Академия наук СССР
Коми филиал

Серия препринтов «Научные доклады»
Выпуск 136

Р.И.Пименов

Финслерово пространство — время позволяет обойтись без черных дыр

Доклад на заседании Президиума Коми филиала АН СССР 10 октября 1985 г.

Сыктывкар
1985

1. ПРОБЛЕМА И ПУТЬ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Общеизвестное в теории относительности пространство — время Шварцшильда, в рамках которого получаются [5] так называемые «черные дыры» с их парадоксальными свойствами, имеет один очевидный недостаток. Оно моделирует тот физический феномен взаимодействия, при котором одно центральное тело притягивает все пробные частицы в одном и том же направлении — вдоль прямой, направленной на центр. Таким образом, физически направления не равноправны, существует одно выделенное направление на центр. Оно выделено даже в бесконечно малом, в чем можно убедиться, хотя бы слегка наклонив биллиардный стол, — объект, явно пренебрежимо малый сравнительно с расстоянием до центра. Однако в модели, т.е. пространство-времени Шварцшильда M, в бесконечно малом, т.е. в касательном к M пространстве TpM, существует полная группа симметрий специальной теории относительности, т.е. в нем нет инфинитезимально выделенного направления. В нем биллиардные столы все равноправны, независимо от их ориентации, лишь бы они были достаточно малы.

В рамках римановой геометрии устранить это несоответствие модели эксплицируемому явлению невозможно, ибо по определению ее (и тем самым общей теории относительности) в TpM должна действовать полная группа автоморфизмов специальной теории относительности. Но существует финслерова геометрия [2], в которой метрический тензор зависит от направления, так что касательное пространство TpM оказывается анизотропным и, вообще говоря, может даже не обладать никакой нетривиальной группой симметрий. Финслерова геометрия сигнатуры (+ — … -) есть, собственно, теория анизотропного (в бесконечно малом) пространство-времени.

Оказывается, в классе таких пространств можно найти пространство-время с выделенным направлением на центр, которое в доступной для обсервации области практически не отличается от шварцильдова. В зависимости от нашего желания такое финслерово пространство можно выбрать либо так, чтобы на «шварцшильдовом радиусе» r = m особенность была бы координатной (т.е. геодезические продолжимы в «черные дыры» возможны) либо так, чтобы эта особенность была истинной (т.е. геодезические непродолжимы в «черные дыры» невозможны). Имея в виду трудно приемлемые свойства дыр, которые резюмированы в теореме 4 из [3], мы остановимся на втором варианте.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗУЧАЕМОГО ОБЪЕКТА

Пусть $\tau(p,X)=\sqrt{g_{ik}(p)X^iX^k}$ есть обычная риманова метрика сигнатуры (+ — …-) на многообразии M; здесь p $\in$ M, X $\in$ TpM. Тогда $\sigma(p,X)=(AX)^{\alpha}\tau^{\tau-\alpha}(p,X)$ оказывается финслеровой метрикой на M при всяком - 1 < α (p) < 1, если A = A(p) — световой вектор, т.е. τ(A) = 0; здесь AX — скалярное произведение $g_{ik}X^iX^k$. Все опускания-подымания индекса осуществляются относительно g_{ik}. Финслеров метрический тензор h_{ik} по определению [2] равен $h_{ik}(p,X)=\frac{\partial}{\partial X^i}-\frac{\partial}{\partial X^k}-\frac{\sigma^2}{2}$. В качестве τ выбираем стандартную шварцшильдову метрику [1, 3, 5] в полярных координатах:

$$\tau^2(p,X)=\left(\bar{1}-\frac{m}{r}\right)t^2-c^{-2}\left(\bar{1}-\frac{m}{r}\right)^{-1}r^2-c^{-2}r^2\vartheta^2-c^{-2}r^2\sin^2\vartheta\varphi^2,$$

где точками помечены координаты в касательном пространстве(точки над t в квадрате, первом r в квадрате, ϑ в квадрате и φ в квадрате); конкретизируем A, полагая $A^t=1, A^2<0, A^3=A^4=0$, а на α = a (p) налагаем требованием, чтобы эта скалярная функция точки зависела бы только от r, причем $\lim_{r\to\infty} a(r)=0,\quad \lim_{r\to m} a(r)=1$. (Если взять α= 0, то получится обычное шварцшильдово решение). Об этой метрике, называемой Финслер-шварцшильдовой, в общем случае см. работу [4].

3. ТЕОРЕМА О МЕТРИКЕ

Без доказательств анонсируем ряд теорем.

X^i ***Теорема*** 1. *В любой точке p $\in$ M в касательном пространстве TpM финслер-шварцшильдовой метрики зафиксировано инвариантное направление A $\in \partial O^+p$ (или, что то же, в собственном пространстве любого наблюдателя зафиксировано инвариантное направление на центр), и группа автоморфизмов касательного пространства относительно σ изоморфна орициклической подгруппе группы Лоренца (а не всей группе Лоренца). Чем меньше α, тем меньше отличие σ от τ. При $r\to m$ (когда $\alpha\to 1$) метрика σ стремится к $\sigma_I = A_iX^i$.* (где X в степени I)/

Напомним, что орициклическая группа в n-мерном пространстве изоморфна группе подобий в (n – 1)-мерном евклидовом пространстве.

Теорема 2. *Определитель Финслер-шварцшильдовой метрики* h_{ik} *(p, X) выражается через определитель римановой метрики формулой*

$$\det(h_{ik}) = (1-a)^3 \left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^8 \det(q_{ik})$$

Следствие. Сингулярность при r = m истинная.

4. ТЕОРЕМЫ О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Здесь надо различать точные решения и приближенные. Как принято, параметризацию s вдоль временноподобных геодезических нормируем так, чтобы $\sigma\left(p(s), \frac{dp}{ds}-\right) = 1$ вдоль геодезической. Световые определяем как те кривые, которые получаются из уравнений Эйлера при σ = 0 вдоль них.

Теорема 3. *В подходяще повернутой системе полярных координат временноподобные геодезические при указанной нормировке в Финслер-шваршильдовом пространстве-премени выражаются уравнениями:*

$$\begin{cases} \vartheta = \dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{dt}{ds}- = \beta \dfrac{\left(1+\dfrac{r}{cu}\right)\left(1-\alpha\dfrac{r}{cu}\right) - \dfrac{r^2\varphi^2}{c^2u}}{\left(\left(1+\dfrac{r}{cu}\right)\left(1-\dfrac{r}{cu}\right)^2 - \dfrac{r^2\varphi^2}{c^2u}\right)} \\ \varphi = \dfrac{c^2(1-a)\left(1+\dfrac{r}{cu}\right)}{2a\gamma}\left(\sqrt{1+\dfrac{4a\gamma^2u\left(1-a\dfrac{r}{cu}\right)}{c^2r^2(1-a)^2\left(1+\dfrac{r}{cu}\right)}}-1\right) \\ 1-\left(\dfrac{r}{cu}\right)^2 - \dfrac{r^2\varphi^2}{c^2u} = \beta^{\frac{2}{1+a}} u \left(1+\dfrac{r}{cu}\right)^{\frac{2(a-1)}{a+1}} \left(\left(1+\dfrac{r}{cu}-\right)\left(1-\alpha\dfrac{r}{cu}\right) - a\dfrac{r^2\varphi^2}{c^2u}\right)^{\frac{2}{a+1}} \end{cases}$$

(точки над r без степени и φ в квадрате в числителях) *где* β *и* γ *суть обычные компоненты, связанные с начальными энергией и моментом, и* $u = 1 - \frac{m}{r}$, $r = \frac{dr}{dt}$, $\varphi = \frac{d\varphi}{dt}$. *(точки над r и* φ)

Следствие. В частности, для орбит имеет место

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} = -\frac{cu}{r^2\varphi}\sqrt{1-\frac{r^2\varphi^2}{c^2u}} - \beta^{\frac{2}{\alpha+1}}\left(1-a\frac{r}{cu}-\frac{ar^2\varphi^2}{c^2u\left(1+\frac{r}{cu}\right)}\right)^{\frac{2}{a+1}}$$

(точки над r и всех φ в квадрате),

а для радиальных

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{ds}- = \beta\dfrac{1-a\dfrac{r}{cu}}{1-\left(\dfrac{r}{cu}\right)^2} \\ 1-\left(\dfrac{r}{cu}\right)^2 = \beta^{\frac{2}{a+1}}u\left(1+\dfrac{r}{cu}\right)^{\frac{2a}{a+1}}\left(1-a\dfrac{r}{cu}\right)^{\frac{2}{a+1}} \end{cases}$$

(точки только над r). Истинная особенность в r = m достигается вдоль радиальных за конечное собственное и за бесконечное координатное время.

Теорема 4. *Световые геодезические в финслер-шварцишильдовом случае не отличаются от световых геодезических в римановом шварцшильдовом случае.*

Следствие. Никакими наблюдениями за лучами света нельзя отличить анизотронный Шварцшильдов случай от изотропного риманова.

Теорема 5. *Для случая орбитального движения при малых а и* $\frac{m}{r}$ *уравнение движения приближенно имеет вид:*

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d_\varphi} \approx \frac{c^2}{\gamma^2} - \left(\frac{1}{r^2}+\frac{c^2\beta^{\frac{2}{a+1}}}{\gamma^2}\right)u - a\left(\frac{\gamma^2}{c^2r^2}+\beta^2\right)\frac{\gamma^2 u}{c^2r^4}\,.$$

Теорема 6. *Если выбрать a(r) в виде* $a=\frac{m}{r}$, *то приближенные уравнения для орбитального случая в Финслер-шварцшильдовой геометрии совпадают с приближенными уравнениями для орбитального случая в римановой шварцшильдовой геометрии с той степенью точности, ч какой обычно [1] получают эти уравнения.*

Следствие. *Наблюдения за планетами Солнечной системы не позволяют отличить Финслер-шваршильдов случай при* $a = \frac{m}{r}$ *от риманова шварцшильдова. Но в Финслер-шварцшильдовом варианте черных дыр нет.*

5. ЗАМЕЧАНИЯ

Те же самые результаты справедливы относительно пространство-времени Керра при выборе $u = 1 - \frac{in}{r} - \frac{n}{r^2}$ и т.п.

Вопрос о формулировке уравнений поля в финслеровом случае остается еще открытым, хотя есть оснований принять их в виде

$$\begin{cases} R_k^i - \frac{1}{2} R\delta_k^i + \lambda\delta_k^i = kT_k^i \\ R_{ijkl} - R_{klij} = -2kh_{ik} \wedge \left(T_{jl} - T_{lj}\right) \end{cases}$$

с несимметричным тензором энергии T_{ik} и финслеровыми константами k и λ. Здесь ^ обозначает косое (бивекторное) произведение тензоров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брумберг В.А, Релятивистская небесная механика. — М.: Наука, 1972.
2. Пименова Р.И. Финслеровы кинематики. — Сибирский мат. журн., 1981, т. 22, № 3, с. 136—146.
3. Пименов Р.И. О полноте решения Шварцшильда. — Сибирский мат. журн., 1984, т. 25, № 5, с.. 119—124.
4. Пименова Р.И. К одной проблеме Буземана. — В кн.: Симпозиум по геометрии в целом и основаниям теории относительности. Новосибирск: СО Ан СССР, 1982, с. 89—90.
5. Chandrasekhar S. The mathematical theory of black holes. — Oxford, Clarendon Press, 1983.

Редактор Ю.А.Косачев

Техн. Редактор М.А.Сазанская

Оператор В.Я.Яковлева

Подписано в печать 22.05.85. Ц03273. Формат 60х90 1/16. Бум. Типографская № 1. Печать офсетная. Уч.- изд.л. 0,25. Тираж 525. Заказ № 172. Цена 5 коп.