$$

$$P^i_{jk} = \partial_k N^i_j - F^i_{jk} , \qquad (7.5.5)$$

$$S^i_{jk} = 2C^i_{[jk]} , \qquad (7.5.6)$$

$$R^i_{jkl} = 2F^i_{j[k;l]} + 2F^h_{j[k}F^i_{|h|l]} + 2C^i_{jh}N^h_{[k;l]} , \qquad (7.5.7)$$

$$P^i_{jkl} = \partial_l F^i_{jk} - C^i_{jk;l} - F^h_{jk}C^i_{hl} - F^i_{hk}C^h_{jl} + C^i_{jh}\partial_l N^h_k = \qquad (7.5.8)$$
$$= \partial_l F^i_{jk} - C^i_{jl,k} + C^i_{jh}P^h_{lk} ,$$

$$S^i_{jkl} = 2\partial_{[l}C^i_{|j|k]} + 2C^h_{j[k}C^i_{|h|l]} , \qquad (7.5.9)$$

где использовано обозначение (7.3.17). Кроме того, для тензоров произвольной валентности выполняются "тождества Риччи", аналогичные (7.5.1), например, для валентности (1,1):

$$2u^i_{j[,k,l]} = u^h_j R^i_{hkl} - u^i_h R^h_{jkl} - u^i_{j,h} T^h_{kl} - u^i_{j;h} R^h_{kl}, \quad (7.5.10)$$

$$2u^i_{j[,k;l]} = u^h_j P^i_{hkl} - u^i_h P^h_{jkl} - u^i_{j,h} C^h_{kl} - u^i_{j;h} P^h_{kl} \quad (7.5.11)$$

а третье аналогичное. Ср. это с формулой, получающейся из (7.5.1) при $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = \delta = 0$ и операторе u. Обратим внимание, что при альтернировании переставляются не сами индексы "k" и "l", но со знаками производных, т.е. "$,k$" и "$;l$".

Для финслер-аффинной связности формулы упрощаются, например вместо (7.5.2), (7.5.5–6), (7.5.3) имеют место

$$T^i_{jk} = S^i_{jk} = 0, \qquad P^i_{jk} = Z^l \dot{\partial}_k F^i_{lj}, \quad (7.5.12)$$

$$R^i_{jk} = Z^h R^i_{hjk} - Z^h C^i_{hl} N^l_{[j;k]},$$

а с учетом (7.4.2) еще

$$\dot{\partial}_s (F^i_{jk} + P^i_{jk}) = 0, \quad (7.5.13)$$

откуда $\dot{\partial}_s P^i_{jk} = \dot{\partial}_k P^i_{sj}$ и т.п.

Доказательство проводится непосредственными выкладками. Проиллюстрируем на примере. Положим $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$. На основании (7.3.5) пишем $f_{,k} = \partial_k f - N^s_k \dot{\partial}_s f$. Затем применяем (7.3.10) и получаем $f_{,k;l} = \dot{\partial}_l \partial_k f - \dot{\partial}_l N^s_k \dot{\partial}_s f - N^s_k \dot{\partial}_l \dot{\partial}_s f - C^s_{kl} f_{,s}$. Определение 5 дает $f_{;l} = \dot{\partial}_l f$, и использование (7.3.15) позволяет написать $f_{;l,k} = \partial_k \dot{\partial}_l f - N^s_k \dot{\partial}_s \dot{\partial}_l f - F^s_{lk} f_{;s}$. Тогда в силу $\partial_{[k\dot{l}]} = 0$ и $\dot{\partial}_{[kl]} = 0$ имеем $2f_{[,k;l]} = -f_{,s} C^s_{kl} - f_{;s} (\dot{\partial}_l N^s_k - F^s_{lk})$, т.е. выполняется (7.5.1) при выбранных значениях коэффициентов, причем имеют место (7.5.4–5). Так как C^s_{kl} – тензор согласно (7.3.13), то первое слагаемое в разложении есть тензор, а потому и второе слагаемое, а следовательно, и P^s_{kl} есть тензор, чем завершается доказательство в данном случае.

Теорема 10. Для финслеровой связности всегда справедливы следующие 11 тождеств, называемых тождествами Бианки:

$$T^h_{[ij,k]} + T^h_{[i|l|} T^l_{jk]} + C^h_{[i|l|} R^l_{jk]} = R^h_{[ijk]}, \quad (7.5.14)$$

$$R^h_{[ij,k]} + R^h_{[i|l|} T^l_{jk]} + P^h_{[i|l|} R^l_{jk]} = 0, \quad (7.5.15)$$

$$2C^h_{[i|k|;j]} - 2P^h_{[ij]k} + 2T^h_{[i|l|} C^l_{j]k} + 2C^h_{[i|l|} P^l_{j]k} = -T^h_{ij;k} + C^h_{lk} T^l_{ij}, \quad (7.5.16)$$

$$2P^h_{[i|k|,j]} + 2R^h_{[i|l|} C^l_{j]k} + 2P^h_{[i|l|} P^l_{j]k} = -R^h_{ij;k} + R^h_{kij} + P^h_{lk} T^l_{ij} - S^h_{kl} R^l_{ij}, \quad (7.5.17)$$

$$C^h_{k[i;j]} - C^h_{l[j}C^l_{|k|i]} = S^h_{kij} - C^h_{kl}S^l_{ij} \;, \tag{7.5.18}$$

$$P^h_{k[i;j]} - P^h_{[j|k|i]} - P^h_{l[j}C^l_{|k|i]} - S^h_{l[j}P^l_{|k|i]} = -S^h_{ij,k} - P^h_{kl}S^l_{ij} \;, \tag{7.5.19}$$

$$S^h_{[ij;k]} - S^h_{[ijk]} + S^h_{[i|l|}S^l_{jk]} = 0 \;, \tag{7.5.20}$$

$$R^h_{i[jk,l]} + R^h_{i[l|m|}T^m_{kl]} + P^h_{i[j|m|}R^m_{kl]} = 0 \;, \tag{7.5.21}$$

$$P^h_{i[k|l|,j]} + R^h_{i[j|m|}C^m_{k]l} + P^h_{i[j|m|}P^m_{k]l} = -R^h_{ijk;l} + P^h_{iml}T^m_{jk} - S^h_{ilm}R^m_{jk} \;, \tag{7.5.22}$$

$$P^h_{il[j;k]} - P^h_{im[k}C^m_{|l|j]} - S^h_{im[k}P^m_{|l|j]} = S^h_{ijk,l} - P^h_{ilm}S^m_{jk} \;, \tag{7.5.23}$$

$$S^h_{i[jk;l]} + S^h_{i[j|m|}S^m_{kl]} = 0 \tag{7.5.24}$$

Доказательство основано на рассмотрении третьих производных, вычисляемых двояко, и приравнивании коэффициентов в разложении по $f_{,s}$ и $f_{;s}$. Например, из тождества $[[ij]k] = [i[jk]]$ мы получаем для $f_{[,i,j,k]}$ два выражения $(-T^s_{[ij}f_{,|s|} - R^s_{[ij}f_{;|s|})_{,k]} = (f_{[,i})_{,j,k]]}$, после чего использование (7.5.1) при $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = \delta = 0$ позволяет написать

$$\begin{aligned} &T^s_{[ij,k]}f_{,s} + R^s_{[ij,k]}f_{;s} + T^s_{[ij}f_{,|s|,k]} + R^s_{[ij}f_{;|s|,k]} = \\ &= R^h_{[ijk]}f_{,h} + T^s_{[jk}f_{,i],s} + R^s_{[jk}f_{,i];s} \;. \end{aligned} \tag{7.5.25}$$

Снова применяя (7.5.1) для перестановки индексов дифференцирования слева, получаем в левой части вместо последних двух слагаемых

$$\begin{aligned} &-T^s_{[ij}T^h_{|s|k]}f_{,h} - T^s_{[ij}R^h_{|s|k}f_{;h} + T^s_{[ij}f_{,k],s} + \\ &+ R^s_{[ij}C^h_{k]s}f_{,h} + R^s_{[ij}P^h_{k]s}f_{;h} + R^s_{[ij}f_{,k];s} \;, \end{aligned} \tag{7.5.26}$$

откуда в силу $[ijk] = [jki]$, кососимметрии T и R и произвольности выбора f следуют (7.5.14–15). Аналогично, но проще получается (7.5.24).

Рассмотрим тождество Якоби $[[\nabla_{,i}, \nabla_{,j}], \nabla_{,k}] + [[\nabla_{,j}, \nabla_{,k}], \nabla_{,i}] + [[\nabla_{,k}, \nabla_{,i}], \nabla_{,j}] = 0$. Раскрытие его по (7.5.1) позволяет записать

$$\begin{aligned} &[P_{ij} - C^s_{ij}\nabla_{,s} - P^s_{ij}\nabla_{;s}, \nabla_{,k}] + [-P_{kj} + C^s_{kj}\nabla_{,s} + P^s_{kj}\nabla_{;s}, \nabla_{,i}] = \\ &= [R_{ki} - T^s_{ki}\nabla_{,s} - R^s_{ki}\nabla_{;s}, \nabla_{;j}] \;. \end{aligned} \tag{7.5.27}$$

Раскрывая его и помня, что $P_{ij}f = 0$, а $P_{ij}\nabla_{,k}f = P^s_{kij}f_{,s}$, получим

$$-P^s_{kij} f_{,s} - C^s_{ij,k} f_{,s} - P^s_{ij,k} f_{;s} - C^s_{ij}[\nabla_{,s},\nabla_{,k}]f - P^s_{ij}[\nabla_{;s},\nabla_{,k}]f + P^s_{ikj} f_{;s} +$$
$$+ C^s_{kj,i} f_{,s} + P^s_{kj,i} f_{;s} + C^s_{kj}[\nabla_{,s},\nabla_{,i}] + P^s_{kj}[\nabla_{;s},\nabla_{,i}]f = \qquad (7.5.28)$$
$$= -R^s_{jki} f_{;s} - T^s_{kij} f_{,s} - R^s_{\cdot kij} f_{;s} - T^s_{ki}[\nabla_{,s},\nabla_{,j}]f - R^s_{ki}[\nabla_{;s},\nabla_{;j}]f ,$$

что дает (7.5.16–17). Такие же рассуждения для других индексов дают прочие формулы.

В финслер-аффинной связности тождества Бианки несколько упрощаются, но все равно они намного громоздче, нежели в привычной аффинной связности. А некоторые из них в координатно-вычислительной форме понадобятся нам в §8.5.

Теорема 11. При всякой $p \in M_n$ во всяком T_pM пространства финслер-аффинной связности заданы три бинарных операции $T_pM \times T_pM \to T_pM$, все дистрибутивные, одна коммутативная и ассоциативная, одна антикоммутативная, вообще говоря, все нелинейные.

В самом деле, достаточно положить $(XY)^i = C^i_{jk} X^j Y^k$, как получим коммутативную дистрибутивную и ассоциативную бинарную операцию. Аналогично посредством $\bar{\bar{P}}$ и $\bar{\bar{R}}$.

Теорема 12. Пространство аффинной связности (над M_n) является тем частным случаем пространства финслеровой связности (над $\mathfrak{M}$), когда множество $A \subset \Pi M$ рассматриваемых объектов таково, что вертикальная производная на них равна нулю. Тогда $A = \oplus T^s_r M$.

В самом деле, раз $\nabla_{;}$ аннулирует всякую рассматриваемую $f \in A$, то согласно (7.5.2) и (7.5.9) $C^i_{jk} = 0$. Поэтому из (7.3.16) вытекает, что частная производная по векторному направлению равна вертикальной, а те по условию равна нулю на A. Следовательно, наши объекты не зависят от $\xi \in T_pM$, т.е. суть объекты из $\oplus T^s_r M$.

7.6. Вариация кривой. Нам придется рассматривать пути $\gamma \subset M_n$ и $\Gamma \subset TM$.

Определение 13. Финслеровой вариацией кривой $\Gamma \subset TM$ в классе Λ кривых называем C^∞-гладкое отображение

$$\begin{cases} \Gamma : [\alpha,\beta] \times [-1,1] \to TM \\ \Gamma(t,\varepsilon) = (p(t,\varepsilon), \xi(t,\varepsilon)) \end{cases} \qquad (7.6.1)$$

при условии, что $\Gamma(t,0) = \Gamma$, а при каждом ε кривая $\Gamma_\varepsilon = \Gamma(t,\varepsilon)$ принадлежит указанному классу Λ. В частности, мы всегда будем рассматривать класс кривых с закрепленными концами $\Gamma(\alpha,\varepsilon) = \Gamma(\alpha,0)$ и $\Gamma(\beta,\varepsilon) = \Gamma(\beta,0)$ (другое условие см. в определении 1 §9). Векторные поля $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial \varepsilon}$ на $[\alpha,\beta]\times[-1,1]$ при диффеоморфизмо Γ порождают поля, которые мы стандартно обозначим

$$X = \Gamma_* \partial_t \ , \qquad Y = \Gamma_* \partial_\varepsilon \ , \tag{7.6.2}$$

уже в $T\mathfrak{M} \subset TTM$.

Теорема 13. При произвольной финслеровой связности (ρ, ∇) , у которой Γ^i_{jk} и C^i_{jk} симметричны по j,k , при финслеровой вариации любой кривой Γ во всякой точке $(p, \xi) \in \Gamma$ и для любого $\mathcal{U} \in \Pi^1_1 M$ выполняется

$$[\nabla_X, \nabla_Y]\mathcal{U}^i = R^i_{jk\ell}\,\mathcal{U}^j \pi_* X^k \pi_* Y^\ell + P^i_{jk\ell}\,\mathcal{U}^j \pi_* X^k \rho Y^\ell -$$
$$- P^i_{jk\ell}\,\mathcal{U}^j \pi_* Y^k \rho X^\ell + S^i_{jk\ell}\,\mathcal{U}^j \rho X^k \rho Y^\ell \ . \tag{7.6.3}$$

Доказательство. Непосредственное вычисление левой части по определению 9 с учетом симметрий и (7.5.1–14) дает правую часть требуемого вида плюс слагаемые $\mathcal{U}^i_{,k} A^k + \mathcal{U}^i_{|k} B^k$, причем окажется, что A^k есть альтернация по t, ε производной $\partial_t \partial_\varepsilon p^k$, а B^k – производной $\partial_t \partial_\varepsilon \xi^k$, т.е. нули.

7.7. Параллельный перенос и геодезические. С параллельным переносом возникает та трудность, что геометрически интересны только горизонтальные пути, т.е. $\gamma \subset M_*$, тогда как дифференцирование определено только на касательных к путям $\Gamma \subset TM$. Поэтому нужна операция подъема пути γ в TM (лифт).

Определение 14. Называем путь $\Gamma: [0,1] \to TM$ фундаментальным подъемом горизонтального пути $\gamma: [0,1] \mapsto M_*$ и обозначаем $\Gamma = P\gamma$ если: 1) $\pi\Gamma = \gamma$, 2) $\Gamma(0) = (\gamma 0, \gamma_* 0)$, 3) для любого $\mathcal{U} \in \Pi M$ горизонтальная производная от $\mathcal{U}$ равна нулю тогда и только тогда, когда ковариантная производная $\nabla_{(P\gamma)_*}\mathcal{U} = 0$.

Теорема 14. Для всякого горизонтального пути γ существует и притом единственный подъем $\Gamma = P\gamma$, причем $\rho(P\gamma)_* = 0$.

Доказательство. По определению 9 получаем $\nabla_{\Gamma_*}\mathcal{U} = \mathcal{U}_{,k}\pi_*\Gamma^k_* + \mathcal{U}_{|k}\rho\Gamma^k_*$. Поэтому условие 3 в определении 14 означает, что $\nabla_{\Gamma_*}\mathcal{U} = 0 \Rightarrow \mathcal{U}_{|k}\rho\Gamma^k_* = 0$ для произвольного тензора $\mathcal{U}_{|k}$, а потому $\rho\Gamma_* = \rho(P\gamma)_* = 0$. Из (7.3.4) усматриваем, что это условие при данном $\gamma = (p^\kappa(t))$ приобретает вид дифференциального уравнения относительно $\xi(t)$ вида

$$\frac{d\xi^i}{dt} + N^i_k(p(t), \xi(t))\frac{dp^k}{dt} = 0 \ , \tag{7.7.1}$$

которое по общим теоремам имеет решение, а из-за фиксации начального значения условием 2 – единственное.

Определение 15. Говорим, что вектор $X \in \Pi^1_0 M$ паралельно переносится вдоль горизонтального пути γ, если $X(t)\in T_{\gamma t}M$ при всяком t и $\nabla_{\dot{p}\gamma_*}X=0$ вдоль γ. Говорим, что $\gamma\subset M_*$ есть горизонтальная геодезическая, если ее касательный вектор γ_* параллельно переносится вдоль γ, т.е. $\nabla_{(p\gamma)_*}\gamma_*\big|_\gamma=0$.

Теорема 15. Уравнение горизонтальной геодезической в пространстве финслер-аффинной связности имеет вид

$$\ddot{p}^i+F^i_{jk}(p(t),\dot{p}(t))\dot{p}^j\dot{p}^k=0, \qquad (7.7.2)$$

и через каждую точку проходит в данном направлении единственная горизонтальная геодезическая, если $\dot{p}=\frac{dp}{dt}$ попадает в область определения $\mathfrak{M}$ финслерова многообразия. Уравнение параллельного переноса

$$\frac{dX^i}{dt}+F^i_{jk}(p(t),\chi(t))X^j\frac{dp^k}{dt}=0, \qquad (7.7.3)$$

и для всякого вектора $X_0\in T_{\gamma 0}M$ и горизонтальной кривой γ существует единственный вектор $X_t\in T_{\gamma t}M$, являющийся результатом переносения X_0 вдоль γ. Здесь $\chi(t)$ находится как решение уравнения (7.7.1).

Доказательство тривиально.

Отметим, что в формулах параллельного переноса вдоль горизонтального пути нигде не фигурирует ни вертикальная связность $\underset{=}{C}$, ни производные по векторному переменному.

Теорема 16. Пусть в пространстве финслер-аффинной связности $(\mathfrak{M},\nabla)$ фиксирована в $M_*=\pi\mathfrak{M}$ некоторая двумерная поверхность $\Sigma=p(u,v)$ (причем u и v образуют положительную ориентацию), и горизонтальный путь $\gamma\subset M_*$ лежит на Σ. Пусть γ замкнут, т.е. $\gamma s=\gamma 0=p$ (s взято наименьшее из таких). Пусть вектор $X\in\Pi^1_0 M$ переносится параллельно вдоль γ и $\Delta X=X(s)-X(0)$ есть приращение перенесенного вектора при обносе по замкнутому контуру. Тогда приближенно

$$\Delta X^i\approx\left(R^i_{jk\ell}X^j\partial_u p^k\partial_v p^\ell-X^jC^i_{jk}N^k_{[k;\ell]}\partial_u p^k\partial_v p^\ell\right)\iint\limits_{\mathcal{D}}du\,dv, \qquad (7.7.4)$$

где $\mathcal{D}$ – область на Σ, ограниченная контуром γ, значения p, X, $\partial_u p$, $\partial_v p$ взяты в точке $t=0$, а $\underset{=}{R}$, $\underset{=}{C}$ и $\underline{N}$ вычислены в точке $(\gamma 0,\gamma_* 0)\in\mathfrak{M}$.

Доказательство. Проведем существенную часть доказательства, отсылая за теми уточнениями, которые требуются уже в аффинном случае и не специфичны для финслерова, к учебнику [47]. Согласно определению 15 $\nabla_{(p\gamma)_*}X=0$ вдоль γ, так что в силу (7.7.3)

$$\frac{dX^i}{dt} = - F^i_{jk}\left(p(t), \tilde{x}(t)\right) X^j \frac{dp^k}{dt} \quad , \qquad (7.7.5)$$

где $(p(t), \tilde{x}(t))$ берутся вдоль поднятого пути P_γ. Кроме того, выполнено (7.7.1), так что, обозначив $\Delta p^k = p^k(t) - p^k(0)$, получим в первом приближении

$$\Delta X^k \approx - F^i_{jk}(0) X^j(0) \Delta p^k \quad , \qquad (7.7.6)$$

$$\Delta \tilde{x}^h \approx - N^i_k (0) \Delta p^k \quad . \qquad (7.7.7)$$

Интегрируя (7.7.5), подставляем под знаком интеграла вместо $X^j(t)$ его значение $X^j(0) + \Delta X^j$ из (7.7.6), а вместо $F^i_{jk}(t)$ – его разложение в ряд. Ограничиваясь слагаемыми первого порядка и учтя (7.7.7), получим

$$\Delta X^i \approx - \int_0^1 \left(F^i_{jk}(0) + \partial_l F^i_{jk}(0) \Delta p^l - \dot\partial_l F^i_{jk}(0) \Delta \tilde{x}^l - F^i_{gk}(0) F^g_{jh}(0) \Delta p^h\right) X^j(0) \frac{dp^k}{dt} dt \,, \quad (7.7.8)$$

что с учетом замкнутости контура ($\int_0^1 dp^k = 0$), (7.7.7) и (7.3.17) дает

$$\Delta X^i \approx - \left(F^i_{jk:l}(0) - F^i_{gk} F^g_{jl}(0)\right) X^j(0) \oint \Delta p^l \frac{dp^k}{dt} dt \,, \quad (7.7.9)$$

а применение к (7.7.9) формулы Грина $\oint \Delta p^l \frac{dp^k}{dt} dt =$
$= 2 \iint_D \partial_u p^{[k} \partial_v p^{l]} du\, dv$ приводит к

$$\Delta X^i \approx 2 \left(F^i_{j[k:l]} + F^g_{j[k} F^i_{l]g}\right) X^j \partial_u p^k \partial_v p^l(0) \iint_D du\, dv \,.$$

Воспользовавшись (7.5.12), получаем требуемое (7.7.4).

Теорема 17. В пространстве финслер-аффинной связности, если Γ является фундаментальным подъемом какой-нибудь горизонтальной кривой, то вдоль последней

$$[\nabla_X, \nabla_Y] u^i = R^i_{jkl}\, u^j \pi_* X^k \pi_* Y^l + P^i_{jkl}\, u^j \pi_* X^k \rho Y^l \,. \qquad (7.7.10)$$

Здесь R и P вычислены в точке $(p, \tilde{x}) \in \Gamma$ при $p = \gamma t$.

В самом деле, у такой кривой $\rho X = \rho \Gamma_* = \rho (P_\gamma)_* = 0$ и потому по теореме 13 получаем требуемое.

7.8. Замечание о дифференцировании вдоль пути. В римановой (аффинной) геометрии часто встречаются выражения вроде $\nabla_{\gamma_*} \gamma_*(\gamma) = \xi$ (например, так выражается кривизна кривой, таково уравнение движения заряда в электродинамике). В финслер-аффинной связности мы пока встречали аналог таких выражений лишь при нулевой правой части (уравнение геодезических). При ненулевой правой части они приобретают вид пары уравнений, а не одного. В самом деле, при доказательстве теоремы 15 мы по (7.7.1) и $\nabla_{(p\gamma)_*}\gamma_*(\gamma) = 0$ получили пару уравнений

$$\dot{\mathfrak{Z}}^i + F^i_{jk}(p, \mathfrak{Z})\,\mathfrak{Z}^j \dot{p}^k = 0 \ , \qquad (7.8.1)$$

$$\ddot{p}^i + F^i_{jk}(p, \mathfrak{Z})\,\dot{p}^j \dot{p}^k = 0 \qquad (7.8.2)$$

и, лишь пользуясь очевидным существованием решения уравнения

$$\ddot{p}^i + F^i_{jk}(p, \dot{p})\,\dot{p}^j \dot{p}^k = 0 \qquad (7.8.3)$$

и однозначностью всех решений при фиксированных начальных данных $p(0) = p$, $\dot{p}(0) = \mathfrak{Z}(0) = \gamma_* 0$, мы могли заключать, что $\mathfrak{Z} = \dot{p}$, так что оба уравнения сводились к одному. В случае же $\nabla_{p\gamma}\gamma_* = f \neq 0$ вместо (7.8.1–2) получим

$$\begin{cases} \dot{\mathfrak{Z}}^i + F^i_{jk}(p, \mathfrak{Z})\,\mathfrak{Z}^j \dot{p}^k = 0 & (7.8.4) \\ \ddot{p}^i + F^i_{jk}(p, \mathfrak{Z})\,\dot{p}^j \dot{p}^k = f \neq 0 & (7.8.5) \end{cases}$$

и $\mathfrak{Z} = \dot{p}$ очевидно не удовлетворяет этой системе. (В случае обычной аффинной связности в силу $F^i_{jk}(p, \mathfrak{Z}) = F^i_{jk}(p)$ можно игнорировать "ненужное" решение $\mathfrak{Z}$ по $\dot{\mathfrak{Z}}^i + F^i_{jk}(p)\,\mathfrak{Z}^j \dot{p}^k = 0$, воспользуясь решением второго $\ddot{p}^i + F^i_{jk}(p)\,\dot{p}^j \dot{p}^k = f$.) Поэтому в финслеровом случае возникают дополнительные трудности с определением кривизны, силы и т.п.

§8. ФИНСЛЕРОВА КИНЕМАТИКА И УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

8.1. **Первое определение финслеровой кинематики.** В §2–3 мы видели, что векторная метрическая кинематика может быть введена тремя разными определениями – $ВК_{1-9}$, $МВК_{1-7}$ и $ВК_{1-4} + СО_{1-3}$. Еще разнообразнее можно варьировать определение финслеровой кинематики. Сейчас мы предложим дефиницию, максимально близкую определению пространства-времени общей теории относительности: в гладком многообразии $M_n = (M, T, F)$ в каждом касательном пространстве $T_p M$ задана метрика $s = \sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$ специальной теории относительности, а свойства этой метрики в разных точках таковы, что ее метрический тензор ковариантно-постоянен. В этом определении не фигурирует как априорное отношение порядка, оно получается позже (§0) из метрики.

Определение 1. Финслеровой кинематикой называем структуру рода $(\mathfrak{M}, \nabla, \tau)$, где: 1) $(\mathfrak{M}, \nabla)$ есть пространство финслер-аффинной связности, см. (7.4.1); 2) τ есть некоторая фиксированная функция $\tau : TM \mapsto \{-\infty\} \cup [0, \infty)$, причем как $\mathfrak{M} \to (0, \infty)$ она гладкая финслерова, т.е. $\tau \in \Pi_0^0 M$ на $int\, dom\, \tau$, см. определение 4 §7 и ВК$_5$; 3) при каждой фиксированной $p \in M_n$ функция $\tau_p(Z) = \tau(p, Z)$ как $\tau_p : T_p M \mapsto \{-\infty\} \cup [0, \infty)$ удовлетворяет аксиомам МВК$_{1-5}$ из §2.4; 4) если сопрягающее отображение $\underline{h}$, построенное по τ (3.2.1), невырожденно, то финслерова кинематика называется регулярной*); 5) ковариантное дифференцирование (определение 7 §7) ∇_Φ по любому $\Phi \in T_{\mathfrak{M}}\mathfrak{M}$ и сопрягающее отображение $\underline{h}$ коммутируют в любой $p \in M_n$, т.е.

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{\nabla} & T_p M \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ T_p^* M & \xrightarrow{\nabla} & T_p^* M . \end{array} \tag{8.1.1}$$

Преимущественно мы будем заниматься регулярными финслеровыми кинематиками, но определение сформулировано применительно и к нерегулярным. В силу теоремы 3 §2.4 мы получаем, что в каждом $T_p M$ задано отношение порядка $<_p$ (т.е. конус O_p^+), превращающее касательное пространство $T_p M$ в векторную кинематику, а $(T_p M, <_p, \tau_p)$ в векторную метрическую кинематику. При этом

$$X \in O_p^+ \subset T_p M \iff \tau(p, X) > 0 \quad , \tag{8.1.2}$$
$$X \in \partial O_p^+ \iff \tau(p, X) = 0 \quad .$$

В определении 4 §7 отмечалось, что $\mathfrak{M} \subset TM$ не совпадает со всем TM, и пример тому дает теорема 10 §3. Очевидно, что из $X \in O_p^+$ следует $(p, X) \in dom\, \tau$ и потому $\{O_p^+ \mid p \in M_n\} \subset \mathfrak{M}$. Обратное, как видно из той же теоремы, не всегда верно, но связная компонента $\mathfrak{M}$, содержащая $OM = \{O_p^+ \mid p \in M_n\}$, обязана совпадать с $\overline{OM}$. В самом деле, если $X \in O_p^+$, но $Y \in T_q M \setminus O_q^+$, то по связности найдется путь в TM от (p, X) к (q, Y) и на нем точка (r, Z) при $Z \in \partial_r O^+$. Но по теореме 8 §2 τ_r при $Z \in \partial O_r^+$ не дифференцируема, т.е. $\tau(r, Z) \notin \Pi_0^0 M$. Поэтому для связной компоненты

$$\mathfrak{M} = OM = \{O_p^+ \mid p \in M_n\} \quad . \tag{8.1.3}$$

---

*) В статье автора [43] допущена неясность в этом пункте. В определении ничего не сказано об условии регулярности, в лемме 1 и теореме 1 пропущено условие регулярности. Все последующие теоремы относятся к регулярным пространствам, а примеры – как к регулярным, так и нерегулярным.

В дальнейшем мы почти исключительно работаем только со связной компонентой.

Так как в каждой точке $p \in M_\alpha$ имеется векторная кинематика $(T_p M, <_p, \tau_p)$, то все определения и теоремы гл.1–2, относящиеся к векторным кинематикам, автоматически переносятся на финслерову кинематику, точнее, на объекты в касательном пространстве: положительный конус $O_p^+ \subset T_p M$; скалярное произведение векторов $X \in O_p^+$, $Y \in T_p M$; ортогональность; сопрягающее отображение h; собственное пространство $X \wedge T_p M$; сопряженная метрика $\tau^* : O^{*+} \to \mathbb{R}$; дифференцируемые кривые, в частности, времениподобные кривые и их длина (6.1.1); собственное пространство $\gamma_* \wedge T_\gamma M$ вдоль мировой линии частицы γ; гессианная метрика; площадь двумерной поверхности; энергия-импульс материальной точки. Мы не станем переформулировать их. Определения же, фигурировавших в терминах аффинных кинематик, вроде "точка $p \in M_\alpha$ предшествует точке $q \in M_\alpha$", мы коснемся позже, в 99.

8.2. Формулы картановой связности. Финслер-аффинную связность, согласующуюся с метрикой, принято именовать картановой (как аффинную, согласующуюся с метрикой, – римановой).

Теорема 1. Во всякой финслеровой кинематике сопрягающее отображение как финслеров тензор на $H_n^1 M$ ковариантно постоянно и в любой карте верны формулы:

$$\partial_k h_{ij} = N_k^s \dot{\partial}_s h_{ij} + h_{is} F_{jk}^s + h_{sj} F_{ik}^s , \tag{8.2.1}$$

$$\dot{\partial}_k h_{ij} = h_{is} C_{jk}^s + h_{sj} C_{ik}^s . \tag{8.2.2}$$

Доказательство. Из диаграммы (8.1.1) следует

$$\forall \Phi \, \forall X \quad \nabla_\Phi (hX) = h \nabla_\Phi X \tag{8.2.3}$$

при произвольных $X \in \mathcal{T}_v^1 M$ и $\Phi \in T\mathfrak{M}$. Значит, по (7.3.9)

$$\forall \Phi \quad \nabla_\Phi h = 0 , \tag{8.2.4}$$

откуда применением определения 9 87 с учетом произвольности Φ имеем

$$h_{ij;k} = 0 , \qquad h_{ij\,|k} = 0 , \tag{8.2.5}$$

и используя (7.3.15–17), получаем (8.2.1–2). Здесь и далее мы пользуемся симметрией h_{ij}, F_{jk}^i и C_{jk}^i, не оговаривая этого.

Так как с помощью h_{ik} можно опускать индексы, а в регулярном случае существует обратный h^{ik}, с помощью которого можно подымать их, то наряду с C^i_{jk} появляются C_{ijk} и т. п. Условимся всегда, когда не оговорено противного, опущенный индекс писать первым, например

$$C_{ijk} = h_{is} C^s_{jk} \quad . \tag{8.2.6}$$

Теорема 2. Если выполнены пункты 2–4 определения 1, то на $\mathfrak{M}$ существует единственная финслер-аффинная связность (ρ, ∇), удовлетворяющая требованиям пунктов 1 и 5 того же определения. При этом

$$C^i_{jk} = \frac{1}{2} h^{is} \dot\partial_s h_{jk} = \frac{1}{4} h^{is} \dot\partial_s \dot\partial_j \dot\partial_k \tau^2 \quad , \tag{8.2.7}$$

$$F^i_{jk} = \gamma^i_{jk} - C^i_{js} N^s_k + C_{jkr} N^{ir} - C^i_{ks} N^s_j \quad , \tag{8.2.8}$$

$$2N^i_k(p, z) = \dot\partial_k (\gamma^i_{rs} z^r z^s) \quad , \tag{8.2.9}$$

где обозначено

$$2\gamma_{ijk} = \partial_j h_{ik} + \partial_k h_{ij} - \partial_i h_{jk} \tag{8.2.10}$$

и значения всех функций берутся в точке $(p, z) \in \mathfrak{M}$. Кроме того верны

$$z^s C^i_{sj}(p, z) = 0 \ , \qquad C^i_{jk} + z^h \dot\partial_j C^i_{hk} = 0 \tag{8.2.11}$$

и прочие формулы, получающиеся дифференцированием этих.

Такую связность обычно называют картановой. Доказательство. Из (8.2.2), циклируя по i, j, k, применяя определение 4 §3 и пользуясь симметрией производных и существованием обратного к h тензора, получаем (8.2.7). Из (3.2.5) следует первая формула в (8.2.11), а дифференцируя ее, получим вторую. Так как в силу (8.2.7) C_{ijk} симметричен по всем индексам, то порядок индексов в (8.2.11) безразличен. Циклируя (8.2.1), получим $2F_{jik} = 2\gamma_{jik} - N^s_k \dot\partial_s h_{ij} - N^s_i \dot\partial_s h_{jk} + N^s_j \dot\partial_s h_{ik}$, а так как по (8.2.7) $\dot\partial_k h_{ij} = 2C_{kij}$, то доказано (8.2.8). Используя (8.2.11), заключаем из (8.2.8), что $\gamma^i_{rs} z^r z^s = F^i_{rs} z^r z^s$, после чего ссылка на (7.4.1) завершает доказательство.

Следствие. Определение финслеровой кинематики равносильно такой конструкции. Дано семейство K_p векторных метрических регулярных кинематик $K_p = (E_p, O^+_p, \tau_p)$, занумерованных параметром p. При этом U_P наделено некоторой топологией T и гладкостью F так, чтобы (U_P, T, F) являлось гладким n-многообразием, а UO^+_p при этом оказалось финслеровым многообразием над U_P и $\tau(p, X) = \tau_p(X)$ было бы финслеровой функцией на UO^+_p.

Пожалуй, технически самое важное в теории картановой связности то, что τ – положительно-однородная степени 1 функция, в силу чего h – положительно-однородная степени ноль. Формулы (8.2.11) играют решающую роль в упрощении выкладок и результатов. Мацумото даже на уровне финслеровых дометрических связностей выделяет соответствующий случай как наиболее плодотворный. Заметим, что стандартные монографии по финслеровым пространствам [28,51] ограничиваются случаем выпуклой метрики, так что у них $\underline{h}$ имеет сигнатуру (+ + . . . +). Мы сосредоточиваем наше внимание на случае вогнутой τ, т.е. $\underline{h}$ с сигнатурой (+ − . . . −). Не представляет труда в таком же стиле рассмотреть случай, когда метрика – произвольная седловая функция, т.е. $\underline{h}$ сигнатуры (+ . . . + − . . . −). Отказ же от положительной однородности метрики сразу разрушил бы структуру теории.

Замечание. В римановой геометрии ковариантная постоянность метрического тензора g_{ik} равносильна тому, что при параллельном переносе вектора X длина его $\sqrt{g_{ik}X^iX^k}$ сохраняется. В финслеровой геометрии согласно (3.2.5) значение вектора входит аргументом в значение тензора: $\tau^2(X) = \sqrt{h_{ik}(p,X)X^iX^k}$, так что можно говорить лишь о переносе по пути вида $\Gamma(\gamma, X)$, $\gamma = \rho(t)$. Вообще говоря, $\Gamma = (\gamma, X) \neq \rho_\gamma$ (см. определения 14–15 §7), а при параллельном переносе $\nabla_{\rho_{\gamma'}} X = 0$, в то время как $\nabla_{\Gamma'} X = 0$ не гарантировано. Если же $\Gamma = \rho_\gamma'$, то выполняется (7.7.1) и в силу финслер-аффинности тогда при указанных в определении 14 §7 начальных условиях решение уравнения (7.7.1) совпадает с геодезической (7.7.2). Это означает, что параллельно переносить с сохранением длины в финслеровой кинематике можно только вектор, касательный геодезической. Перенос же светового вектора вообще может быть не определен, ибо $h(\cdot, X)$ на $X \in \partial O_p^+$ может вырождаться; см. §3.

8.3. Примеры – симплициальная кинематика и ее обобщения. Исходя из формул (3.6.2) и (3.6.4), мы в (8.2.7) сразу получаем для КИП$_{3,1}$:

$$2C^i_{jk} = \left(\frac{2}{n} - \delta_{jk}\right)\left(\delta^i_j + \delta^i_k - \frac{2}{n}\right)\frac{\xi^i}{\xi^j\xi^k}, \tag{8.3.1}$$

причем очевидно, что $\left(\frac{2}{n} - \delta_{jk}\right)\left(\delta^i_j + \delta^i_k - \frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n} - \delta_{ik}\right)\left(\delta^j_i + \delta^j_k - \frac{2}{n}\right)$.

Так как никакие функции в определении τ в КИП$_{3,1}$ не зависят от точки $p \in A_n$, то (8.2.8–10) дают $F^i_{jk} = 0$; $N^i_k = 0$ и соответственно в КИП$_{3,1}$ имеют место формулы $A_{|k} = \partial_k A$, $A^i_{|k} = \partial_k A^i$, $A^i_{j|k} = \partial_k A^i_j + C^i_{hk}A^h_j - C^h_{jk}A^i_h$, а также тривиально обращаются в нуль тензоры $\underline{\underline{T}}$, $\underline{\underline{R}}$, $\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{S}}$, $\underline{\underline{Q}}$ и $\underline{\underline{D}}$. Обращение в нуль тензора $\underline{\underline{S}}$ не тривиально, являясь частным случаем одной глубокой теоремы. Заметим, что при $n = 2$ формулы (8.3.1) дают $C^i_{jk} = 0$, что и должно было ожидать, ибо случай $n = 2$ совпадает с лоренцовой пространственной кинематикой. Формулы показывают, что компоненты связности могут быть корректно определены вне конуса O^+ (вне OM), даже если на границе ∂O^+ они вырождаются.

Введем КИН$_{10}$, обобщающую симплициальную без изменения исходного многообразия; назовем ее вращающейся симплициальной кинематикой и для простоты ограничимся $n = 3$. Пусть в A_3 с обычными аффинными координатами (t, x, y) заданы три вращающихся вектора:

$$\begin{cases} 3\dot\xi^1 = t - x(\cos t + \sin t) - y(\cos t - \sin t) , \\ \dot\xi^2 = x\cos t - y\sin t + \dot\xi^1 , \\ \dot\xi^3 = x\sin t - y\cos t + \dot\xi^1 . \end{cases} \tag{8.3.2}$$

Тогда $\tau = \sqrt[3]{\dot\xi^1 \dot\xi^2 \dot\xi^3} = \tau(p, \dot\xi)$ и (A_3, τ) есть финслерова кинематика, вычисление компонент которой предоставляем читателю.

КИН$_{11}$ – симплициальная кинематика почти в самом общем случае. Это многообразие M_n, на котором задана n-форма объема $e_{1\ldots n}$, т.е. внешне кососимметрический тензор $e: T_pM \times \ldots \times T_pM \to \mathbb{R}$, и выделена некоторая карта $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$. Для произвольного вектора $X \in T_pM$, представление которого $X = X^\alpha \partial_\alpha$ в этой карте имеет положительные компоненты, полагаем $\tau(p, X) = (X^1 \cdot \ldots \cdot X^n)^{1/n}$; см. Асанов [3]. Очевидна связь с тетрадной теорией.

8.4. Примеры – орициклические кинематики. Отталкиваясь от формул (3.7.4–7), получаем для КИН$_{2,4}$ в целом виде

$$\begin{aligned} C^i_{jk} = \Big(&-2\alpha(1+\alpha-\alpha^2)x^i x_j x_k - \alpha(2\alpha^2-1)x^i(x_j a_k + x_k a_j) + 2\alpha^3 x^i x_j x_k + \\ &+ \frac{2\alpha^4(2-\alpha)}{1+\alpha} a^i x_j x_k - 4\alpha^4 a^i(x_j x_k + x_k a_j) + 2\alpha^3 a^i a_j a_k\Big)\tau^{-2} + \\ &+ \alpha\tau^2\Big(x^i + \frac{a^i}{\alpha+1}\Big) g_{jk} + \alpha(x_j - a_j)\delta^i_k + \alpha(x_k - a_k)\delta^i_j \end{aligned} \tag{8.4.1}$$

в обозначениях (3.7.3).

Более содержательные орициклические примеры получаются, если мы будем строить их над общерелятивистской метрикой $g_{ik}(p)$. В частности, пусть $g_{ik}(t, r, \theta, \varphi)$ – метрика Шварцшильда

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1-\frac{m}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c^2(1-\frac{m}{r})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r^2}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{r^2\sin^2\theta}{c^2} \end{pmatrix} \tag{8.4.2}$$

Тогда КИН$_{12}$ есть финслерова кинематика с метрикой

$$\tau(p,dp)=\left(1-\frac{m}{r}+\frac{v}{c}\right)^{\alpha}\left(\left(1-\frac{m}{r}\right)dt^2-\frac{dr^2}{c^2\left(1-\frac{m}{r}\right)}-\frac{r^2d\theta^2}{c^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2}{c^2}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}(dt)^{\alpha},\tag{8.4.3}$$
$$v=\frac{dr}{dt},\quad -1<\alpha<1,\quad A=\left(1,-c\left(1-\frac{m}{r}\right),0,0\right).$$

Формулы (3.7.3-7) и (8.4.1) сохраняют свою силу, но, конечно, ξ^{α}_{β} и $\bar{N}$ уже не обращаются в нуль, и должны находиться из (8.2.8-9). Возможно, что $\alpha=\alpha(p)$, плодотворен случай $\alpha=\alpha(r)$ при $\lim\limits_{r\to m}\alpha(r)=1$, $\lim\limits_{r\to\infty}\alpha(r)=0$ (см. §9.2). Анизотропия (инфинитезимальная) этой кинематики, названной нами финслер-шварцшильдовой кинематикой [45], совпадает с анизотропией (глобальной) римановой шварцшильдовой кинематики: выделенный световой вектор A направлен к центру $r=0$.

По наиболее распространенной в космологии метрике
$$g_{ik}dp^idp^k=dt^2-\left(\frac{R(t)}{k(r)}\right)^2(dx^2+dy^2+dz^2),\tag{8.4.4}$$
$$r^2=x^2+y^2+z^2,\qquad k(r)=\left(1+\frac{\kappa r^2}{4}\right)c^2,\quad \kappa=-1,0,1,$$
Робертсона-Уолкера-Фридмана построим КНН$_{13}$ – финслер-фридманов мир с вращающейся (в плоскости $z=0$) анизотропией
$$\tau(p,dp)=\left(1-\frac{R}{k}(u\cos\mu(t)+v\sin\mu(t))\right)^{\alpha}\left(dt^2-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{R}{k}\right)^2(dx^2+dy^2+dz^2)\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}(dt)^{\alpha},\tag{8.5.5}$$
$$u=\frac{dx}{dt},\quad v=\frac{dy}{dt},\quad A=\left(1,\frac{k}{R}\cos\mu(t),\frac{k}{R}\sin\mu(t),0\right),$$
частным случаем которого является КНН$_{14}$ с фиксированной анизотропией вдоль оси абсцисс при $\mu=0$. Здесь тоже возможно $\alpha=\alpha(p)$, причем перспективно полагать $\alpha=\alpha(t)$ с соответствующими граничными условиями; см. §9.2. Подобные гибриды можно разнообразно варьировать.

8.5. Кривизны и кручения картановой связности. Формулы (7.5.7-28) значительно упрощаются для финслеровых кинематик (общее – во всякой картановой связности) в силу теоремы 2. Но еще важнее возможность опускать индекс, образуя новый тензор по правилу (8.2.6).

Теорема 3. В финслеровой кинематике выполняются соотношения
$$R^i_{jk}(p,\dot z)=\dot z^h R^i_{hjk},\tag{8.5.1}$$
$$R_{(ij)kl}=P_{(ij)kl}=S_{(ij)kl}=0\tag{8.5.2}$$
(т.е. все три тензора кривизны кососимметричны по первой паре индексов),

$$P^i_{jk}(p,Z) = Z^h \partial_k F^i_{hj} = Z^h P^{\;\;i}_{hjk} \quad , \qquad (8.5.3)$$

$$P_{ijkl} = 2C_{kl[j,i]} + 2C_{sk[i}P^s_{j]l} \quad , \qquad (8.5.4)$$

$$Z^h P_{hkj}(p,Z) = 0 \quad , \qquad (8.5.5)$$

$$P^i_{kk}(p,Z) = Z^j C^{\;\;i}_{hk,j} \quad . \qquad (8.5.6)$$

Доказательство. (8.2.11) применительно к (7.5.17) дает (8.5.1). Для получения (8.5.2) надо воспользоваться тождествами Риччи вроде (7.5.15) для h_{ij}, учесть, что он симметричен и ковариантно постоянен по теореме 2, а потому левая часть равна нулю, и от всей формулы остается $0 = -h_{is}R^s_{jkl} - h_{sj}R^s_{ikl}$, что как раз и есть первая формула (8.5.2). Аналогично для P и S. Для получения (8.5.3) достаточно применить к (7.5.13) соотношения (7.3.17), (7.4.1), (7.5.17) и (8.2.11), помня, что Z от p не зависит. Из (7.5.20), пользуясь симметриями и циклируя по i, h, j, получим $C_{hki,j} - C_{ikj,i} + P_{ijhk} + C_{shj}P^s_{ik} - C_{skh}P^s_{jk} = 0$, т.е. (8.5.4). Применяя теорему 8 §7 к (7.5.17), получаем (8.5.5). Свернув (8.5.4) с Z^j, заметив, что $C_{hkj,l}Z^j = 0$ и использовав (8.5.5), получим (8.5.6).

Подчеркнем, что P_{ijkl} в отличие от R_{ijkl} и S_{ijkl} не кососимметричен по последней паре индексов, так что место свертки в (8.5.5) существенно.

Теорема 4. Пусть в финслеровой кинематике фиксирована некоторая двумерная поверхность $p(u,v) \subset M_n$, а на ней – некоторое семейство горизонтальных путей $\gamma \subset p(u,v)$, замкнутых в точке p, сходящееся к p. Тогда предел отношения приращения ΔX вектора $X = \gamma_* U$ при параллельном обносе по контуру γ к заметенной площади S контура дается формулой

$$\lim \frac{\Delta X^i}{S} = \frac{R^i_{jkl}(p,X)X^j \partial_u p^k \partial_v p^l}{\sqrt{|h_{ik}h_{jl}(p,X)\partial_u p^i \partial_u p^j \partial_v p^k \partial_v p^l|}} \quad . \qquad (8.5.7)$$

Доказательство. Формула (7.7.4) упрощается за счет (8.2.11), а используя (3.8.2), приводим ее к указанному виду, т.к. при переходе к пределу в точке p можно подынтегральное выражение вынести за знак интеграла значением в этой точке.

Теорема 5. Пусть в финслеровой кинематике задана вариация в классе кривых с закрепленными концами некоторой кривой Γ, являющейся фундаментальным подъемом некоторой горизонтальной кривой γ (в частности, геодезической). Тогда вдоль γ

выполняются тождества:

$$\nabla_Y \pi_* X - \nabla_X \pi_* Y = 0 \quad , \qquad (8.5.8)$$

$$h_{ij} \pi_* X^i [\nabla_X , \nabla_Y] \pi_* Y^j = R_{ijkl} \pi_* X^i \pi_* Y^j \pi_* X^k \pi_* Y^l \quad . \qquad (8.5.9)$$

Доказательство. Непосредственно по определению в §7 имеем

$$\nabla_Y \pi_* X^i = \partial_t \pi_* X^i + F^i_{jk} \pi_* X^j \pi_* Y^k + C^i_{jk} \pi_* X^j \rho Y^k ,$$

$$\nabla_X \pi_* Y^i = \partial_s \pi_* Y^i + F^i_{jk} \pi_* Y^j \pi_* X^k + C^i_{jk} \pi_* Y^j \rho X^k ,$$

а по (7.6.2) $\partial_s \pi_* Y^i = \partial_s \partial_t p^i = \partial_t \pi_* X^i$, так что с учетом симметрий $\nabla_Y \pi_* X^i - \nabla_X \pi_* Y^i = C^i_{jk} \pi_* X^j \rho Y^k - C^i_{jk} \pi_* Y^j \rho X^k$. Поскольку C^i_{jk} вычисляются вдоль кривой $\Gamma = (\gamma, \gamma_*)$, у которой $\rho \Gamma_* = 0$, и $\gamma_* = \pi_* X$, то по (8.2.11) первое слагаемое в правой части обратится в нуль, как и второе слагаемое ($\rho X = 0$). Итак, мы получили (8.5.8). Для доказательства (8.5.10) прибегнем к теореме 13 §7, положив $U^i = \pi_* Y^i$. Домножая, получим в правой части $R_{ijkl} \pi_* X^i \pi_* Y^j \pi_* X^k \pi_* Y^l + P_{ijkl} \pi_* X^i \pi_* Y^j \pi_* X^k \rho Y^l$, причем R_{ijkl} и P_{ijkl} вычислены в точках (γ, γ_*) вдоль P_Y и $\gamma_* = \pi_* X$. Поэтому применимы (8.5.2–3) и второе слагаемое принимает вид $- P_{jkl}(\gamma, \gamma_*) \gamma_*^k \pi_* Y^j \rho Y^l$, а согласно (8.5.5) это равно нулю, чем завершено доказательство.

Главное содержание теорем 4–5 в том, что геометрически интересные объекты в финслеровой кинематике удается выразить посредством единственного (из трех) тензора кривизны P_{ijkl} внешне так же, как в римановой геометрии.

8.6. Риманова и риччиева кривизны финслеровой кинематики. Для определения римановой кривизны финслерова пространства в данной точке $(p, X) \in \mathfrak{M}$ и в данном двумерном направлении $A \subset T_p M \times T_p M$ возьмем несколько специальные 2-поверхность, фигурирующую в теореме 4, и вспомним определение угла в §3.

Определение 2. Пусть A – двумерное направление в $T_p M$, в котором имеется времениподобный вектор $X \in O^+_p$. Пусть касательная двумерная плоскость к Σ из теоремы 4 совпадает с A. Пусть φ – угол, на который повернулся относительно X вектор $X + \delta X$ при описанном там переносе по контуру. Тогда $\lim\limits_{S \to 0} \frac{\varphi}{S}$ называется римановой (или секционной) кривизной финслеровой кинематики в точке $\mathfrak{p} = (p, X)$ в направлении $A \subset T_p M \times T_p M$ и обозначается $K(\mathfrak{p}, A)$. См. рис.13.

Замечание. Знак в определении $K(\mathfrak{p}, A)$ выбран нами так чтобы то пространство, в котором имеются геодезические двуугольники (например, антидеситтерово пространство), имело бы положительную кривизну. Этот выбор имеет свои неудобства (ср. знак в теореме 6 ниже), и в римановой геометрии часто пространством положительной кривизны называется пространство де Ситтера, так что антидеситтерово оказывается отрицательной кривизны. Для перехода к этой терминологии достаточно в определении 2 заменить φ на $-\varphi$.

Теорема 6. Риманова кривизна финслеровой кинематики в точке p в направлении, задаваемом простым бивектором $U \wedge V$, если это направление содержит вектор X, существует и равна

$$K(P_p, X); U\wedge V) = \frac{R_{ijkl}(p,X)\, U^i V^j U^k V^l}{|h_{ik} \wedge h_{jl}(p,X)\, U^i V^j U^k V^l|} . \qquad (8.6.1)$$

Доказательство. Выбираем Z ортогонально X в 2-плоскости $\partial_u p \wedge \partial_v p$ так, чтобы X и Z образовали положительную ориентацию. Используя (3.8.10) и учтя, что у нас $Y = X + \Delta X$, $sh \approx \varphi$, можем записать

$$\varphi \approx \frac{-h_{is}(X)\,\Delta X^i Z^s}{\sqrt{h_{ik}(X)(X^i+\Delta X^i)(X^k+\Delta X^k)}\,\sqrt{-h_{ik}(X)\, Z^i Z^k}} , \qquad (8.6.2)$$

что по пренебрежении бесконечно малыми высших порядков и в записи посредством гессианной метрики (теорема 15 §3) дает

$$\varphi \approx \frac{-h_{is}(X)\, Z^s \Delta X^i}{\tau(X)\sqrt{H_{ik}(X)\, Z^i Z^k}} . \qquad (8.6.3)$$

Обратим внимание, что в (8.5.7) в знаменателе также стоит значение гессианной метрики на бивекторе $\partial_u p \wedge \partial_v p$. Пользуясь теперь (8.5.7), получаем

$$\lim_{\mathcal{D}\to p} \frac{\varphi}{S_{\mathcal{D}}} = \frac{-R_{ijkl}\, Z^i X^j \partial_u p^k \partial_v p^l}{\tau(X)\sqrt{H_{ik}(X)\, Z^i Z^k}\,\sqrt{H_{ik}(X)\,\partial_u p^i \partial_v p^k}} . \qquad (8.6.4)$$

Бивекторы $\frac{\partial_u p \wedge \partial_v p}{\sqrt{\ldots}}$ и $\frac{X}{\tau(X)} \wedge \frac{Z}{\sqrt{H Z Z}}$ суть единичные и потому равные (ведь по выбору Z эти бивекторы имеют одно направление). Заменяя в (8.6.4) их на равный им $\frac{U\wedge V}{\sqrt{H\, U V}}$, а затем пользуясь в обратном направлении теоремой 15 §3, получаем (8.6.1).

Замечание 1. Вот отличия этой теоремы от риманова случая. Во-первых, в римановом случае вектор X не фигурирует, достаточно указать двумерное направление $U \wedge V$. Во-вторых, на это двумерное направление не налагалось там никаких ограничений. В-третьих, там обносить по контуру можно произвольный вектор ненулевой длины, а здесь – только вектор, который в начальной точке касателен контуру (и тоже не нулевой длины, конечно). Это – ограничение на допустимые контуры.

В нашем доказательстве мы рассматривали семейства контуров, проходящих через p с фиксированной касательной. Несколько видоизменив доказательство, можно было бы говорить о контурах, охватывающих p, лишь бы на них были выделены точки p_k с касательными $\gamma_{\cdot k}(p_k)$, сходящимися к (p, X), и к (p, Z) при $\gamma_k \to 0$, $Z \in U \wedge Y$.

Интерпретационное замечание. Риманову кривизну можно интерпретировать как неустранимую силу, которая действует на наблюдателя Y в направлении (из его собственного пространства) $X \wedge Z$.

В римановом случае формула (8.6.1) служит главным орудием установления топологических свойств риманова пространства. В финслеровом случае можно формально принять (8.6.1) за определение на случай произвольного бивектора $U \wedge V$ при $Y \in U \wedge V$. Можно надеяться на получение топологических результатов типа теорем Рауха, Топоногова, Адамара-Картана, Хокинга. Один из них (теорема Майора) сформулирован в теореме 15 §9. Но трудность, специфически финслерова, заключается в том, что даже класс финслеровых пространств постоянной кривизны остается гипотетичным: существуют ли нетривиальные финслеровы пространства, для которых

$$R_{ijkl}(p, Z) = K(p, Z)\, h_{ik} \wedge h_{jl}(p, Z) \quad , \tag{8.6.5}$$

неизвестно (кроме римановых $K(p, Z) = K(p) = K$ постоянной кривизны).

Определение 3. Тензором Риччи называем $R_{ik} = R^h_{ihk}$, а скаляром Риччи называем $R = h^{ik} R_{ik}$. Аналогично вводится P_{ik}.

Вообще говоря, R_{ik} не симметричен.

Теорема 7. R_{ik}, R и P_{ik} в регулярной финслеровой кинематике удовлетворяют тождеству

$$R^s_{\cdot k,s} - \frac{1}{2} R_{,k} = \frac{1}{2} h^{js} h^{it} \left(P_{\cdot jsl} R^l_{tk} + P_{tjkl} R^l_{ks} + P_{tjkl} R^l_{st}\right) = $$
$$= P^i_j R^l_{ik} - \frac{1}{2} P^{ij}_{kl} R^l_{ij} \tag{8.6.6}$$

Доказательство проводится непосредственно, начиная с тождества Бианки (7.5.25) и кончая антисимметрией (8.5.2).

Неизвестно, существуют ли нетривиальные финслеровы пространства, у которых

$$\Omega_k = P^i_j R^j_{ik} - \frac{1}{2} P^{ij}_{k\ell} R^\ell_{ij} = 0 \quad (8.6.7)$$

Используя (8.5.3,6), можно получить другие варианты для (8.6.6).

Определение 4. Риччиевой кривизной $r(\not p)$ в точке $\not p \in \mathfrak{M}$ называем сумму римановых кривизн в точке $\not p = (p, Z)$ по всем $n-1$ ортогональным 2-направлениям вида $Z \wedge e_\alpha$ (ортогональность в смысле гессиановой метрики §3), $\alpha = 2, \dots, n$.

Теорема 8. Риччиева кривизна в точке $\not p = (p, Z)$ определена корректно и выражается

$$r(\not p) = -\frac{R_{ik}(\not p)\, Z^i Z^k}{h_{ik}(\not p)\, Z^i Z^k} \quad (8.6.8)$$

Доказательство. Начиная с $Z = e_1 r(Z)$, выбираем ортогональный базис e_i, в котором $h_{ik}(p, Z)$ (при фиксированном Z) имеет диагональный вид $+ - \dots -$. Так как квадрат бивектора отрицателен, то в (8.6.1) для абсолютной величины надо писать знак минус. Рассматриваем бивектор $Z \wedge e_\alpha = \delta^{[i}_1 \delta^{k]}_\alpha Z^1$ в каждом из $n-1$ направлений $e_1 \wedge e_\alpha$ при $\alpha = 2, \dots, n$. Согласно (8.6.1) и определению $h \wedge h$ риманова кривизна K_α в направлении $e_1 \wedge e_\alpha$ приобретает вид

$$K_\alpha = K((p, Z), e_1 \wedge e_\alpha) = \frac{R_{1\alpha 1\alpha} Z^1 Z^1}{-h_{11} h_{\alpha\alpha} Z^1 Z^1}$$

(без суммирования по повторяющимся индексам). С учетом диагональности матриц h_{ik} и h^{ik} и кососимметрий $R_{ijk\ell}$ это дает (без суммирования):

$$K_\alpha = -\frac{R^{\alpha}_{\cdot \alpha 1} Z^1 Z^1}{h_{11} Z^1 Z^1},$$

а потому

$$r(\not p) = \sum_{\alpha=2}^{n} K_\alpha = -\frac{\sum_{i=1}^{n} R^i_{1i1} Z^1 Z^1}{h_{11} Z^1 Z^1} = -\frac{R_{11} Z^1 Z^1}{r(Z)},$$

что в инвариантной записи совпадает с (8.6.8). В силу инвариантности результат не зависит от выбора ортогонального базиса.

Даже если бы мы, как сказано выше, понимали бы риманову кривизну как определенную на всех 2-направлениях, мы не могли бы из теоремы 8 получить – вопреки римановой геометрии – что $R = R^i_i$ есть сумма (с некоторым коэффициентом) римановых кривизн по всем ортогональным 2-направлениям: ведь эта сумма от Z не зависит, а $R(\not p)$ зависит.

8.7. Интерпретация. Стандартная интерпретация векторных (аффинных) кинематик переносится на финслеровы: это также презотропное пространство-время, в котором кинематическая метрика меняется от точки к точке, но которое достаточно хорошо в том смысле, что это пространство-время топологически точно описывается координатами, объекты в нем дифференцируемы, и в нем можно выделить инерциальные движения (перемещения) – это горизонтальные геодезические, вдоль которых наблюдатель может обоснованно считать себя покоящимся, а свое собственное $(n-1)$-мерное пространство неизменным. В этом собственном пространстве $\gamma_* \wedge T_\gamma M$ есть два тензора ранга 2: гессианная метрика h_{**}, задающая квадратичную форму от $\gamma_* \wedge X$, и вообще говоря несимметричный тензор, получающийся ограничением $R_{i*j\ell}$ на $\gamma_* \wedge T_\gamma M$, не говоря уже о тензорах, порожденных тензорами кручения вроде $S^h_{ij} R_{h*\ell}$.

То обстоятельство, что в римановом и финслеровом случаях, вообще говоря, нельзя задать карты так, чтобы горизонтальные геодезические выражались бы линейными уравнениями, побуждает интерпретировать их как пространства-времена, в которых действует некоторая имманентная сила. Например, возможность двуугольников (рис.13) ассоциируется с такой интерпретацией: в событии q два (точечных) тела разошлись по геодезическим (например, с ракеты γ_1 брошен с начальной скоростью φ гаечный ключ γ_2 вдали от других тел). Вполне возможно, что под действием взаимного притяжения γ_1 и γ_2 снова встретятся в некотором событии p (т.е. ключ упадет назад и, возможно, пробьет корпус ракеты). С этим связан показанный на том же рисунке перенос вектора X, касательного к γ_1 в p, вдоль контура $\gamma_1^{-1} \cup \gamma_2$ в положение $X+\Delta X$, повернутое на 2φ относительно первоначального. Мы видим, что качественно наличие кривизны позволяет моделировать (эксплицировать) феномен тяготения. Хотя до сих пор не существует удовлетворительного количественного истолкования формулы (8.С.1) и понятия римановой кривизны (скажем, в терминах ускорений, приобретаемых двумя разными телами при свободном падении), хотя наиболее впечатляющих успехов общая теория относительности достигла в космологии,

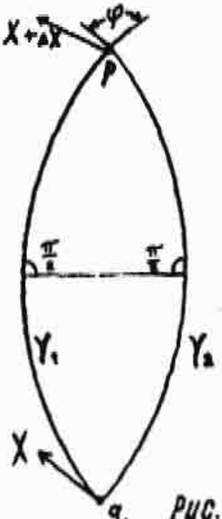


Рис. 13

где речь идет скорее не о [illegible] кинематик, а об их "геометризации", за общей теорией относительности прочно установилась репутация теории тяготения. Иногда они понимаются как синонимы.

В русло этой интерпретации со времен Эйнштейна принято обогащать структуру $(\mathcal{M}, \nabla, \tau)$ пространства-времени неким тензором T_{ik} ранга 2, называемым тензором вещества (материи, энергии, поля, словом, чего-то), так что структура общей теории относительности есть $(\mathcal{M}, \nabla, \tau, T)$. Между R_{ijkl} и T_{ik} постулируются (или выводятся из равносильных постулатов) уравнения, называемые уравнениями Эйнштейна.

8.8. *Уравнения, аналогичные уравнениям Эйнштейна.* Мы предложим вывод уравнений, с одной стороны обобщающих на финслеров случай уравнения Эйнштейна, а с другой – сужающих класс допустимых к рассмотрению финслеровых кинематик. Ограничимся размерностью $n = 4$.

Напомним, что в точке $p \in M_n$ помимо касательного T_pM имеется также пространство бивекторов $B_p = T_pM \wedge T_pM$. При $n = 4$ оно шестимерно. Бивекторная метрика на B_p имеет сигнатуру $(+ + + - - -)$, что позволяет рассматривать B_p как трехмерное комплексное пространство $E_3(\mathbb{C})$ с базисом $\{\varepsilon_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$ и координатами $\xi^\alpha = \mathrm{Re}\,\xi^\alpha + i\,\mathrm{Im}\,\xi^\alpha$ (соответственно вещественная и мнимая части). Можно говорить о базисе $\{\varepsilon_\alpha, i\varepsilon_\alpha\}$. (Обратим внимание, что это – не трехмерное евклидово $R_3(\mathbb{C})$ по той же причине, по какой четырехмерное R_4 в вещественно-мнимом представлении Минковского не есть $R_4(\mathbb{C})$: ведь тут квадрат длины равен $\sum_\alpha (\mathrm{Re}\,\xi^\alpha)^2 - (\mathrm{Im}\,\xi^\alpha)^2 \neq \sum_\alpha \xi^\alpha \bar{\xi}^\alpha$.)

Определение 5. Пусть e_i – ортонормированный базис из T_pM, а ε_α – базис для $E_3(\mathbb{C})$, в котором длина имеет указанный выше вид. Соответствие между базисами $e_k \wedge e_\ell \in B_p$ и $\varepsilon_\alpha \in E_3(\mathbb{C})$ называется каноническим, если для вещественных ε_α числа α, ℓ, k образуют четную перестановку из 1,2,3, а для мнимых $i\varepsilon_\alpha$ всегда $k = 4$, $\ell = \alpha$. Тензоры (отображения) на B_p и $E_3(\mathbb{C})$ называются одинаковыми, если при каноническом соответствии между базисами их компоненты совпадают.

Аксиома Уравнений (АУ$_1$). В $E_3(\mathbb{C})$ существует симметричный эндоморфизм

$$\begin{cases} \varphi^\alpha_\beta : E_3(\mathbb{C}) \to E_3(\mathbb{C}) \\ \varphi^\alpha_\beta = \varphi^\beta_\alpha \end{cases} \qquad (8.8.1)$$

такой, что одинаковый с ним тензор $\Phi^{ij}_{k\ell} \in B_p$ является однородной тензорной функцией от компонент тензора кривизны $R^{ij}_{k\ell}$ на B_p и компонент некоторого тензора T^i_k. "Однородной" означает, что

$$\Phi^{pq}_{rs}\left(\lambda R^{ij}_{k\ell}, \lambda T^h_m\right) = \lambda \Phi^{pq}_{rs}\left(R^{ij}_{k\ell}, T^h_m\right). \qquad (8.8.2)$$

Мы сформулировали $AУ_1$ так, чтобы даже не пользоваться метрическим тензором, но если иметь его в виду, то можно начинать с $R_{ijk\ell}$ и T_{ik}.

Теорема 9. Одинаковый с φ^α_β тензор $\Phi^{ij}_{k\ell} \in B_p$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} \Phi^{23}_{23} & \Phi^{23}_{31} & \Phi^{23}_{12} & \Phi^{23}_{41} & \Phi^{23}_{42} & \Phi^{23}_{43} \\ \Phi^{31}_{23} & \Phi^{31}_{31} & \Phi^{31}_{12} & \Phi^{31}_{41} & \Phi^{31}_{42} & \Phi^{31}_{43} \\ \Phi^{12}_{23} & \Phi^{12}_{31} & \Phi^{12}_{12} & \Phi^{12}_{41} & \Phi^{12}_{42} & \Phi^{12}_{43} \\ \Phi^{41}_{23} & \Phi^{41}_{31} & \Phi^{41}_{12} & \Phi^{41}_{41} & \Phi^{41}_{42} & \Phi^{41}_{43} \\ \Phi^{42}_{23} & \Phi^{42}_{31} & \Phi^{42}_{12} & \Phi^{42}_{41} & \Phi^{42}_{42} & \Phi^{42}_{43} \\ \Phi^{43}_{23} & \Phi^{43}_{31} & \Phi^{43}_{12} & \Phi^{43}_{41} & \Phi^{43}_{42} & \Phi^{43}_{43} \end{pmatrix} \simeq \qquad (8.8.3)$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \left(\mathrm{Re}\,\varphi^\alpha_\beta\right) & \left(-\mathrm{Im}\,\varphi^\alpha_\beta\right) \\ \left(\mathrm{Im}\,\varphi^\alpha_\beta\right) & \left(\mathrm{Re}\,\varphi^\alpha_\beta\right) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Действие отображения $\mathrm{Re}\,\varphi^\alpha_\beta + i\,\mathrm{Im}\,\varphi^\alpha_\beta$ на вектор $\mathrm{Re}\,\xi^\beta + i\,\mathrm{Im}\,\xi^\beta$ очевидно равносильно действию блочной матрицы

$$\begin{pmatrix} \left(\mathrm{Re}\,\varphi^\alpha_\beta\right) & \left(-\mathrm{Im}\,\varphi^\alpha_\beta\right) \\ \left(\mathrm{Im}\,\varphi^\alpha_\beta\right) & \left(\mathrm{Re}\,\varphi^\alpha_\beta\right) \end{pmatrix} \qquad (8.8.4)$$

на вектор $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\xi^\beta \\ \mathrm{Im}\,\xi^\beta \end{pmatrix}$. Подставляя теперь в (8.8.4) канонически соответствующие координаты, получаем (8.8.3).

Тензор Φ в $TM \wedge TM$ можно рассматривать как тензор в $T^2_2 M$, тривиально дополнив его компоненты по правилу $\Phi^{ij}_{k\ell} = -\Phi^{ji}_{k\ell} = -\Phi^{ij}_{\ell k}$.

Теорема 10. При выполнении $АУ_1$ тензор $\Phi^{ij}_{k\ell}$, одинаковый с эндоморфизмом (8.8.1), определяется однозначно и имеет вид

$$\Phi^{ij}_{k\ell} = \lambda R^{ij}_{k\ell} + \mu \delta^{[i}_{[k} R^{j]}_{\ell]} + \nu \delta^{[i}_{[k} T^{j]}_{\ell]} + (\xi R + \pi T)\,\delta^{[i}_{[k}\delta^{j]}_{\ell]}, \qquad (8.8.5)$$

где λ, μ, ν, ξ и π суть произвольные скалярные функции из $\mathring{n}M$, а R^i_j, R и T известные свертки из $R^{ij}_{k\ell}$.

В самом деле, по общим теоремам о тензорных функциях от тензорного аргумента $\Phi^{ij}_{k\ell}$ в любой точке являются некоторым полиномом от $R^{ij}_{k\ell}$, T^i_j и константы δ^i_j со всевозможными последующими свертками, симметрированиями и альтернированиями. Требование однородности сразу же исключает все слагаемые, кроме $R^{ij}_{k\ell}$, $\delta^i_k R^j_\ell$, $\delta^i_k T^j_\ell$, $\delta^i_k \delta^j_\ell R$ и $\delta^i_k \delta^j_\ell T$, а кососимметричность $\Phi^{ij}_{k\ell}$ по каждой паре (i,j) и (k,ℓ) окончательно дает требуемое.

Определение 6. Назовем тензором Вейля для данного финслерова пространства ($n > 2$) выражение

$$C_{ijk\ell} = R_{ijk\ell} - \frac{4}{n-2}\, h_{ik} \wedge R_{j\ell} + \frac{2R}{(n-1)(n-2)}\, h_{ik} \wedge h_{j\ell}. \qquad (8.8.6)$$

Теорема 11. При $n = 4$ и выполнении $АУ_1$ для регулярной финслеровой кинематики имеют место следующие уравнения:

$$R^i_j - \frac{1}{4} R \delta^i_j = \varkappa \left(T^i_j - \frac{1}{4} T \delta^i_j\right), \qquad (8.8.7)$$

$$\lambda(R_{ijk\ell} - R_{k\ell ij}) = h_{ik} \wedge \left(\mu(R_{j\ell} - R_{\ell j}) + \nu(T_{j\ell} - T_{\ell j})\right), \qquad (8.8.8)$$

где $\varkappa$ – функция из $\mathring{n}M$, выражающаяся через λ, μ и ν так:

$$\varkappa(2\lambda + \mu) + \nu = 0. \qquad (8.8.9)$$

При этом условие (8.8.8) равносильно условию

$$C_{ijk\ell} = C_{k\ell ij}. \qquad (8.8.10)$$

Доказательство. Исходя из (8.8.3), вычислим $\Phi^{i\ell}_{\ell j} = \Phi^i_j$ непосредственно. Получаем в силу симметрии $\varphi^\alpha_\beta = \varphi^\beta_\alpha$ матрицу $\Phi^i_k = \delta^i_k \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1} \varphi^\alpha_\alpha$, причем очевидно, что $\Phi = \Phi^i_i = 4 \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1} \varphi^\alpha_\alpha$, и поэтому

$$\Phi^i_k = \frac{1}{4} \Phi \delta^i_k. \qquad (8.8.11)$$

Отсюда, используя определение 3 и теорему 10, имеем $\lambda R^j_\ell + \frac{1}{4}\mu(2R^j_\ell + R\delta^j_\ell) + \frac{1}{4}\nu(2T^j_\ell + T\delta^j_\ell) + \frac{1}{4}\xi R\delta^j_\ell + \frac{1}{4}\pi T\delta^j_\ell = \frac{1}{4}(\lambda R + \frac{3}{2}\mu R + \frac{3}{2}\nu T + 6\xi R + 6\pi T)\,\delta^j_\ell$, откуда с учетом (8.8.0) следует (8.8.7). Фактически встречающиеся в матрице (8.8.3) симметрии можно описать формулой (без суммирования):

$$\Phi^{ij}_{kl} = h^{ii}h^{jj}h_{kk}h_{ll}\Phi^{kl}_{ij} \quad , \qquad (8.8.12)$$

помня про сигнатуру h в рассматриваемой точке в ортогональном приведении. Эта ковариантная запись в инвариантном виде такова: $\Phi^{ij}_{kl} = h^{ip}h^{jq}h_{kr}h_{ls}\Phi_{pq}^{rs}$, что в свою очередь означает

$$\Phi_{ijkl} = \Phi_{klij} \quad , \qquad (8.8.13)$$

а подстановка (8.8.5) в (8.8.13) даст (8.8.8), ибо $h_{ik}\wedge h_{jl}$ симметричен по парам (i,j) и (k,l). Из (8.8.7) сразу получаем

$$h_{ik}\wedge R_{jl} = \varkappa h_{ik}\wedge T_{jl} + \rho h_{ik}\wedge h_{jl} \quad , \qquad (8.8.14)$$

а по (8.8.5) имеем

$$\Phi_{ijkl} = \lambda R_{ijkl} + \mu h_{ik}\wedge R_{jl} + \nu h_{ik}\wedge T_{jl} + \sigma h_{ik}\wedge h_{jl} \; . \qquad (8.8.15)$$

Подстановка (8.8.14) в (8.8.15) приводит к $\Phi_{ijkl} = \lambda C_{ijkl} + \upsilon h_{ik}\wedge h_{jl}$, а использование (8.8.13) с учетом симметричности $h\wedge h$ по переставляемым индексам дает нам (8.8.10). Обратное рассуждение от (8.8.10) и (8.8.14) позволит получить (8.8.13) и тем самым (8.8.8).

Замечание 1. Этот способ вывода уравнений Эйнштейна известен в римановом случае и, конечно, коренится в глубоких соотношениях, на которых основана классификация Петрова. Конечно, в силу структуры риманова $R_{ijkl} = R_{klij}$ уравнение (8.8.8) при этом обращается в тождество, так как тензор T_{ik} выбирается обычно симметричным. Впрочем, симметризация его это вторичная операция, а первоначально он бывает несимметричным [20]. Известно и обратное, что из уравнений Эйнштейна (8.8.7) в римановом случае получается эпиморфизм (8.8.1). Существенное отличие этого подхода от стандартного в том, что $\varkappa$ может быть функцией, а не обязательно константой.

Замечание 2. Так как в римановом случае тензор Вейля всегда симметричен $C_{ijkl} = C_{klij}$, то условие (8.8.10) не выделяет никаких подклассов римановых пространств. В финслеровом случае R_{ijkl}, вообще говоря, не симметричен, а потому и $C_{ijkl} \neq C_{klij}$, так что теорема 11 означает, что ЛУ$_1$ выполняется только в некотором классе финслеровых пространств. Класс этот, кажется, не изучен.

Для соблюдения принципа перманентности при переходе от римановой геометрии к финслеровой, вводим вторую [illegible] уравнений.

АУ$_2$. Фигурирующая в (8.7.7) функция $\varkappa \in \Pi^0_0 M$ есть константа и $\varkappa T + R = \lambda$ также константа.

Эту аксиому можно варьировать, в зависимости от того, полагать ли $\varkappa$ и λ "абсолютными константами" $\varkappa, \lambda \in \mathbb{R}$ или лишь горизонтальными константами $\varkappa_{,i} = \lambda_{,i} = 0$.

Теорема 12. В регулярной финслеровой кинематике $(\mathcal{M}, \nabla, \tau)$, обогащенной тензором $T_{ik} \in \Pi^0_2 M$, при выполнении аксиом АУ$_{1-2}$ выполняются уравнения:

$$R^i_k - \frac{1}{2} R\delta^i_k + \lambda\delta^i_k = \varkappa T^i_k \quad , \tag{8.8.16}$$

$$T^i_{k;i} = \Omega_k \quad , \tag{8.8.17}$$

$$R_{ijkl} - R_{klij} = -4\varkappa\, h_{lk} \wedge T_{[jl]} \quad , \tag{8.8.18}$$

где $\varkappa$ и λ константы, а Ω_k см. в формуле (8.6.7).

Доказательство. Добавив к обеим частям (8.8.7) по $-\frac{1}{2} R\delta^i_k$ и использовав $\varkappa T + R = \lambda$, получим (8.8.16). Применив к формуле (8.8.16) формулу (8.8.6) с учетом постоянства $\varkappa$ и λ, получим (8.8.17). Подставив (8.8.16) в (8.8.8), получим требуемое (8.8.18).

Замечание 1. Из (8.8.16) вытекает, конечно, аксиома АУ$_2$. "Космологическая константа" обычно полагается равной нулю. Используя (8.6.8), можно представить (8.8.16) эквивалентно в виде двух уравнений

$$\varkappa T + R = \lambda \quad , \tag{8.8.19}$$

$$\tau(p, X) + \frac{1}{2} R(\overset{\circ}{p}, X) = \lambda - \varkappa T_{ik} X^i X^k \quad , \tag{8.8.20}$$

где $X \in O^+_p$ любой вектор единичной длины. Величина, стоящая справа, есть "плотность энергии" и имеет четкий физический смысл. Слева $\tau(p, X)$ – сумма кривизн (см. определение 4). В такой записи неважно, симметричны ли тензоры Риччи и вещества; играют роль лишь их симметризованные части.

Замечание 2. В §6.8 уже говорилось, что энергия-импульс в анизотропном мире не обязательно сохраняется. Уравнение (8.8.17) указывает на возможность несохранения тензора вещества, если правая часть не ноль. Представляет интерес изучить, связано ли обращение этой правой части с условием (8.8.10) или нет. В пространствах постоянной кривизны (8.6.5) $\Omega_k = 0$.

В препринте автора [42], уравнения (9.1–5), предложена интерпретация уравнение (8.8.16) в терминах кривизны и классически-физических представлений в римановом случае. Возможно, что для полного описания метрики в финслеровом случае уравнений (8.8.16–18) недостаточно. Ведь в римановом случае еще подразумеваются условия $\partial_k h_{ij} = 0$. Некоторые авторы, например Такано [52], добавляют к (8.8.16–17) (уравнение (8.8.18) в литературе не встречалось) еще аналогичное уравнение

$$\hat{S}_{ik} + \frac{1}{2} S h_{ik} - \hat{\lambda} h_{ik} = \hat{\varkappa} \hat{T}_{ik} \tag{8.8.21}$$

для тензора кривизны в вертикальном пространстве. Предлагались такие же уравнения с заменой $\underset{=}{S}$ на $\underset{=}{P}$. При всем их сходстве с риман-эйнштейновыми, мне представляется, что даже в римановом случае уравнения Эйнштейна недостаточно обоснованы; например, всякое $g(p) = f(p)$, эмпирически оправданное в малой окрестности p, можно заменить равносильно на $g(p) = e^{\alpha f(p)} - 1$, что дает вместо (8.8.16) два других уравнения. Поэтому этой тематикой мы в дальнейшем заниматься не станем.

§9. КРИВЫЕ В ФИНСЛЕРОВОЙ КИНЕМАТИКЕ

9.1. **Экстремали в классе гладких кривых.** Времениподобная кривая $\gamma \subset M_n$, ее натуральная параметризация s и длина ее дуги вводятся определениями §6.1 с заменой A_n на M_n и $\tau(X)$ на $\tau(p, X)$.

Определение 1. Вариацией времениподобной кривой $\gamma \subset M_n$ называем вариацию (7.6.1) кривой $\Gamma = P\gamma$ (где фундаментальный подъем P задан определением 14 §7) при дополнительном условии, что при каждом $\varepsilon > 0$ кривая $\gamma_\varepsilon = \pi\Gamma(\varepsilon)$ времениподобна (т.е. $\tau(\gamma_\varepsilon, \dot\gamma_{\varepsilon *}) > 0$). Вариацией длины пути $arc\ell(\gamma; \alpha, \beta)$ называется соответственно число

$$\begin{aligned} L(\varepsilon) &= arc\ell(\gamma_\varepsilon; \alpha, \beta) - arc\ell(\gamma; \alpha, \beta) = \\ &= \int_\alpha^\beta \tau(p(t,\varepsilon), \pi_* X(t,\varepsilon)) dt - \int_\alpha^\beta \tau(p(t), \pi_* X(t)) dt \end{aligned} \tag{9.9.1}$$

Поля X и Y – те же, что в (7.6.1).

Подчеркнем, что выражение $\tau(p, X)$ бессмысленно, ибо τ задана на $\mathfrak{M}$, а не на $X \in T\mathfrak{M}$. Зато $\mathfrak{M} \subset TM$ и потому возможно $\pi_* X \in \mathfrak{M}$.

Теорема 1. Всякую времениподобную кривую $\gamma \subset M_n$ можно включить в вариацию определения 1 в любом направлении.

Доказательство. Достаточно определить $\gamma : [\alpha, \beta] \times [-1, 1] \longrightarrow M_n$, ибо $\Gamma = P\gamma$ и потому $\Gamma : [\alpha, \beta] \times [-1, 1] \longrightarrow \mathfrak{M}$ тогда определяется однозначно по теореме 14 §7. Рассмотрим $\gamma_\varepsilon t = \gamma(t, \varepsilon) = p^i(t) + \varepsilon \varphi^i(t)$. Так как по условию $\gamma = p(t)$ времениподобна, то в каждой точке

$t \in [\alpha, \beta]$ будет $\tau(p(t), \dot p(t)) > 0$, а потому у каждой точки найдется $\delta > 0$ такое, что при $|\varepsilon| < \delta$ выполняется $\tau(p + \varepsilon\eta, \dot p + \varepsilon\dot\eta) > 0$ при любой $\eta \in C^1$. По компактности $[\alpha, \beta]$ можно выбрать одно δ для всего промежутка $[\alpha, \beta]$. Поэтому произвольная гладкая функция $\eta(t)$ при $\eta(\alpha) = \eta(\beta) = 0$ удовлетворяет определению 1, а направление $\dot p \wedge \dot\eta$ при этом произвольно.

Заметим, что распространить эту теорему на класс гладких каузальных кривых невозможно из-за наличия вращающихся фотонов. Ведь в варьировании самое важное, чтобы исходная кривая γ была внутренней точкой $\gamma = \gamma|_{\varepsilon=0}$ вариации $\varepsilon \in [-1, 1]$.

Определение 2. Времениподобная кривая $\gamma \subset M_n$ называется метрической геодезической в $(\mathcal{M}, \nabla, \tau)$, если она экстремальна для функционала (9.1.1), т.е. $\frac{d}{d\varepsilon} L(0) = L'(0) = 0$.

Теорема 2. Первая производная вариации длины дуги имеет вид

$$L'(\varepsilon) = \int_\alpha^\beta \left(\partial_i \tau(p, \pi_* X) - \frac{d}{dt} \dot\partial_i (p, \pi_* X)\right) \pi_* Y^i(t, \varepsilon)\, dt \tag{9.1.2}$$

в обозначениях (7.6.1) или эквивалентно

$$L'(\varepsilon) = \int_\alpha^\beta h_{ik}(p, \pi_* X) \pi_* X^i \tau^{-1}(p, \pi_* X) \nabla_X \pi_* Y^k(t, \varepsilon)\, dt. \tag{9.1.3}$$

Доказательство. Первое получается непосредственным вычислением $\frac{d}{d\varepsilon} L(\varepsilon) = \int_\alpha^\beta \left(\partial_i \frac{dp^i}{d\varepsilon} + \dot\partial_i \tau \frac{d}{d\varepsilon} \frac{dp^i}{dt}\right) dt$ с известным в вариационном исчислении интегрированием по частям, учетом закрепленности концов и т.п. Второе получается, если по (3.2.5) переписать (9.1.1) в виде $L(\varepsilon) = \int_\alpha^\beta \sqrt{h_{ik}(p, \pi_* X) \pi_* X^i \pi_* X^k}(t, \varepsilon)\, dt$, заменить ∂_ε на ∇_Y (что законно по второму пункту определения 7 §7), учесть ковариантную постоянность финслерова тензора h_{ik} и для перестановки операторов ковариантного дифференцирования применить (8.5.9).

Теорема 3. Уравнения метрической геодезической в финслеровой кинематике могут быть записаны в одном из следующих семи эквивалентных (с указываемыми оговорками) видов:

$$\partial_i \tau\left(p, \frac{dp}{dt}\right) - \frac{d}{dt} \dot\partial_i \tau\left(p, \frac{dp}{dt}\right) = 0, \tag{9.1.4}$$

$$\ddot x^k \tau_{ik}(x, \dot x) + \dot x^k \partial_k \tau_i(x, \dot x) - \partial_i \tau(x, \dot x) = 0, \tag{9.1.5}$$

где обозначено $p = x$, $\frac{dp}{dt} = \dot x$, $\frac{d\dot x}{dt} = \ddot x$ и использованы обозначения определения 4 §3. В натуральной параметризации

$$\ddot x^k h_{ik} + \dot x^k \partial_k (h_{ij} \dot x^j) - \frac{1}{2} \partial_i (h_{jl} \dot x^j \dot x^l) = 0, \tag{9.1.6}$$

$$\nabla_X \underline{h}\, \pi_* \overline{X} = 0 . \qquad (9.1.7)$$

В регулярной финслеровой кинематике:

$$\ddot{x}^i + F^i_{jk}(x,\dot{x})\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 , \qquad (9.1.8)$$

$$\ddot{x}^i + \gamma^i_{jk}(x,\dot{x})\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 , \qquad (9.1.9)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{d\gamma^*}{dt}\right)_i = -\partial_i \tau^*(x,\dot{x}) \\ \gamma_* = \frac{\partial\tau^*}{\partial\gamma^*} \end{cases} , \qquad (9.1.10)$$

где γ^i_{jk} взяты из (8.2.10), τ^* – сопряженная к τ метрика согласно определению 5 §3 и $\gamma^* = \underline{h}\gamma_*$.

Доказательство. (9.1.4) следует непосредственно из (9.1.2) и определения 2, так как по теореме 1 варьируемая кривая является внутренней точкой и применима идеология уравнений Эйлера. Следующее уравнение вытекает из него. Используя (3.2.1) и (2.7.3) и учитывая, что $\tau = 1$ вдоль геодезической в силу выбора параметризации, получаем (9.1.6). Переписав подынтегральное выражение в (9.1.3) в форме $\frac{\pi_* X, \nabla_X \pi_* Y^*}{\tau(\pi_* X)}$ и использовав связь между ковариантным и частным дифференцированием по теоремам 5–6 §7, а затем переходя к дифференцированию по частям и нахождению $L'(\varepsilon)$ при закрепленных концах и в натуральной параметризации, получим (9.1.7). Так как h можно вынести за ∇_X, а в регулярной метрике $hU = 0$ влечет $U = 0$, получаем (9.1.8), а в силу (8.2.8) и (8.2.11) – также (9.1.9). В натуральной параметризации уравнение (9.1.4) означает, что $\partial_i \tau = \frac{d}{dt}\left(h_{ik}\frac{dx^k}{dt}\right) = \left(\frac{d\gamma^*}{dt}\right)_i$, а продифференцировав $h_{ik}h^{kj} = \delta^j_i$, получим $\partial_i\tau = -\partial_i\tau^*$, из чего следует (9.1.10).

Следствие 1. В регулярной финслеровой кинематике метрические геодезические совпадают с горизонтальными геодезическими (7.7.2) на связной компоненте определения $\mathfrak{M}$, содержащей OM.

Это видно из сравнения (9.1.8) с (7.7.2). Конечно, возможно, что финслерова связность ∇ задана и вне конуса O^+. Достаточно даже, чтобы вне конуса существовали F^i_{jk}, что выполняется, например, для всех аффинных кинематик. Но там τ не определена как $\tau \in \Pi^0_0 M$, и потому говорить о метрических геодезических вне OM нельзя.

Следствие 2. Геодезические в регулярной финслеровой кинематике получаются проекцией на M_n интегральных кривых гемильтоновой (динамической) системы в $M \times T^*M$ с гамильтонианом τ^*, т.е. кривых, задаваемых уравнением $\tilde{\gamma}_\bullet = -\tilde{\omega}\, d\tau^*$, где $\tilde{\omega}$ – тензор, обратный к невырожденной кососимметрической метрике ω, причем $\tilde{\gamma}$ и ω взяты на $M \times T^*M$.

Для доказательства достаточно обозначить, как принято, $\gamma^*_k = p_k$, $x^k = q^k$, $\omega = \sum_k dp_k \wedge dq^k$, после чего (9.1.10) приобретут привычный вид

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \tau^*}{\partial q^k}, \quad \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial \tau^*}{\partial p_k}, \tag{9.1.11}$$

из чего видно, что τ^* является гамильтонианом.

Таким образом, анизотропия не вносит ничего нового в гамильтонов подход. В какой мере ограничительно наше требование вогнутости функции τ^* на O^{*+}_p, я не знаю, ибо плохо представляю себе реальные гамильтонианы, с которыми работает физика.

Геодезические, у которых касательная принадлежит границе положительного конуса $\gamma_\bullet \in \partial O^+_\gamma$, не определены метрически потому, что световые кривые нельзя варьировать в классе гладких каузальных, не выходя на границу класса. Ковариантно геодезические в этом случае могут быть не определены потому, что на ∂OM компоненты связности (например, C^i_{jk} в §8.3) могут обращаться в бесконечность. Против последнего можно попробовать применять связность Рунда (см. определение 10 §7), но здесь мы прибегнем к лобовому определению:

Определение 3. Световой геодезической называем ту световую кривую γ, которая удовлетворяет уравнению Эйлера для функционала (9.1.1).

9.2. Обсервации в финслер-шварцшильдовом и других мирах. Исходя из (9.1.6) и (3.7.4), можно найти "поправку", на которую изменяются уравнения геодезических в орициклических кинематиках сравнительно с исходной римановой. Именно, справедлива теорема 4.

Теорема 4. Если финслерова метрика (4.7.1) задана над римановой $g_{ik}(p)$, а уравнения геодезических в последней имеют вид

$$g_{si}\ddot{p}^s + \Gamma_{ijk}\dot{p}^j\dot{p}^k = 0, \tag{9.2.1}$$

то уравнения геодезических в финслеровой кинематике имеют вид

$$\begin{aligned} h_{si}\ddot{p}^s + \Gamma_{ijk}\dot{p}^j\dot{p}^k = \tfrac{1}{2}\partial_i(\sigma^2 - \tau^2) + \\ +\Big(\kappa\partial_k\Big(\frac{g^2}{\tau^2}g_{is}\dot{p}^s - \frac{\sigma^2}{A_s\dot{p}^s}A_i\Big) + \Big(1 - \frac{g^2}{\tau^2}\Big)\partial_k(g_{is}\dot{p}^s) + g_{is}\dot{p}^s\partial_k\Big(\frac{g^2}{\tau^2}\Big)\Big)\dot{p}^k. \end{aligned} \tag{9.2.2}$$

Доказательство сводится к тривиальным выкладкам, и формулы эти мало помогают в конкретных случаях. Ведь обычно $\varkappa = \varkappa(p)$ в (3.7.1), а дифференцирование степенно-показательной функции приводит к громоздким выражениям. В частных случаях удобнее прибегать к уравнениям (9.1.4).

Теорема 5. Финслер-шварцшильдова кинематика (8.4.3) в подходяще повернутых координатах имеет такие уравнения времениподобных геодезических:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \tag{9.2.3}$$

$$\frac{dt}{ds} = \beta \frac{\left(1+\frac{\dot r}{cU}\right)\left(1-\frac{\varkappa \dot r}{cU}\right) - \frac{\varkappa r^2 \dot\varphi^2}{c^2 U}}{\left(1+\frac{\dot r}{cU}\right)\left(1-\left(\frac{\dot r}{cU}\right)^2 - \frac{r^2\dot\varphi^2}{c^2 U}\right)}, \tag{9.2.4}$$

$$\dot\varphi = \frac{2c^2\varkappa(1-\varkappa)}{\gamma}\left(1+\frac{\dot r}{cU}\right)\left(-1+\sqrt{1+\frac{4\varkappa\gamma^2 U\left(1-\frac{2\dot r}{cU}\right)}{c^2 r^4(1-\varkappa)^2\left(1+\frac{\dot r}{cU}\right)}}\right), \tag{9.2.5}$$

$$\left(1-\left(\frac{\dot r}{cU}\right)^2 - \frac{r^2\dot\varphi^2}{c^2 U}\right)^{1+\varkappa} = \beta^2 U\left(1+\frac{\dot r}{cU}\right)^{2(\varkappa-1)}\left(\left(1+\frac{\dot r}{cU}\right)\left(1-\frac{\varkappa\dot r}{cU}\right)-\frac{\varkappa r^2\dot\varphi^2}{c^2U}\right)^2, \tag{9.2.6}$$

где обозначено $U = 1-\frac{m}{r}$, а точки – производная по t. Здесь β и γ – константы, вводимые для обозначения правых частей в случае тех индексов (переменных), от которых σ не зависит. В обозначениях [15], гл. V, (33) $\beta^{-1} = \ell$, $-\gamma\beta^{-2}c^{-1} = g$, $m = 2\mu$. Именно, $\partial_t \sigma = 0$ и потому из (9.1.4) с использованием (3.7.3):

$$(1-\varkappa)\frac{\sigma^2}{r^2} g_{11}\frac{dt}{ds} + \frac{\varkappa\sigma^2}{AX} g_{11} A^1 = h_1 = \beta \tag{9.2.7}$$

и $\partial_\varphi \sigma = 0$, откуда с дополнительным учетом $A^4 = 0$ получаем

$$(1-\varkappa)\frac{\sigma^2}{r^2} g_{44}\frac{d\varphi}{ds} = h_4 = -\frac{\gamma}{\beta^2 c^2} \tag{9.2.8}$$

Кроме того, мы используем определение 4 §6, что дает еще одно уравнение

$$\sigma\left(p(s), \frac{dp}{ds}\right) = 1, \tag{9.2.9}$$

которое совместно с (9.2.7) принимает вид (9.2.4). Движение "под действием центральной силы" плоское в полярных координатах, так что аналогично обычным шварцшильдовым решениям можно принять $\theta = \frac{\pi}{2}$. Далее из (9.2.7–8) и (9.2.4) получаем

$$(1-\varkappa) r^4\dot\varphi = \gamma U\left(1-\frac{\varkappa\dot r}{cU} - \left(1+\frac{\dot r}{cU}\right)^{-1}\frac{\varkappa r^2\dot\varphi^2}{c^2 U}\right), \tag{9.2.10}$$

что равносильно (9.2.5) при том выборе корня квадратного уравнения для $\dot\varphi$, который при $\varkappa = 0$ дал бы

$$r^2\dot\varphi = \gamma U. \tag{9.2.11}$$

Напомним, что (9.2.11) есть известное шварцшильдово решение [15], гл.V, (33). Видно, что наше (9.2.5) прямо обобщает его. Но, к сожалению, (9.2.6), получающееся подстановкой в(9.2.9) всего ранее найденного и имеющее в римановом случае вид

$$1-\left(\frac{\dot{r}}{cU}\right)^2-\frac{r^2\dot{\varphi}^2}{c^2U}=\beta U\ ,\qquad (9.2.12)$$

не удается в финслеровом случае разрешить относительно $\dot{r}$.

Но в важном частном случае – удается. Именно, из вида метрики в полярных координатах заключаем, что $\sigma=0$ выполняется при $r^2\dot{\varphi}^2=\left(1-\left(\frac{\dot{r}}{cU}\right)^2\right)c^2U$ (ибо согласно определению 3 вдоль световой (9.2.3) выполнено). Подстановка этого в (9.2.10) дает (9.2.11)! Итак, верна теорема 6.

Теорема 6. В финслер-шварцшильдовой кинематике (8.4.3) уравнения световых геодезических совпадают с уравнениями световых геодезических для риман-шварцшильдова случая.

Конечно, результат этот естественен: каузальная структура обеих кинематик одинакова, ибо обе имеют один и тот же световой конус. Но отсюда следует очень важный для интерпретации факт.

Следствие. Никакими обсервациями и экспериментами над прохождением света невозможно отличить финслеровой шварцшильдовой кинематики от римановой шварцшильдовой.

Это означает, в частности, что весь накопленный на сегодня материал, который "подтверждает теорию относительности посредством наблюдений за смещением звезд при затмениях Солнца" и т.п., не может трактоваться как подтверждающий специфически теорию относительности в ее противопоставлении финслеровой анизотропной теории. Этот отрицательный результат можно усилить. Именно, финслеров аналог уравнений шварцшильдовых орбит имеет вид

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}=-\frac{cU}{r^2\dot{\varphi}}\sqrt{\left(1-\frac{r^2\dot{\varphi}^2}{c^2U}-U\left(\beta\left(1+\frac{\dot{r}}{cU}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{\alpha\dot{r}}{cU}-\frac{\alpha r^2\dot{\varphi}^2}{c^2U\left(1+\frac{\dot{r}}{cU}\right)}\right)\right)\right)^{-\frac{2}{\alpha+1}}}\qquad (9.2.13)$$

и, если принять $\alpha(\rho)=\frac{m}{r}$, использовать оценку $\frac{m}{r}\leq 10^{-6}$ и пренебречь теми и только теми слагаемыми, которыми пренебрегают в приближенной записи римановых шварцшильдовых орбит, то можно записать (9.2.13) в виде

$$\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}\right)^2=\left(\frac{1}{r}-x_1\right)\left(x_2-\frac{1}{r}\right)\left(x_3+\frac{a}{r}+\frac{b}{r^2}+\ldots\right),\qquad (9.2.14)$$

что отличается от стандартной формулы в римановом случае

[15], V, (55), только наличием r^{-r} и более высоких слагаемых. А ими принято пренебрегать см. [15], V, (37). Итак, верна

Теорема 7. В финслер-шварцшильдовой кинематике приближенные уравнения орбит Солнечной системы не отличаются от приближенных уравнений орбит в риман-шварцшильдовом случае (при той же степени приближения).

Следствие. Никакими обсервациями над перигелием Меркурия и т.п. нельзя отличить финслер-шварцшильдовой кинематики от римановой.

Это совершенно естественный результат, ибо при планетарных расстояниях $\frac{m}{r} \leq 10^{-6}$ и метрика (8.4.3) практически неотличима от метрики (8.4.2). Но при $r \to m$ показатель $\alpha = \frac{m}{r} \to 1$, и наши метрики делаются существенно различимыми: у (8.4.2) при $r \to m$ особенность не истинная, а координатная, так что геодезические можно продолжить за $r = m$ в "черную дыру", у метрики же (8.4.3) согласно (3.7.5) в $r = m$ особенность истинная, так что "черных дыр" нет. Итак, верна теорема 8.

Теорема 8. Финслерова геометрия доставляет модель пространства-времени, которая никакими оптическими наблюдениями и никакими наблюдениями за планетными орбитами не может быть отличима от шварцшильдова решения, но которая в то же время исключает возможность коллапса (черных дыр).

О нарушениях в моделях с черными дырами принципа единственности реальности см. статью автора [44].

Примерно так же обстоит дело в финслер-фридмановских моделях. Выбирая $\alpha(\rho) = e^{-t}$ в метрике (8.4.5), получаем модель, при $t \approx 10^{10}$ не отличимую от риманова фридманова случая. Однако при $t \approx 1$ метрика существенно отличается. Поэтому "сценарий первых шести секунд" может быть совершенно иным. Тем не менее смещение спектра сохраняется и зависит от $R(t)$ так же, как в римановом случае. Именно, верна теорема 9.

Теорема 9. В финслер-фридмановом мире (8.4.5), если источник света находится на постоянном расстоянии от приемника света (радиоизлучения), то соотношение между длинами испущенной λ и принятой λ' волн имеет вид

$$\frac{\lambda}{R(t)} = \frac{\lambda'}{R(t')} \quad ; \qquad (9.2.15)$$

здесь t – дата испускания, t' – дата приема. В самом деле, условие $s = 0$ при выбранной метрике означает, что $R^{-1}(t)\,dt = f(r)\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Поэтому для путешествующего света имеем $\int R^{-1}(t)\,dt = \int f(r)\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Правая часть – расстояние – по условию постоянна, а потому $\int_0^{t'} = \int_{t+\frac{\tau}{2}}^{\tau'+\frac{t'}{2}}$. Отсюда очевидно (9.2.15).

Резюмируя, можем сказать, как и в §6.8, что все фундаментальные эксперименты-обсервации, на которых покоится как частная, так и общая теория относительности (космология), согласуются не только с этими моделями, но и с финслеровыми, т.е. инфинитезимально-анизотропными. Конечно, речь идет о тех явлениях, которые описываются без групп симметрий. Традиционные (популярные) выводы же из этих экспериментов-обсерваций (вроде черных дыр или типа ядерных реакций в адронной стадии) являются необязательными выводами из наличного экспериментально-обсервационного материала, а лишь возможными гипотезами.

9.3. Дальнейшие свойства геодезических.

Теорема 10. Пусть в регулярной финслеровой кинематике фиксированы $p \in M_n$ и $X \in \mathcal{O}_p^+$. Тогда найдется единственная геодезическая γ при $\gamma 0 = p$ и $\gamma_* 0 = X$. По $Y \neq \lambda X$, $Y \in \mathcal{O}_p^+$ найдется окрестность точки p, в которой соответствующие геодезические не имеют другой общей точки.

Доказательство. Первая фраза доказывается ссылкой на следствие 1 теоремы 3 и на теорему 15 §7. Если бы γ и μ ($\gamma 0 = \mu 0 = p$) были такие геодезические, что во всякой окрестности $\mathcal{U}$ точки p нашлась бы $q \in \gamma \cap \mu$, $\mu_* 0 = Y$, то очевидно $Y = \lambda X$.

Пример (6.4.7) показывает существенность условия регулярности.

Замечание. Экспоненциальное отображение $T_p M \to \mathcal{U} \subset M_n$ в анизотропном случае определить, вообще говоря, нельзя, поскольку геодезические не определены на $T_p M \setminus \mathcal{O}_p^+$. Из-за того, что множество направлений $\lambda X \in \mathcal{O}_p^+$ некомпактно (в отличие от $\lambda X \in T_p M$), не удается привычное "тривиальное" доказательство утверждения, что у всякой точки p есть окрестность $\mathcal{U}$ такая, что при $\gamma, \mu \subset \mathcal{U}$ геодезические γ и μ, выходящие из p, не пересекаются в $\mathcal{U} \setminus p$.

Теорема 11. В регулярной финслеровой кинематике вторая вариация $L''(0)$ длины геодезической γ с закрепленными концами выражается вдоль γ равносильно любой из следующих четырех формул:

$$L''(0) = \int_0^{\rho} \Big(\big(\partial_i \partial_k \tau(\gamma, \dot\gamma_0) - 2 \tfrac{d}{dt} \partial_i \dot\partial_k \tau\big) \delta\gamma_0^i \delta\gamma_0^k + \tau_{ik} \partial_t \delta\gamma_0^i \, \partial_t \delta\gamma_0^k \Big) dt, \quad (9.3.1)$$

$$L''(0) = \int_0^{\rho} \Big(R_{ijkl}(\gamma, \dot\gamma_0) \dot\gamma_0^i \delta\gamma_0^j \dot\gamma_0^k \delta\gamma_0^l - H_{ik}(\gamma, \dot\gamma_0) \dot\delta\gamma_0^i \dot\delta\gamma_0^k \Big) dt, \quad (9.3.2)$$

$$L''(0)=\int_{\alpha}^{\beta}\left(R_{ijkl}(\gamma,\gamma_*)\gamma_*^i\,\delta\gamma_*^j\,\gamma_*^k\,\delta\gamma_*^l+\tau_{ik}(\gamma,\gamma_*)\nabla_Y\gamma_*^i\,\nabla_Y\gamma_*^k\right)dt, \tag{9.3.3}$$

$$L''(0)=\int_{\alpha}^{\beta}\left(K(\gamma,\gamma_*;\gamma_*\wedge\delta\gamma_*)\,H\,\delta\gamma_*\,\delta\gamma_*-H\,\dot{\delta}\gamma_*\,\dot{\delta}\gamma_*\right)dt, \tag{9.3.4}$$

где в трех последних формулах параметризация вдоль геодезической натуральная и ради краткости обозначено $\delta\gamma_*=\pi_*Y$, $\dot{\delta}\gamma_*=\nabla_X\pi_*Y$.

Доказательство. Первая формула, подобно (9.1.2), получается непосредственным дифференцированием $L'(\varepsilon)$ с подходящим интегрированием по частям, использованием $\partial_t\partial_\varepsilon=\partial_\varepsilon\partial_t$ и т.п. Для получения второй дифференцируем (9.1.3) по ε в виде ∇_Y, к производной знаменателя применяем (9.1.3), полагаем $\varepsilon=0$ и учитываем нормировку $\tau(\gamma,\gamma_*)=1$. Получаем под интегралом

$h_{ik}\pi_*X^i\nabla_Y\nabla_X\pi_*Y^k+h_{ik}\nabla_Y\pi_*X^i\nabla_X\pi_*Y^k-(h_{ik}\pi_*X^i\nabla_X\pi_*Y^k)^2$. С помощью (8.5.8) сумму второго и третьего слагаемых можно переписать в виде $h_{ik}\nabla_X\pi_*Y^i\nabla_X\pi_*Y^k-(h_{ik}\pi_*X^i\nabla_X\pi_*Y^k)^2$ или, учтя (3.8.5) и натуральную параметризацию, в виде второго слагаемого в (9.3.2). Ту же сумму записывая с обратным использованием (8.5.8) и с применением определения 9 §3, получим второе слагаемое в (9.3.3). Применяя к первому слагаемому (8.3.9), получим (9.3.2–3). Используя (8.6.1), получим (9.3.4).

Запись (9.3.1) неинвариантна, но решающее для вариационного исчисления второе слагаемое определяется инвариантным объектом τ_{ik} *).

Теорема 12. Пусть в регулярной финслеровой кинематике геодезическая γ варьируется с вариацией $\delta\gamma_*$, а вдоль геодезической в собственном пространстве $\gamma_*\wedge T_\gamma M$ выбран ортогональный базис так, чтобы $\delta\gamma_*$ разлагалась в сумму базисных векторов δ_α, $\alpha=2,\dots,n$ равной длины $\sqrt{H\delta_\alpha\delta_\alpha}=const$, $\delta\gamma_*=\sum\delta_\alpha$. Тогда

$$L''(0)=\int_{\alpha}^{\beta}\left(\tau(\gamma,\gamma_*)\sum_{\alpha=2}^{n}H\delta_\alpha\delta_\alpha-\sum_{\alpha=2}^{n}H\dot{\delta}_\alpha\dot{\delta}_\alpha\right)dt \quad . \tag{9.3.5}$$

Доказательство. Прежде всего, так как $\gamma_*\wedge T_\gamma M$ есть обычное евклидово $(n-1)$-пространство (его невырожденность гарантирована регулярностью по теореме 11 §2), то такой базис можно выбрать. Затем используется определение 4 §8 риччиевой кривизны, равенство длин $H\delta_\alpha\delta_\alpha=H\delta_\beta\delta_\beta$ и из (9.3.4) получается (9.3.5).

---

*) В статье автора [43], формула 2.1, потеряны коэффициент 2 и вместо τ_{ik} описка h_{ik}.

В регулярной финслеровой кинематике в классе времениподобных, близких геодезической вместе с касательной, геодезическая может реализовать только максимум, а не минимум. В самом деле, необходимое условие Лежандра (знак квадратичной по $\delta\gamma_*$ формы) в силу (9.3.2) и неположительной определенности гессиана исключает минимум.

Теорема 13. В регулярной финслеровой кинематике для достаточно близких точек $p,q \in M_n$, если существует геодезическая γ, соединяющая их, то она длиннейшая в классе всех времениподобных, соединяющих p и q.

Доказательство. Условие Вейерштрасса гарантирует наличие сильного максимума при условии существования поля μ_* (касательных к кривым потока μ), для которого $\tau(\gamma,\mu_*) - \tau(\gamma,\gamma_*) - (\mu_*^k - \gamma_*^k)\partial_k \tau(\gamma,\gamma_*) \leq 0$ вдоль γ. Но согласно (3.2.4) всегда $\tau(p,\gamma_*)\tau(p,\mu_*) \leq \tau(p,\gamma_*)\mu_*^k \partial_k \tau(p,\gamma_*)$, откуда по (3.2.3) получаем $\tau(\gamma,\gamma_*)\left(\tau(\gamma,\mu_*) - \tau(\gamma,\gamma_*) - (\mu_*^k - \gamma_*^k)\partial_k \tau(\gamma,\gamma_*)\right) \leq 0$, и так как по условию $\tau(\gamma,\gamma_*) > 0$, то, сокращая, получим требуемое. Таким образом, в качестве потока μ можно взять любое семейство времениподобных, пересекающих γ, а такое семейство по теореме 1 есть.

Применяя теоремы вариационного исчисления относительно сопряженных точек (наличие геодезического двуугольника, см. рис.13), получим сразу два результата:

Теорема 14. Если в регулярной финслеровой кинематике риччиева кривизна отрицательна и отделена от нуля, т.е. $\exists \varepsilon > 0$ $\forall \varphi \in \mathfrak{M}$ $\tau(\varphi) \leq -\varepsilon$, то в этой кинематике нет сопряженных точек на геодезических.

В самом деле, для наличия сопряженных точек необходимо и достаточно, чтобы существовала вариация $\delta\gamma_*$, при которой $L''(0) \geq 0$. Но в силу положительной определенности метрики H и отрицательной отделенности $\tau(\varphi)$ от нуля по (9.3.4) следует, что такой вариации нет.

Теорема 15. Если в некоторой области $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{M}$ регулярной финслеровой кинематики риччиева кривизна для всех $\varphi \in \mathfrak{U}$ ограничена неравенством $\tau(\varphi) \geq \frac{n-1}{\zeta^2}$ при некотором положительном ζ, то на всякой геодезической $\gamma \subset \mathfrak{U}$, имеющей длину не меньше $\pi\zeta$, найдутся сопряженные точки*).

---

*) В статье авторов [43] знак кривизны (см. замечание к определению 2 §5) выбран противоположным, поэтому неравенство там обратное.

Доказательство. Предъявим вариацию $\delta\gamma_0$, при которой $L''(0)$ в формуле (9.3.4) неотрицательна. Берем указанный в теореме 12 ортогональный базис. Вариации полагаем $\delta\gamma_\alpha^i = \sum \delta_\alpha^i \sin\frac{t}{\xi}$. Тогда $h(\delta_\alpha, \delta_\alpha) = \sin^2\frac{t}{\xi}$ не зависит от α, а $\delta'_\alpha = \nabla_x \delta_\alpha = \frac{d}{dt}\delta_\alpha = \delta^i_\alpha \frac{1}{\xi}\cos\frac{t}{\xi}$ и $\sum_\alpha H\delta'_\alpha\delta'_\alpha = (n-1)\frac{1}{\xi^2}\cos^2\frac{t}{\xi}$. В силу (9.3.5) и условия теоремы $L''(0) = \int_0^{\pi\xi}\left(\tau(x)\sin^2\frac{t}{\xi} - \frac{n-1}{\xi^2}\cos^2\frac{t}{\xi}\right)dt \geqslant \frac{n-1}{\xi^2}\int_0^{\pi\xi}\left(\sin^2\frac{t}{\xi} - \cos^2\frac{t}{\xi}\right)dt$, а так как такой интеграл обращается в нуль, то вариация – искомая.

Теорема 16. Для того, чтобы на гладком многообразии (M_n, F) можно было задать структуру финслеровой кинематики, необходимо и достаточно, чтобы на M_n существовала конгруэнция гладких кривых (в структуре финслеровой кинематики – времениподобных), иными словами, существовало бы невырожденное векторное поле на M_n.

В самом деле, если такое векторное поле существует, то на M_n, как известно, можно задать структуру псевдоримановой геометрии $^{n-1}V_n$ сигнатуры $(+ - \ldots -)$, что является частным случаем финслеровой кинематики. Обратно, пусть имеется финслерова кинематика. В каждом T_pM возьмем внутренний в смысле определения 9 §1 конус к O_p^+. Так как он эллиптический, то ему соответствует некоторая квадратичная форма $g_{ik}(x)X^iX^k$, т.е. на M_n возникает структура псевдоримановой геометрии сигнатуры $(+ - \ldots -)$. Тогда, как известно, на M_n существует невырожденное векторное поле, причем его можно выбрать относительно этой псевдоримановой геометрии времениподобным. Так как всякий вектор, времениподобный относительно внутреннего конуса, времениподобен относительно O_p^+, то получаем названное поле уже в финслеровой кинематике и соответственно конгруэнцию времениподобных кривых.

Интерпретационно эта теорема свидетельствует, что математическая структура финслеровой кинематики точно приспособлена для описания феномена сплошного и дифференцируемого течения вещества.

9.4. Производное отношение порядка. Известно, что в псевдоримановой геометрии $^{n-1}V_n$ для пар точек можно ввести отношение: существует времениподобная кривая γ из x в y. Если ограничиться достаточно малой окрестностью U точки p, требуя, чтобы $\gamma \subset U$, то тогда это отношение (обозначаемое $x < y \ (\mathrm{mod}\, U)$), оказывается отношением строгого порядка на U. Конечно, если на U задано $< (\mathrm{mod}\, U)$, а на V задано $< (\mathrm{mod}\, V)$, то на $\mathcal{U} \cap V$ может оказаться либо $<(\mathcal{U}) = <(V)$, либо $<(\mathcal{U}) = >(V)$. Если M_n причинно-ориентируемо, то всегда можно обеспечить первое. В переносе этих идей на анизотропный случай мы сделаем два предположения, ограничивающих класс рассматриваемых пространство-времен: 1) ограничимся причинно-ориентируемыми кинематиками и 2) ограничимся теми финслеровыми кинематиками в которых из соединимости p и q времениподобною кривою следует соединимость p и q геодезическою (при достаточно близких p и q). Существуют пространства, причинно неориентируемые, и нам известно, как построить нижеследующую теорию в этом случае, но она чересчур объемна. Нам неизвестно, существуют ли несоединимые пространства, но без гипотезы о соединимости нам не удалось довести до конца аналогичные построения.

Определение 4. Говорим, что финслерова кинематика причинно-ориентируема, если существует непрерывное отображение $\{O_p^+ \cup O_p^- \mid p \in M_n\}$ на $+1, -1$, при котором O_p^+ отображается в $+1$, а O_p^- в -1 при любой $p \in M_n$. Говорим, что $p < q \pmod{h, \mathcal{U}}$ (короче $p <_{\mathcal{U}} q$), если существует времениподобная $\gamma \subset \mathcal{U}$ при $p = \gamma 0$ и $q = \gamma 1$. Говорим, что финслерова кинематика соединима, если у каждой точки есть окрестность $\mathcal{U}$, в которой из $p < q \pmod{h, \mathcal{U}}$ следует, что в $\mathcal{U}$ существует геодезическая времениподобная из p в q .

Теорема 17. В причинно-ориентируемой финслеровой кинематике существует такое покрытие $\omega : M_n \to T$ (здесь T – топология на M_n), что на ωp отношение $<_p$ является отношением строгого порядка, и на $\omega p \cap \omega q$ всегда $x < y \pmod{\omega p}$ равносильно $x < y \pmod{\omega q}$.

Доказательство. В точке $p \in M_n$ рассмотрим внешний к O_p^+ конус (см. определение 9 §1). Он эллиптичен, так что на M_n задается некоторая псевдориманова геометрия V_n . В ней, как известно, выполняются все утверждения нашей теоремы относительно ее времениподобных, а согласно теореме 8 §1 всякая времениподобная финслеровой кинематики оказывается времениподобной относительно внешнего конуса, чем завершается доказательство.

Определение 5. Называем бинарное антисимметричное отношение $\prec$ отношением локального следования, если выполнена следующая аксиома локальной транзитивности:

$$(\exists p\ a \prec p \,\&\, b \prec p \,\&\, c \prec p \vee \exists p\ p \prec a \,\&\, p \prec b \,\&\, p \prec c) \Rightarrow (a \prec b \,\&\, b \prec c \Rightarrow a \prec c).$$

Теорема 18. В причинно ориентируемой финслеровой кинематике отношение $\prec$, введенное нижеследующей формулой

$$x \prec y \Leftrightarrow \exists p \exists a \exists b \; a, b \in \omega_p \;\&\; x <_p y \;\&\; x, y \in \{z \mid a <_p z <_p b\} \qquad (9.4.1)$$

является отношением локального следования.

Доказательство. Так как в причинно-ориентированной кинематике отношения $<_p$ и $<_q$ согласованы на пересечении $\omega_p \cap \omega_q$, то определение не зависит от выбора ω_p, т.е. точки p. Так как точки x, y, z содержатся в одном интервале, в котором $<_p$ является по условию отношением порядка, т.е. транзитивным на интервале отношением, то аксиома локальной транзитивности тривиально выполняется.

Подчеркнем, что за пределами названного интервала транзитивность может не иметь места. Например, локальное следование можно задать на окружности. Отношение локального следования позволяет включить в рассмотрение "циклы" – замкнутые времениподобные кривые, в которых возможна цепочка $a \prec b$, $b \prec c$, $c \prec a$, но не $a \prec b$, $b \prec a$. Незнакомством с отношением локального следования объясняются многие противоречиво-абсурдные утверждения физиков и философов насчет причинности, невозможности замкнутых времениподобных и т.п., что приводит к исключению из рассмотрения многих классов пространство-времен даже в серьезных исследованиях.

9.5. Недифференцируемые каузальные и изотопные кривые.

Определение 6. Говорим, что кривая $\gamma : [\alpha, \beta] \to M_n$ локально изотопна в финслеровой кинематике $(\mathfrak{M}, \tau)$, если для достаточно близких $s, t \in [\alpha, \beta]$ из $s < t$ следует $\gamma s \prec \gamma t$. Аналогично – каузальные и гранично-изотопные кривые; ср. определение 2 §6. Так как само $\prec$ в отличие от $<$ §6 может допускать циклы, а $(\mathbb{R}, <)$ циклов не допускает, то приходится говорить о локально-изотопных, локально-каузальных и тому подобных кривых.

Теорема 19. В причинно-ориентируемой финслеровой кинематике всякая локально-каузальная кривая задается абсолютно непрерывными функциями, почти везде имеет касательную и в точке существования $\dot\gamma_* \in \overline{U}^*_\gamma$.

Доказательство практически повторяет доказательства теорем 19 и 23 §6 с использованием того факта, что малая окрестность точки почти не отличается от касательного пространства. Аналогично теореме 22 §6 доказывается теорема 20.

Теорема 20. Множество локально-каузальных кривых с фиксированными концами компактно.

Как отмечено в замечании 1 к упомянутой теореме 22, про касательную γ_* предела $\gamma = \lim \gamma_k$ в общем случае ничего сказать нельзя. Но верна теорема 21.

Теорема 21. Пусть γ_k – локально-каузальные с концами p и q, а для каждого $t \in [\alpha, \beta]$ верно $\gamma t = \lim \gamma_k t$ и $\forall t \forall k \;\; \gamma_{k+1} t \in (\gamma_k t)^+ \vee$ $\vee \forall t \forall k \;\; \gamma_k t \in \overline{(\gamma_{k+1} t)^+}$. Тогда с точностью до множества меры нуль на $[\alpha, \beta]$ выполняется $\forall t \;\; \gamma_* t = \lim \gamma_{k*} t$.

Для доказательства получим сначала в некоторой карте оценку

$$\forall i \int_{\alpha}^{t} \liminf_k \{\dot{\xi}^i_k(u)\}\, du \leq \xi^i(t) \leq \int_{\alpha}^{t} \limsup_k \{\dot{\xi}^i(u)\}\, du \quad . \qquad (9.5.1)$$

Для этого возьмем внешний конус и выберем такую систему координат, чтобы конус $t > \ell, \bar{x}$ лежал весь в первом квадранте (по крайней мере в достаточно малой окрестности). Так как речь идет о римановой кинематике, то возможность этого очевидна: $\dot{\xi}^i(0) > 0$. В этой окрестности координаты ξ^i любой точки ξ локально следующей за p, оказываются положительными и ограниченными $0 < \xi^i < \theta$. Так как все функции у нас абсолютно непрерывны, то

$$\xi^i_k(t) = \int_{\alpha}^{t} \dot{\xi}_k(u)\, du \qquad (9.5.2)$$

и т.д., а потому из $\xi^i = \lim_k \xi^i_k$ следует $\lim \int^t \dot{\xi}^i_k(u) du = \xi^i(t)$. По лемме Фату (применимой к неотрицательным функциям $\dot{\xi}^i$) имеем $\int \liminf \{\dot{\xi}^i_k\} du \leq \liminf \int \dot{\xi}^i_k du$, но так как $\exists \lim \int \dot{\xi}^i_k du$, то $\xi^i =$ $= \liminf \int \dot{\xi}^i_k du$, и получим левое неравенство в (9.5.1). Применяя ту же лемму к $c\vartheta - \xi^i$, получим правое неравенство. Теперь заметим, что в той же системе координат из условия $\gamma_{k+1} t \in (\gamma_k t)^+$ следует $\forall i \;\; \xi^i_k(t) \leq \xi^i_{k+1}(t)$, что в силу (9.5.2) дает $\dot{\xi}^i_k \leq \dot{\xi}^i_{k+1}$, а тогда $\liminf \dot{\xi}^i_k = \limsup \dot{\xi}^i_k = \lim \dot{\xi}^i_k$, так что из (9.5.1) получаем $\int \lim \dot{\xi}^i_k du = \xi^i(t)$, что совместно с (9.5.2) дает $\lim \dot{\xi}^i_k(t) = \dot{\xi}^i(t)$ почти везде, а это и есть координатная запись доказуемого утверждения. Аналогично рассматриваем альтернативное неравенство.

Теорема 21. Класс гладких каузальных кривых из достаточно малой окрестности точки совпадает с пересечением класса локально-каузальных кривых с классом дифференцируемых кривых.

Доказательство повторяет рассуждения доказательств теорем 9-10 6G.

Определение 7. Финслеровой кинематической метрикой на M называем отображение из $M \times M$ в $[0, \infty)$ по формуле

$$\tilde{\tau}(p,q) = \int_p^q \tau(\gamma, \gamma_*)\, dt , \qquad (9.5.3)$$

когда кривая γ есть геодезическая из p в q.

В соединимой финслеровой кинематике (определение 4) условия "$p < q$" и "$\tilde{\tau}(p,q) > 0$" равносильны. В силу теоремы 13 можно утверждать, что

$$\tilde{\tau}(p,r) \geq \tilde{\tau}(p,q) + \tilde{\tau}(q,r) , \qquad (9.5.4)$$

когда $p \prec q \prec r$ и $p \prec r$.

Определение 8. Длиной $Arcl(\gamma, p, q)$ дуги γ от p до q локально-каузальной кривой γ называется

$$Arcl(\gamma; p, q) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tau}(p_i, p_{i+1}) \,\middle|\, p_{i+1} \in p_i^+ ,\ p_0 = p,\ p_{n+1} = q \right\} . \quad (9.5.5)$$

Эта длина тривиально обладает свойствами, указанными в теореме 24 §6, а также верна теорема 22.

Теорема 22. Во всякой причинно-ориентируемой соединимой финслеровой кинематике для любой локально-каузальной кривой $Arcl(\gamma, p, q) = \int_p^q \tau(\gamma, \gamma_*)\, dt$, где справа стоит интеграл Лебега. Поэтому для гладкой $Arcl = arcl$.

Для доказательства сначала заметим, что если γ – произвольная локально-каузальная, p – ее фиксированная точка, в которой есть касательная γ_* и $\lim p_i = p$ при $p_i \in \gamma$, то геодезические $\mu_i = pp_i$ определены однозначно, а их касательные в p векторы μ_{i*} сходятся к γ_*. В противном случае, так как в достаточно малой окрестности кривая неотличима от касательной, в этой окрестности некоторые точки p_i невозможно было бы соединить с p геодезической. После этого использование ступенчатых функций, схожих с применяемыми в доказательстве теоремы 25 §6, позволит преобразовать $\lim \sum \tilde{\tau}(p_i, p_{i+1}) = \lim \sum \int_{p_i}^{p_{i+1}} \tau(\gamma t, \mu_* t)\, dt = \lim \sum \tau(\gamma t_i, \mu_* \hat{t}_i) \Delta t_i =$
$= \lim \sum \tau(\gamma t_i, \gamma_* \hat{t}_i) \Delta t_i = \int_p^q \tau(\gamma, \gamma_*)\, dt$, где $\hat{t}_i \in [t_i, t_{i+1})$ и, возможно, разные в разных формулах. Использование теоремы 10, как и в §6, существенно в доказательстве.

Следствие 1. Длина дуги полунепрерывна сверху, т.е.

$$\int_p^q \tau(\lim \gamma_n, \lim \gamma_{n*})\, dt \geq \lim \int_p^q \tau(\gamma_n, \gamma_{n*})\, dt .$$

В самом деле, для инфимума это очевидно, а потому верно применительно к интегральному определению длины.

Следствие 2. В малой окрестности точки p, если $q \in \partial p^+$, то $\tilde{\tau}(p,q) = 0$.

В самом деле, рассмотрим геодезические pq_i при $p \prec q_i$ и $q = \lim q_i$. Если бы $\lim \tau(p,q_i) \neq 0$, то по теореме 22 касательная к предельной кривой лежала бы в O_p^+, а по теореме 10 нашлась бы геодезическая с этой касательной, а тогда $p \prec q$.

Поэтому кинематическую метрику можно непрерывно доопределить на $q \in \partial p^+$, положив $\tau(p,q)$.

З а м е ч а н и е. Простота намеченных доказательств существенно облегчена аксиомой (гипотезой) соединимости (определение 4). В противном случае при гораздо больших усилиях получаются лишь разрозненные результаты, см. [43], 83.

§10. КАУЗАЛЬНАЯ СТРУКТУРА КАК ПЕРВИЧНОЕ ПОНЯТИЕ

10.1. Д в а в о з з р е н и я н а п р и ч и н н о с т ь. Путь, избранный нами в гл.3, отличается от пути гл.1: раньше мы начинали со структуры $(A_n, <)$, а затем обогащали ее до $(A_n, <, \tau)$. Теперь же мы начинали с (M_n, τ) и лишь потом вводили $\prec$ ($<$) на M_n через τ . Именно так поступают в общей теории относительности, и мы выбрали эту дорогу, дабы наименее уклоняться от стандартов. Однако существует взгляд, согласно которому идея причинности является фундаментальной идеей. Некоторые считают причинность первичным фактом в мире, а некоторые считают причинность первичным априорным понятием (инструментом) в описании мира. И тем и том чужло представление о причинности как о чем-то, появляющемся на седьмом шаге теории после того, как уже использованы метрические и дифференциальные конструкции. Наметим другой путь, при котором отношение потенциальной локальной причинности $\prec$ оказывается одним из первичных постулируемых отношений (наряду с теоретико-множественными отношениями), а дифференциальные и метрические возникают на более поздних шагах теории и частично даже выводятся из причинности. Схематически говоря, мы от пути

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr] & & & \\
T \arrow[r] & (M,T) & & \\
F \arrow[r] & (M_n,F) \arrow[r] & M \cdot T_p M \arrow[r] & \mathfrak{M} \arrow[dll] \\
\tau_p \arrow[r, dashed] & (\mathfrak{M},\nabla,\tau_r) \arrow[r] & O_p^+ \arrow[r] & \{\gamma \mid \gamma_0 \in O_p^+\} \arrow[r] & p \prec q \arrow[r] & \tau(p,q) \arrow[r] & Aut
\end{tikzcd}$$

переходим к пути

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr] & & & & \\
\prec \arrow[r] & (M,\prec) \arrow[r] & (M,\prec,T) \arrow[dl] & & \\
F \arrow[r] & (M_n,\prec) \arrow[r] \arrow[d] & (M_n,F_p^+) \arrow[r] & O_p^+ \arrow[d] & \\
Axl \arrow[r] & (M_n^*,\prec,\mathfrak{T}) \arrow[rr] & & (T_pM,\tau_p) \arrow[r] & (\mathfrak{M},\nabla,\tau_p).
\end{tikzcd}$$

Обратим внимание, что такие фундаментальные понятия, как "раньше-позже" и "длина" ("расстояние") в этом подходе задаются не через касательное пространство, а сразу в самом многообразии событий. В касательном же пространстве они появляются как производные понятия.

Собственно говоря, подробное изложение ближайших теорем потребовало бы двух глав, или более, ибо построению финслеровых (римановых) кинематик при этом подходе предшествует построение более общих топологических кинематик. Поэтому мы лишь наметим идеи, отсылая за более подробным обзором этих идей к конспективному изложению этих двух глав в препринте [46], где содержатся также указания на литературу с доказательствами.

10.2. Определение и необходимые объекты топологической кинематики. Рассматриваем структуру $(M,\prec)$, где M – множество, а $\prec$ – отношение локального следования (определение 5 §0). Обозначаем $p^+=\{x|p\prec x\}$ и $(p,q)=p^+\cap q^-$ при $p\prec q$. Интервальной топологией называем ту топологию (если она существует), базисом которой служит семейство всех интервалов $\{(a,b)|a,b\in M\}$. Называем $(M,\prec)$ (причинно-ориентированной) топологической кинематикой, если выполнены аксиомы:

ПОТК$_1$. Интервальная топология существует.

ПОТК$_2$. $a,b\in(p,q)\Rightarrow\overline{(a,b)}\subset(p,q)$, где замыкание – в интервальной топологии.

Из ПОТК$_1$ следует, в частности, что всякая $p\in M$ принадлежит какому-нибудь интервалу, что p^+, p^- и (p,q) открыты (в дальнейшем не оговариваем: "в интервальной топологии"), что из $x\in(p_1,q_1)\cap(p_2,q_2)$ следует существование $a,b\in(p_1,q_1)\cap(p_2,q_2)$ при $x\in(a,b)$. Из второй аксиомы вытекает возможность метризовать кинематику [24]. Если топология хаусдорфова, то кинематика называется хаусдорфовой (ср. теорему 7 §1). В топологической кинематике можно определить локально-изотонную и локально-каузальную кривые (см. определение 6 §9), а также ввести важный класс локально-изотонных функций $f: M \to \mathbb{R}$ определением:

Определение 1. $f:(M,\prec) \to (\mathbb{R},<)$ называется локально-изотонной в точке $p \in \mathrm{Dom} f$, если у p есть окрестность U, такая, что при $x, y \in U$ из $x \prec y$ следует $fx < fy$. Если f локально-изотонна в каждой точке $p \in \mathrm{Dom} f$, то называем ее локально-изотонной. Двойственным образом определяются локально-антитонные.

На локально-каузальных кривых можно разными способами ввести длину дуги $\mathrm{Arcl}(\gamma;x,y)$. Один способ – через кинематическую метрику [16,37,41]. Другой – через оператор длины, см. ниже. Если M относительно интервальной топологии T образует топологическое n-многообразие M_n, то можно задаваться вопросом о гладкости.

10.3. Второе определение финслеровой кинематики. Рассматриваем структуру $(M,\prec,F,L)$, удовлетворяющую нижесформулированным аксиомам ПОФК$_{1-6}$, где $F \subset \mathbb{R}^M$, $L:\{(\gamma;x,y)\} \to [0,\infty)$.

ПОФК$_1$. Структура $(M,\prec)$ есть топологическая эйнштейнова кинематика, которая как топологическое пространство (M,T) является n-мерным топологическим многообразием M_n со счетной базой, а в его алгебре непрерывных функций $\mathbb{R}^M$ содержится постулированное множество F, удовлетворяющее аксиомам C^∞-гладких функций (определение 1 §7).

Важный этап в построении финслеровых кинематик – перенесение структуры порядка $\prec$ на касательное и кокасательное пространства (см. определение 3 §7). Оно может осуществляться по-разному: в статье автора [41] этот этап выделен, и строится самостоятельный объект "гладкие кинематики". В пересечении класса гладких и класса локально-изотонных в $p \in M_n$ функций выделяем подкласс F_p^+ сильно-изотонных функций.

Определение 2. Говорим, что $f \in F_p^+$, если градиент df имеет открытую окрестность $U \subset T_p^* M$ такую, что всякая $g \in F_p$, у которой $d_p g \in U$, локально-изотонна в p. Говорим, что $f \in F_p$ пограничная к сильно-изотонным, если $f \notin F_p^+$, но существует последовательность f_k сильно-изотонных функций при $df = \lim df_k$ *).

Определение 3. Гладкая кривая $(\gamma;x,y)$ называется ис-

*) В наших статьях [40,41] в другой терминологии требуется по существу то же, см. аксиомы ГК.

пустимой кривой, если на любой своей поддуге $[\alpha',\beta']\subset[\alpha,\beta]$ значение оператора $L(\gamma;\alpha',\beta')$ не равно нулю.

ПОФК$_2$. Множество F_p^+ сильно-изотонных функций не пусто для любой $p\in M_n$.

ПОФК$_3$. При всякой $p\in M_n$ множество касательных к допустимым кривым, выходящим из p, не пусто и открыто в T_pM.

ПОФК$_4$. При всякой точке $p\in M_n$ кривая γ, выходящая из p, допустима тогда и только тогда, когда производная вдоль нее от любой сильно-изотонной функции положительна в точке p.

Из самого определения L как оператора на кривой, а не на пути (ср. определение 1 §6) вытекает, что длина кривой не зависит от ее параметризации.

ПОФК$_5$. При всякой $p\in M$ для всякой допустимой кривой γ, выходящей из p, существует производная от ее длины $L(\gamma)$ в p по любой гладкой параметризации (относительно F, как и всё, что относится к дифференцируемости). Если две допустимые кривые имеют в p общую касательную $X\in T_pM$, то производные длин вдоль них в этой точке совпадают. Эта производная как функция точки и касательной к кривой сама оказывается гладкой функцией. Если из p выходит семейство допустимых кривых γ, касательные к которым стремятся к границе области допустимых касательных, то производная от длины стремится к нулю.

Будем называть допустимую кривую "экстремалью", если: (а) ее можно варьировать (с фиксированными концами) в классе допустимых кривых в любом направлении так, что она останется внутренней точкой вариации, и (б) при вариации в достаточно малой окрестности вариация ее длины равна нулю.

ПОФК$_6$. Через всякую точку p в любом направлении $X\in T_pM$, в котором выходит хотя бы одна допустимая кривая, выходит не более одной экстремали.

Теорема 1. Если $(M,\prec,F,L)$ удовлетворяет ПОФК$_{1-6}$, то над M можно задать $\mathfrak{M}$, τ и ∇ так, чтобы $(\mathfrak{M},\nabla,\tau)$ была финслеровой кинематикой, причем $L(\gamma;\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta \tau(\gamma,\gamma_*)\,dt$.

Идея доказательства. Согласно ПОФК$_5$ $\frac{dl}{dt}=\tau(\gamma,\gamma_*)>0$, причем отмеченная независимость длины L от параметризации означает, что $\tau(\gamma,\gamma_*)$ – положительно-однородна по γ_*. Рассматриваем $h_{ik}=\frac{1}{2}\partial_i\partial_k\tau^2(\gamma_*)$, и из уравнений Эйлера замечаем, что при $\det h_{ik}=0$ нарушается ПОФК$_6$. Поэтому h_{ik} – невырождено. В силу ПОФК$_5$ тогда выполнены СО$_{1-3}$ из §3.3, а ВК$_{1-4}$ там же выполнены по ПОФК$_{2-3}$, если за положительный вектор принять вектор, касательный к какой-нибудь допустимой кривой. Итак, в каждом $T_p M$ мы получили векторную кинематику $(O_p^+, \tau, (\gamma_*))$. Для выполнения определения 1 §8.1 осталось сослаться на теорему 2 §8.

Но простота этой аксиоматики связана с постулированием очень хорошего множества кривых и удобного оператора. Если их не предполагать, то доказательства растягиваются [41,43]. Еще один вариант аксиоматики мы дадим применительно к риманову случаю.

10.4. Аксиоматика общей теории относительности через каузальность. В случае псевдориманова пространства $^{**}V_4$ общей теории относительности принято искать аксиоматику, которая лишь с точностью до скалярного множителя задает метрику, см. §4.8. Это позволяет значительно упростить общую аксиоматику финслеровых кинематик, устранив один из постулируемых объектов, именно, L .

Итак, рассматриваем структуру $\langle M, \prec, F \rangle$, удовлетворяющую аксиомам ПООТО$_{1-4}$ (причинно-ориентируемая общая теория относительности). Полагаем ПООТО$_1$ равной ПОФК$_1$, а ПООТО$_2$ равной ПОФК$_2$.

ПООТО$_3$. Если f – пограничная к сильно-изотонным и одновременно *пограничная к сильно-антитонным* (F_p^*) в точке p, то в этой точке $df = 0$.

Напомним, что всякий диффеоморфизм $\varphi: U \mapsto V$, при котором точка $p \in U \cap V$ неподвижна, порождает некоторое отображение $F_p \mapsto F_p$ по формуле $f \mapsto f \circ \varphi$. Через f_U обозначаем функцию, область задания которой есть U (согласно определению 1 §7 U открыта). Со всяким диффеоморфизмом φ связано линейное отображение – его дифференциал $d\varphi$.

ПООТО$_4$. При всякой $p \in M$ имеется псевдогруппа $\mathcal{D}_p$ диффеоморфизмов $\varphi: U \mapsto V$ $(p \in U \cap V)$, удовлетворяющая двум условиям: (а) если f сильно-изотонна, то при любом φ функция $f \circ \varphi$ также сильно-изотонна; (б) если f_U и $\tilde{f}_V$ суть пограничные к *сильно-изотонным*, то найдется $\varphi \in \mathcal{D}_p$ при $d\tilde{f}_V = df_U\, d\varphi$.

Вместо аксиомы *ПООТО$_4$* можно было бы взять – в соответствующей редакции – например, аксиому СТО$_5$ из §4.8.

Теорема 2. Если для структуры $(M, \prec, F)$ выполнены аксиомы ПООТО$_{1-4}$, то с точностью до скалярной функции $\lambda(p) \in F$ однозначно определен метрический тензор (не финслеров, а из $T_2^0 M$) g_{ik} сигнатуры $(+ - \ldots -)$.

Доказательство. На кокасательном пространстве T_p^*M вводим отношение $d\xi > 0$ условием "f сильно-изотонна". ПООТО$_2$ гарантирует, что положительный конус O_p^{*+} – непустой открытый, а в силу ПООТО$_3$ этот конус имеет острую вершину $d\xi = 0$. Согласно пункту (б) ПООТО$_4$ на границе этого конуса действует транзитивная (на лучах границы ∂O_p^{*+}) группа $d\mathcal{D}$ (дифференциал диффеоморфизма), которая в силу (а) той же аксиомы есть группа автоморфизмов этого конуса. Так как конус с острой вершиной, то граница его вся состоит из экстремальных лучей (ведь экстремальный луч с неэкстремальным линейным автоморфизмом не совместить), причем в силу глубоких геометрических теорем, упомянутых в §0 обзорной статьи [20], наличие такой группы влечет, что O_p^{*+} есть эллиптический конус. Но тогда эллиптичен и сопряженный ему $O_p^+ \subset T_pM$ (ср. (3.1.1)). Значит, ∂O_p^+ задается в подходящих координатах в виде $\dot t^2 - \dot x^2 - \dot y^2 - \dot z^2 = 0$, т.е. тензором указанной сигнатуры.

Получить этот тензор оказалось просто. Но вот доказать, что производное отношение порядка (следования) $<(\mathrm{mod}\,g, \mathcal{U})$, порождаемое этим тензором согласно определению 4 §9, совпадает с постулированным $\prec$, – при указанном наборе аксиом невозможно (контрпримеры см. в статье [40]). Необходимо ввести дополнительные аксиомы ДА$_{1-3}$ (впрочем, необходимость последней не доказана).

ДА$_1$. Для достаточно близких точек p и q интервал $\langle p, q\rangle$ всегда связен.

ДА$_2$. Если p и q достаточно близки, но "причинно-несоотнесены" (говорят также, что множество $\{p, q\}$ "пространственно-подобно"), т.е. $p \nprec q$ и $q \nprec p$, то найдется сильно-изотонная функция ξ при $\xi_q > \xi_p$ (отделимость посредством часов).

ДА$_3$. Если p и q можно соединить локально-изотонной кривой, то их можно соединить гладкой изотонной кривой.

Ср. последнюю аксиому с гипотезой соединимости посредством геодезической – в §9.4.

Теорема 3. *Если дополнительно к аксиомам ПОФК$_{1-6}$ (соответственно ПООТО$_{1-4}$) выполнены аксиомы ДА$_{1-3}$, то в подходящих окрестностях априорное и производное отношения порядка совпадают. Если выполнены только ДА$_{1}$..., то любая гладкая кривая γ является локально-каузальной тогда и только тогда, когда $\tau(\gamma, \dot\gamma_p) \neq 0$ (соответственно $\dot\gamma_p \in O_p^+$).*

Доказательствам этих и сложных утверждений посвящен, по существу, §3 нашей работы [41].

Мы ограничились здесь случаем причинно-ориентируемых кинематик, но – ценой громоздкости – можно перенести эти методы (суть которых состоит в выделении подкласса изотонных и сильно-изотонных функций) и на причинно-неориентируемые кинематики.

Summary. There are reasons to abandon the affine space as a pattern of the real spacetime and to consider manifolds. Finsler spacetime is such smooth manifold that its tangent space is a metrical vector spacetime. For to handle this construct correctly one must define Finsler functions, Finsler manifold, Finsler tensor, Finsler connections and other previously. We have suggested these definitions in such a way that the important formulas for the sectional Riemannian curvature and for the variation of a curve do preserve their Riemannean forms. The Einstein field equations are deduced in a modified form for the Finsler case. New cosmological models appear, and the "black holes' become non-necessary. The §10 is a very laconic summary of two unpublished chapters where the metrics itself is deduced from the set of isotonic functions on an ordered smooth manifold.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Д. О преобразованиях Лоренца. - Успехи мат. наук, 1950, т.5, №3, с.187.

2. Александров А.Д. К основаниям геометрии пространства-времени. - Докл. АН СССР, 1974, т.219, №1, с.11-14; и №2, с.265-267.

3. Асанов Г.С. Гравитационное поле в финслеровом пространстве, основанном на понятии объема. - Вестн. МГУ. Физика, 1976, №3, с.288-296.

4. Асанов Г.С. Наблюдаемые в общей теории относительности. II. Финслеров подход. - Вестн. МГУ. Физика, 1976, №7, с. 84-88.

5. Асанов Г.С. О финслеровом обобщении теории относительности. -- Добавление II к книге [49],с.439-471.

6. Барут А. и Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. -- М.: Наука, 1980, т.2.

7. Белов С.Н., Громов Н.А., Крейнович В.Я., Пименов Р. И. Кривые в кинематиках и смежные вопросы физики и космологии Сыктывкар, 1976.(Препринт/ АН СССР. Коми филиал; №22).

8. Бенц. Benz W. Zur Linearität relativistischer Transformationen. - Jahresbericht DMV, 1967, Bd. 70, N2, S. 100-108.

9. Бенц. Benz W. Zur Charakteriesierung der Lorentz-Transformationen. - Journal of geometry, 1977, v.9, N1/2, p.29-37.

10. Бим. Beem J.K. Indefinite Finsler spaces and timelike spaces; - Canadian Journ. of math., 1970, v.22, N5, p.1035-1039.

11. Бишоп Р.Л. и Криттенден Р.Д. Геометрия многообразий.- М.: Мир, 1967.

12. Богословский Г.Ю. О специальной релятивистской теории анизотропного пространства-времени. - Докл. АН СССР, 1973, т.213, с.1055-1058.

13. Болтянский В.Г. Анизотропный релятивизм. - Дифференциальные уравнения, 1974, т.10, с.2101-2110.

14. Борисов Ю.Ф. К основаниям релятивистской кинематики.- Сибирский мат. журн., 1986, т.27, №3, с.10-27.

15. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. - М.: Наука, 1972.

16. Буземан. Busemann H. Timelike spaces. Warszawa, 1967.

17. Буземан и Бим. Busemann H. and Beem J.K. Axioms for indefinite metrics. - Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. 1966(1968),v.15, p.223-246.

18. Вернадский В.И. Пространство и время в неодушевленной и одушевленной природе.- М., 1975.

19. Грюнбаум. Grünbaum A. and Salmon W.C. A panel discussion of simultaneity ... in special and general theories of relativity. - Philos. Sciences, 1969, v.36, N1, p.1-43.

20. Гуц А.К. Аксиоматическая теория относительности. - Успехи мат. наук, 1982, т.37, с.39-79.

21. Зарипов Р.Г. К определению расстояния в специальной теории относительности. - Гравитация и теория относительности, Казань,1984, вып.21., с.78-87.

22. Исикава. Ishikawa H. Note on Finsler relativity. - Journ. of Math.physics, 1981, v.22, N5, p.995-1004.

23. Крейнович В.Я. О пространственно-временных структурах, допускающих просто транзитивную группу: Тез. VI Коми респ. молодежн. науч. конф. Сыктывкар, 1974, с.101-102.

24. Крейнович В.Я. К проблеме метризации пространств кинематического типа. - Докл. АН СССР, 1974, т.218, №6, с.1272-1275.

25. Куратовский К. Топология. М.:Мир, 1966, т.1,2.

26. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.:ГИФМЛ, 1962.

27. Мандельброт. Mandelbrot B.B. Fractals. San-Francisco: Freeman, 1976.

28. Мацумото. Matsumoto M. The theory of the Finsler connections. Okayama, 1970.

29. Милн. Milne E.A. Kinematic relativity. Oxford, 1948.

30. Монтесинос. Montesinos A. On Finsler connections.- Revista matematica Hispano-Americana. 1979, v.39, N2-3, p.99-110.

31. Новожилов Ю.В. Введение в теорию элементарных частиц. - М.: Наука, 1972.

32. Паладь.Palagyi M. Neue Theorie des Raumes und der Zeit. Leipzig: Engelmann, 1901.

33. Петрышын. Petryszyn H. O pewnym grupowo-kinematycznym sformulowaniu podstaw przeksztalcen Galileusza i Lorentza. - Prace naukowe Institutu matematiki Politchniki

Wroclawskiej, 1973, N8, p.47-73.

34. Пименов Р.И. Аксиоматическое исследование пространственно-временных структур// Тр. III Всесоюз. мат. съезда, 1956. М., 1959, т.4, с.78-79.

35. Пименов Р.И. Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений. - Литовск. мат. сб., 1965, т.5, №3, с.69-118.

36. Пименов Р.И. Полуриманова геометрия. // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1968, вып.14, с.154-173.

37. Пименов Р.И. Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени). - Л.: Наука, 1968. Pimenov R.I. Kinematic spaces (mathematical theory of spacetime), New York : Plenum Press, 1970.

38. Пименов Р.И. Новые модели пространства-времени и некоторые связанные с ними философские вопросы. // Философские проблемы теории относительности. М.: МГУ, 1968, с.40-52.

39. Пименов Р.И. Необходимые и достаточные условия линейности преобразований, сохраняющих конусы. - Мат. заметки, 1969, т.6, №4, с.361-369.

40. Пименов Р.И. К основаниям теории дифференцируемого пространства-времени. - Докл. АН СССР, 1975, т. 222, №1, с.36-38.

41. Пименов Р.И. Теория кривых в гладких кинематиках. - Сибирский мат. журн., 1978, №2, с.370-384.

42. Пименов Р.И. Негладкие и другие обобщения в теории пространства-времени-электричества. - Сыктывкар, 1979. -(Препринт/ АН СССР. Коми филиал; №47).

43. Пименов Р.И. Финслеровы кинематики. -- Сибирский мат. журн., 1984, т.22, №3, с.136-146.

44. Пименов Р.И. О полноте решения Шварцшильда. - Сибирский мат. журн., 1984, т.25, №5, с.119-124.

45. Пименов Р.И. Финслерово пространство-время позволяет обойтись без черных дыр.- Сыктывкар, 1985.- (Препринт/ АН СССР. Коми филиал; №136).

46. Пименов Р.И. Хроногеометрия - достижения, препятствия, структуры. - Сыктывкар, 1986. -(Препринт /АН СССР. Коми филиал; №160).

47. Рашевский П.К. Риманова геометрия. - М., 1955.
48. Робб.Robb A.A. Geometry of time and space. Cambridge, 1936
49. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973.
50. Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. - М.: Наука, 1981.
51. Сакс. Sachs R.K. and Wu H. General relativity for mathematicians. New York,: Springer-Verlag, 1977.
52. Такано. Takano Y. Gravitational field in Finsler spaces. - Lettere ad Nuovo Cimento, 1974, v.10, N 17,p. 747-750.
53. Тяпкин А.А. Выражение общих свойств физических процессов в пространственно-временной метрике СТО. - Успехи физ. наук, 1972, т.106, №4, с.617-659.
54. Тяпкин А.А. О возможности различных теоретических описаний одной и той же совокупности экспериментальных данных.// Физическая наука и философия. М.: Наука, 1973, с.281-287.
55. Улановский М.А. Упорядоченные псевдоримановы пространства.// Украинский геометрический сборник, Харьков: Харьковский гос. ун-т, 1969, №7, с.153-156: 1970, №9, с. 96-110.
56. Федоров Ф.И. Группа Лоренца. - М.: Наука, 1979. Изд.2. М.: УРСС, 2003.
57. Хокинг. Hawking S.W. and Ellis G.F.R. The large scale structure of spacetime. Cambridge, 1973.
58. Шутц. Schutz J.W. Foundations of Special Relativity. Berlin : Springer-Verlag, 1973.
59. Эддингтон. Eddington A.S. The mathematical theory of Relativity. Cambridge, 1922.

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

Револьт Иванович ПИМЕНОВ (1931–1990)

Известный отечественный математик, доктор физико-математических наук. В 1954 г. окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета. С 1963 по 1970 гг. работал научным сотрудником Ленинградского отделения Математического института АН СССР, где вел научный семинар по математическим проблемам теории пространства-времени, читал лекции по геометрии студентам матмеха ЛГУ, защитил кандидатскую (1965), а затем и докторскую диссертацию (1969). С 1972 г. и до своей кончины работал в Коми филиале АН СССР, преобразованном впоследствии в Коми научный центр Уральского отделения АН СССР, где прошел путь от младшего до ведущего научного сотрудника.

Р. И. Пименов — автор многих научных работ в различных областях математики и физики (неевклидова геометрия, тензорное исчисление, теория относительности и электромагнетизм, пространственно-временные конструкции). Он развил новые подходы к построению системы неевклидовых геометрий; обеспечил приоритет отечественной науки в развитии тензорного исчисления, согласованного с расслоением пространства; построил теорию неоднородных пространств, значительно расширивших систему математических моделей пространства-времени, которые используются учеными в различных областях науки.

3663 ID 32931

9 785971 000433

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Тел./факс: 7 (095) 135–42–16
Тел./факс: 7 (095) 135–42–46

URSS

E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru