Труды Коми филиала Академии наук СССР
№ 26 1973

К ГЕОМЕТРИЧЕСКОМУ ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Р.И.Пименов

В статье показывается, что для выведения уравнения движения заряда в электродинамике (в общей или частной теории относительности – это безразлично) не обязательно привлекать посторонние геометрии физические соображения. Оказывается, достаточно воспользоваться известными теоремами о виде тензорной функции (данной валентности) от тензорных переменных, чтобы из простых постулатов получить уравнение, допускающее интерпретацию в виде обычного уравнения движения. Рассматривается также некоторая модификация упомянутых постулатов, позволяющая обнаружить дополнительные (сравнительно с традиционной электромагнитной) силы.

1. Постановка задачи. Электродинамические уравнения траектории заряженной частицы

$$\frac{\mathcal{D}}{dS}\frac{dx^i}{dS} = \frac{e}{mc^2} F^i_j \frac{dx^j}{dS} \tag{1}$$

выводятся обычно [2, §§ 17, 23] варьированием подходящего лагранжиана. Имея в виду, что лагранжиан – сугубо физический объект, описанный путь вывода можно назвать "физическим выводом". Однако, с точки зрения геометра, уравнение (1) связывает между собой геометрические объекты: вектор $\frac{\mathcal{D}}{dS}\frac{dx^i}{dS}$, вектор $\frac{dx^i}{dS}$ тензор F^i_j, а также метрику и скаляры. Поэтому геометру естественно задаться вопросом: перечислить геометрические постулаты, которым удовлетворяет эта зависимость, и вывести из них уравнение вида (1), а также все другие зависимости (если таковые возможны), удовлетворяющие этим постулатам. Это мы и назовем "геометрическим выводом"; затем физически интерпретируем полученные результаты.

2. Рассматриваемые объекты. Коль скоро изучается

электромагнетизм, обязательно рассматриваются или подразумеваются следующие геометрические объекты:

I. Псевдоэвклидова, или псевдориманова метрика

$$\underline{\underline{G}} = (g_{ij}) \quad \text{при } i, j = 1,2,3,4, \tag{2}$$

т.е. поле дважды ковариантного тензора, из свойств которого нам потребуются такие: наличие обратного $\underline{\underline{G}}^{\cdot}$ симметрия $g_{ij} = g_{ji}$ и возможность приведения в точке к диагональному виду $g_{11}=1$, $g_{22}=g_{33}=g_{44}=-1$.

II. Электромагнитный потенциал

$$\underline{A} = (A_i) \quad \text{при } i = 1,2,3,4, \tag{3}$$

т.е. поле ковектора, рассматриваемого с точностью до градиентного преобразования. Точнее следует сказать, что задан класс А ковекторных функций точки, обладающий тем свойством, что всякие два ковектора-представителя этого класса различаются лишь градиентом некоторой скалярной функции:

$$\forall \underline{A}\ \forall \underline{A}'\ \left(\underline{A}, \underline{A}' \in A \Rightarrow \exists \varphi\ \underline{A} - \underline{A}' = grad\ \varphi\right), \tag{4}$$

Как известно [2, 18], переход от одного представителя этого класса ковекторов к другому представителю называется в физике калибровочным преобразованием.

III. Коль скоро рассматривается какая-то траектория, хотя бы искомая, появляются еще скаляр S – длина дуги (собственное время) и вектор $\bar{t}$ – единичный касательный вектор к этой траектории; как известно,

$$\bar{t} = \left(\frac{dx^i}{dS}\right) \quad \text{при } i = 1,2,3,4. \tag{5}$$

IV. Геометрия позволяет еще рассматривать любые производные от вышеперечисленных объектов. Имея в виду, что никаких, кроме ковариантных (абсолютных), производных у нас не встретится, в целях упрощения обозначений будем писать $d\underline{A}$ вместо $\mathcal{D}\underline{A}$ и т.п. Дифференцирование по скаляру S обозначаем точкой сверху, а частные ковариантные производные – запятой перед индексом, например:

$$\dot{\bar{t}} = \left(\frac{\mathcal{D}}{dS}\frac{dx^i}{dS}\right), \tag{6}$$

$$\dot{\underline{A}} = \left(A_{i,j}\frac{dx^j}{dS}\right) = \left(A_{i,j}\, t^j\right) \tag{7}$$

3. Постулаты. Наша задача состоит в нахождении всех видов функций, связывающих между собой описанные геометрические объекты при соблюдении следующих постулатов :

Постулат Π_1. Искомая функция должна не зависеть от выбора представителя в классе ковекторов (4) (калибровочная инвариантность уравнения траектории).

Постулат Π_2. Искомая функция должна быть целой рациональной векторной функцией от своих векторных и тензорных переменных.

Основная используемая нами теорема хорошо известна в геометрии [1, §§ 13, 17] . Согласно этой теореме всякая целая рациональная функция данной валентности (p раз ковариантная и q раз контравариантная) от заданных аргументов-тензоров может быть получена следующей поэтапной конструкцией.

I. Берем все или некоторые из аргументов и попарно перемножаем их тензорно :

$$A \otimes B = A^{i \dots j}_{g \dots h} B^{k \dots l}_{m \dots n} , \tag{8}$$

Перемножение можно производить многократно и неограниченно, но так, чтобы полученный тензор был бы $(p+r)$ раз ковариантным и $(q+r)$ раз контравариантным, где $r \geq$ – любое целое число.

II. Полученный исходный тензор альтернируем и симметрируем по всем возможным комбинациям индексов ; напомним, что

$$B_{(ij)} = \frac{1}{2} B_{ij} + \frac{1}{2} B_{ji} , \tag{9}$$

$$B_{[ij]} = \frac{1}{2} B_{ij} - \frac{1}{2} B_{ji} , \tag{10}$$

и аналогично для большего числа индексов. Из одного тензора – исходного члена – получается несколько новых тензоров. Так поступаем с каждым исходным членом.

III. Каждый из полученных на втором этапе тензоров сворачиваем r раз по всевозможным парам нижних и верхних индексов ; снова получаем несколько тензоров из ранее полученного одного.

IУ. Каждый из полученных тензоров берем с некоторым скалярным коэффициентом и все полученное суммируем.

Вообще говоря, сумма получается из бесконечного числа слагаемых, так как на первом этапе можно неограниченно повторять тензорное умножение аргументов. От бесконечности числа слагаемых обычно отказываются, априорно требуя либо однородности функции, либо общее, ограничивая вес аргументов в функции (вес – число, показывающее, сколько раз повторен множителем аргумент в исходном слагаемом).

Описанное таким образом построение действительно приводит к тензорной функции тензорных переменных; математическая трудность состояла в доказательстве обратного : что всякая целая рациональная функция представима в таком виде. Это доказано в работе [1] Мы воспользуемся этим результатом как известным. Там же доказано, что всякая алгебраическая функция тензорных переменных является алгебраической функцией от целых рациональных функций тех же переменных.

4. Теоремы. Нижеследующие теоремы 1 и 2 мотивируют выбор переменных, сделанный нами в основной теореме 3.

Теорема 1. Не существует алгебраической функции, которая выражала бы касательный вектор непосредственно через прочие данные объекты, не подвергнутые дифференцированию.

В самом деле, если не прибегать к дифференцированию, то имеется фактически лишь один аргумент $\underline{A}$, ибо метрику можно явно не выписывать, подразумевая ее в перебрасывании индексов и тому подобном. И тогда, согласно рубрике 3, единственный вид целой рациональной функции

$$\bar{t} = \alpha \bar{A} + \beta A^2 \bar{A} + \gamma A^4 \bar{A} + \dots$$

будет очевидно противоречить постулату Π_1, так как по причине разного веса слагаемых произвольные градиенты в них не могут взаимно уничтожаться; поэтому же не может быть и алгебраической функции от $\underline{A}$.

Теорема 2. Производная от касательного вектора не является алгебраической функцией производной от электромагнитного потенциала (производные по одному и тому же параметру S).

Доказательство. В противном случае в силу постулата Π_2 имели бы для целой рациональной функции

$$\dot{\bar{t}} = \alpha \dot{\bar{A}} + \beta \dot{\bar{A}}^2 \dot{\bar{A}} + \dots$$

или, что то же

$$t^i = \alpha A^i_{,j} t^j + \beta A^h_{,k} A^{,l}_h A^i_{,j} t^j t^k t_l + \dots$$

Подчеркнем, что поскольку аргументом предполагаются не A_{ij} и t^i порознь, а $\dot{A}^i = A^i_{,j} t^j$ постольку в вышенаписанных формулах альтернировать и симметрировать нечего ; второй этап в рубрике 3 отсутствует. Как и в доказательстве теоремы 1, устанавливаем, что написанные формулы не отвечают постулату Π_1.

Мы видим, что исходных объектов недостаточно, чтобы их можно было бы связать функционально. Поэтому введем на базе объектов, рассмотренных в рубрике 2, новый геометрический объект :

$$\underline{\underline{A}} = (A_{ij}) = (A_{i,j}) \quad , \tag{11}$$

Этот объект получен дифференцированием первичных объектов, следовательно, мы имеем право его рассматривать.

Теорема 3. Производная от касательного вектора, рассматриваемая как целая рациональная функция от касательного вектора и от производной от потенциала, т.е.

$$\dot{\bar{t}} = \bar{f}\ (\bar{t}, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{A}}) \tag{12}$$

имеет вид $\dot{t}_i = \alpha A_{[ij]} t^j + \beta A_{[ij]} A_{[hk]} A_{[\ell m]} g^{jh} g^{k\ell} t^m + \dots$

$$+ \gamma A_{[ij]} A_{[hk]} A_{[\ell m]} g^{h\ell} g^{km} t^j + \dots$$

$$+ \delta A_{[ij]} A_{[hk]} A_{[\ell m]} g^{k\ell} t^j t^h t^m + \dots \quad , \tag{13}$$

где в целях удобства выкладок индекс i опущен вниз. Многоточия означают аналогично получаемые слагаемые веса большего, чем три.

Доказательство. Валентность слева $(1,0)$. Поэтому все исходные слагаемые должны иметь валентность $(1+\tau, \tau)$. В нашем распоряжении вектор $\bar{t}$ валентности $(0,1)$ и два тензора $\underline{\underline{A}}$ и $\underline{\underline{G}}$ валентности $(2,0)$, причем, ввиду наличия обратного у G его можно заменить на тензор (g^{ij}) валентности $(0,2)$.

Слагаемое наименьшего веса при $\tau=0$ имеет вид αt_i

Так как всегда

$$\bar{t}^2 = t_i t^i = g_{ij} t^j t^i = 1 , \tag{14}$$

$$\dot{\underline{t}}\,\bar{t} \doteq 0 , \tag{15}$$

и в соответствии с (12) должно быть

$$\alpha t_i t^i = 0 , \tag{16}$$

откуда заключаем, что $\alpha = 0$

При $\tau=1$ на правом этапе имеются три тензорных произведения $\underline{\underline{A}} \otimes \bar{t}$, $\bar{A} \otimes t$ и $\bar{t} \otimes \underline{t} \otimes \underline{t}$ т.е.

$A_{ij} t^h$, $g^{ik} A_{kj} t_h$ и $t^i t_j t_h$; как мы увидим далее, первое и второе, отличающиеся лишь переброской индексов, сводятся одно к другому. На втором этапе они дают слагаемые вида :

$$A_{(ij)} t^h , A_{[ij]} t^h , A^i_{(j} t_{h)} ,$$

$$A^i_{[j} t_{h]} , \quad t^i t_{(j} t_{h)} , \quad t^i t_{[j} t_{h]} ,$$

а на третьем – вида : $A_{(ij)} t^j$, $A_{[ij]} t^j$,

$$A^j_{(j} t_{i)} , A^j_{[j} t_{i]} , t^j t_{(j} t_{i)} , t^j t_{[j} t_{i]} ,$$

Так как g^{ij} – симметрический, то от третьего и четвертого слагаемого остаются лишь члены вида $g^{hj} A_{(hj)} t_i$ и $\pm g^{hj} A_{ji} t_h$. Эти члены и первое слагаемое зависят от калибровочного преобразования, и единственная возможность устранить градиентное слагаемое в них состоит в таком выборе коэффициентов в первом, третьем и четвертом слагаемых, чтобы от сложения A_{ji} и $A_{(ij)}$ осталось бы $A_{[ij]}$ следовательно, фактически это второе слагаемое.

Итак, можно считать коэффициенты при первом, третьем и четвертом слагаемых нулями за счет подходящего изменения и без того произвольного коэффициента при втором слагаемом. Пятое и шестое слагаемые с учетом (14) приводят к слагаемому вида αt_i , что по (16) означает обращение в ноль коэффициента перед ними. Следовательно, остается лишь второе слагаемое с произвольным коэффициентом

$$\alpha A_{[ij]} t^j \tag{17}$$

а это – первое слагаемое в доказываемой формуле (13). Очевидно, благодаря кососимметричности $A_{[ij]}$ условие (15) выполнено автоматически.

При $\tau=2$ исходные слагаемые получаются либо умножением исходных слагаемых при $\tau=1$ на имеющиеся в нашем распоряжении тензоры валентности $(1,1)$, либо умножением исходных слагаемых при $\tau=0$ на тензоры валентности $(2,2)$. Умножая тензорно $\underline{\underline{A}} \otimes \bar{t}$ и $\bar{t} \otimes \underline{t} \otimes \underline{t}$ на $\underline{\underline{A}}$ и $\bar{t} \otimes \underline{t}$ соответственно ($\bar{A} \otimes \underline{t}$ не отличается от $\underline{\underline{A}} \otimes \bar{t}$ по существу), а потом $\bar{t}$ на $\underline{\underline{A}} \otimes \bar{t} \otimes \bar{t}$ найдем, что все порождаемые из них на первом и втором этапах слагаемые входят с коэффициентом ноль благодаря постулату Π_1 и условию (15). В самом деле, слагаемые, в которые входят $A_{(ij)}$ должны исчезать по постулату Π_1. Поэтому, в частности, исчезнут те слагаемые, симметрирование или альтернирование (производимое теперь не только по парам, но и по тройкам индексов) в которых производится по индексам у $g^{ij} g^{k\ell}$

ибо $g^{ij}A_{ij} = g^{ij}A_{(ij)}$ Слагаемые же вида $A_{[ij]}g^{jk}A_{[km]}t^m$, в которых имеется только $A_{[ij]}$ оказываются симметричными по индексам i и m откуда

$$A_{[ij]}\, g^{jk} A_{[km]}\, t^m t^i \neq 0, \tag{18}$$

чем нарушалось бы условие (15) при ненулевом коэффициенте. Слагаемые из одних лишь $\bar{t}$ исчезнут по той же причине, по какой исчезает самый первый рассмотренный член.

Из 18 априори возможных слагаемых при $r=3$ существенно различны лишь

$$\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\bar{A}}\otimes\underline{\bar{A}}\otimes\bar{t}\ ,\ \underline{\underline{A}}\otimes\underline{\bar{A}}\otimes\bar{t}\otimes\underline{t}\otimes\bar{t},\ \underline{\underline{A}}\otimes\bar{t}\otimes\underline{t}\otimes\bar{t}\otimes\underline{t}\otimes\bar{t}\ ; \tag{19}$$

прочие получаются из них опусканием и поднятием соответствующих индексов. Первое из слагаемых в (19) породит слагаемые вида

$$A_{ij}\, A^k_h\, A^h_k\, t^j,\quad A_{ij}\, A^i_h\, A^j_k\, t^h,\quad A_{kj} A^i_h\, A^j_i\, t^h,$$

где ради удобства записи не указаны знаки симметрирования и альтернирования (по парам, тройкам и четверкам индексов). Здесь второе и третье слагаемые оказываются одним и тем же. К тому же, таких слагаемых при $A_{(ij)}$ быть не может ввиду условия (15), ибо $A_{(ij)}\, A^i_h\, A^j_k$ симметричны по h и k Итак, остаются лишь

$$\left.\begin{aligned} &A_{[ij]}\, A_{[ph]}\, g^{pk} g^{h\ell} A_{[k\ell]}\, t^j \\ &A_{[ih]}\, g^{hp} A_{[pk]}\, g^{k\ell} A_{[\ell j]}\, t^j \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

так как члены, содержащие $A_{(ij)}$ противоречили бы постулату Π_1. Те же слагаемые, в которых альтернирование ведется более, чем по парам индексов, исчезнут при свертках. Слагаемые (20) – это второй и третий члены в доказываемой формуле (13), причем благодаря кососимметричности тензора $A_{[ij]}$ они удовлетворяют и условию (15). Второй порождающий член $\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\bar{A}}\otimes\bar{t}\otimes\underline{t}\otimes\bar{t}$ дает, как проверяется непосредственно, только нули либо члены с нулевыми коэффициентами. От третьего $\underline{\underline{A}}\otimes\bar{t}\otimes\underline{t}\otimes\bar{t}\otimes\underline{t}\otimes\bar{t}$ может остаться разве лишь член вида (17), что не меняет первого слагаемого.

При $r=4$ первичные члены, рассматриваемые с точностью до переброски индексов, имеют вид:

$$\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\bar{A}}\otimes\underline{\bar{A}}\otimes\underline{\bar{A}}\otimes\bar{t}\ ,\quad \underline{\underline{A}}\otimes\underline{\bar{A}}\otimes\underline{\bar{A}}\otimes\bar{t}\otimes\underline{t}\otimes\bar{t},$$
$$\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\bar{A}}\otimes\bar{t}\otimes\underline{t}\otimes\bar{t}\otimes\underline{t}\otimes\bar{t}\ ,\quad \underline{\underline{A}}\otimes\bar{t}\otimes\underline{t}\otimes\bar{t}\otimes\underline{t}\otimes\bar{t}\otimes\underline{t}\otimes\bar{t}$$

Первый и третий содержат $\underline{\underline{A}}$ с четным весом. Отсюда, как и при $r=2$ легко заключить, что эти члены будут излишне симметричны: либо образованы из $A_{(ij)}$ либо при умножении на $\bar{t}$ получится симметричная форма, и тем самым нарушится или постулат Π_1 или условие (15). Последний член даст разве лишь слагаемое вида (17). Остается второй, от которого после симметрирования, альтернирования и сверток останется одно слагаемое вида:

$$-A_{[ij]}\, A_{[k\ell]}\, g^{hk} A_{[hm]}\, t^j t^\ell t^m, \tag{21}$$

автоматически удовлетворяющее условию (15). Это – последний из выписанных в (13) членов. Ясно, что при $r \geqslant 5$ придется повторить множителями либо $\underline{\underline{A}}$ (с точностью до переброски индексов), либо $\bar{t}$ свыше трех раз; тогда последующие слагаемые будут по $\underline{\underline{A}}$' или $\bar{t}$ иметь вес свыше трех.

Таким образом, теорема доказана.

5. Т р е х м е р н а я з а п и с ь о с н о в н о й ф о р м у л ы. Способ получения последующих членов ясен: остаются те члены, которые образованы из $A_{[ij]}$ причем вес $A_{[ij]}$ в свертке должен быть нечетным, как и вес t^i. Для оценки полученного результата целесообразнее обратиться к его физической интерпретации, нежели выписывать дальнейшие члены. В соответствие с принятыми в физике обозначениями:

$$A_{[i,j]} = \frac{1}{2} F_{ij}\ , \tag{22}$$

формулы (13) и (11) дадут возможность написать:

$$\ddot{x}^i = \alpha F^i_j\, \dot{x}^j + \beta F^i_j\, F^h_k\, F^k_h\, \dot{x}^j + \gamma F^i_h F^h_k\, F^k_j\, \dot{x}^j + \tag{23}$$

$$+\delta F^i_j F^h_k F_{he}\dot{x}^j\dot{x}^k\dot{x}^e+\ldots \qquad (23)$$

Здесь первый член - хорошо известная в электродинамике традиционная сила, воздействующая на пробный заряд. Второе, третье и четвертое слагаемые - новшества, неизвестные электродинамическому уравнению траектории заряда, получаемому традиционным "физическим выводом". Имеются ли в природе физические явления, описываемые этими дополнительными слагаемыми ? В поисках таких явлений преобразуем (23) к трехмерному виду, вводя обычные обозначения :

$$x^1=ct,\quad \bar{t}=\left[\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},\ \frac{\bar{V}}{c}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

$$\bar{p}=m\bar{V}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},\qquad E=mc^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$E_\alpha=F_{1\alpha},\qquad H_\alpha=F_{\beta\gamma}, \qquad (24)$$

где α,β,γ образуют четную перестановку индексов 2, 3, 4. В этом случае для уравнения импульса в (23) необходимо принять $i=2,3,4$; тогда получаем :

$$\frac{d\bar{p}}{dt}=\left(\bar{E}+\bar{H}\times\frac{\bar{V}}{c}\right)\left\{\alpha+\beta\left(E^2-H^2\right)+\gamma\left[E^2\cos^2\varphi\left(\bar{E},\bar{V}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-H^2\sin^2\varphi\left(\bar{H},\bar{V}\right)\right]\frac{V^2}{c^2-V^2}+\delta\left(\bar{H}-\bar{E}\times\frac{\bar{V}}{c}\right)\left(\bar{E}\bar{H}\right)+\ldots\right\}, \qquad (25)$$

а для уравнения энергии взять

$$\frac{dE}{dt}=\left(\bar{E}\bar{V}\right)\left\{\alpha+\beta\left(E^2-H^2\right)+\gamma\left[E^2\cos^2\varphi\left(\bar{E},\bar{V}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-H^2\sin^2\varphi\left(\bar{H},\bar{V}\right)\right]\frac{V^2}{c^2-V^2}+\delta\left(\bar{H}\bar{V}\right)\left(\bar{E}\bar{H}\right)+\ldots\right\} \qquad (26)$$

Это же уравнение можно получить умножением (25) на $d\bar{r}$. Буквы α,β,γ и δ в уравнениях (25, 26) обозначают не коэффициенты в (23) ; однако легко выразить одни коэффициенты через другие, хотя это нам не понадобится.

Итак, дополнительные силы пропорциональны кубу напряженностей и скоростей в отдельных слагаемых, а не первым степеням их, как основная, традиционная сила, оставшаяся у

нас без изменений. Кроме того, дополнительные силы действуют частично в том же направлении, что и традиционная сила (с точностью до знака), и частично в другом направлении (слагаемое с коэффициентом δ).

Так как коэффициенты β,γ,δ в рамках теории произвольны, то априори не исключено, что полученные нами силы известны физике, но не так как электромагнитные, а "другой природы" ; в этом случае коэффициенты β,γ,δ могли бы служить константами связи, мерой новых зарядов или иными характеристиками в других теориях.

6. **Кулоново поле и дополнительные взаимодействия.** Для лучшего уяснения путей поиска полученных новых сил разберем подробнее одно поле. Рассмотрим пробный заряд, движущийся в кулоновом поле

$$\text{т.е.,}\qquad \bar{A}=\left(\frac{e}{r},0,0,0\right), \qquad (27)$$

$$\bar{E}=\frac{e\bar{r}}{r^3},\quad \bar{H}=0 \qquad (28)$$

Уравнение импульса (25) примет вид :

$$\frac{d\bar{p}}{dt}=\frac{e\bar{r}}{r^3}\left(\alpha+\beta\frac{e^2}{r^4}+\gamma\frac{e^2}{r^6}\cdot\frac{\left(\bar{V}\bar{r}\right)^2}{c^2-V^2}\right)+\ldots \qquad (29)$$

Следовательно, дополнительные силы могут проявляться лишь при очень малых растениях r , либо при крайне больших зарядах e , либо при очень близких к световым скоростях V Можно высказать соображения о порядке величин коэффициентов β и γ причем относительно β это сделать легче.

Гипотеза. Для электрона дополнительная сила порожденного им кулонова поля, не зависящая от скорости, делается сравнимой с традиционной силой того же кулонова поля на расстояниях 10^{-20}м.

Из этой гипотезы следует, что

$$\alpha\approx\beta\,10^{80} \qquad (30)$$

При таком значении β дополнительные силы могут конкурировать с кулоновой в макроявлениях ($r\approx 1\,м$) в случае, если заряд $e\approx 10^{20}$ кулонов, т.е. для устойчивых токов силой в 10^{20} ампер.

Так как зарядов таких размеров и токов такой силы мы не знаем, то у нас нет возможностей искать в макромире проявлений силы, описываемой слагаемым β При приближении скорости пробной частицы к скорости света расстояние, на котором начинает проявляться это взаимодействие с членом , возрастает слишком медленно, чтобы надеяться на ощутимое влияние релятивистских скоростей. Влияние этого члена может ускользнуть также из-за того, что при движении по практически круговой орбите $\bar{v}\bar{r}=0$

О знаке коэффициентов мы ничего не можем заключить. Далее будут высказаны лишь эвристические соображения.

7. Некоторые эффекты "дополнительного взаимодействия" (качественно). Если суммарный знак дополнительных сил с коэффициентами β и γ противоположен знаку α, то заряд, движущихся в кулоновом поле, ведет себя не так, как предписывается традиционной теорией. Согласно традиционной теории такой заряд, вращаясь вокруг центра, постоянно приближается к нему и в рамках неквантовой теории в конце-концов должен упасть на центральный заряд. В нашей же теории пробный заряд будет приближаться к центру лишь до некоторого расстояния, а затем на него станет действовать дополнительная сила, примерно равная кулоновой, но противоположно направленная. Падение застопорится. Если же заряд чересчур удалится от центра под действием этой дополнительной силы, то значение ее резко уменьшится, снова вступит в действие одна кулонова сила, и заряд вернется на положенное ему расстояние.

Не исключено, что при подходящем выборе коэффициентов β и γ а может и δ полная энергия центрального поля окажется сходящейся (конечной).

Продолжая получение новых членов, описанное в рубрике 3, мы могли бы получить новые силы со своими константами, зависящие от нечетных степеней напряженностей и скоростей; в кулоновом поле эта иерархия дополнительных сил располагалась бы как r^{-2} в нечетных степенях. Это может соответствовать другим "слоям" микроструктуры, другим "взаимодействиям".

8. Замечания о логическом статусе вывода. Может показаться (эта мысль высказана автору Л.А.Халфиным), будто требование целой рациональности очень ограничительно. Нам так не кажется по двум причинам. Во-первых, традиционное уравнение траектории удовлетворяет не только требованию "целой рациональности", но даже более сильному требованию линейности, так что мы отнюдь не усиливаем класс допустимых функций, а лишь расширяем его. Во-вто-

рых (эту мысль высказал автору В.А.Залгаллер), произвольную функцию можно всегда приближенно заменить рациональной; важна возможная (допустимая) структура членов, ближайших за линейными.

К появляющимся коэффициентам β, γ, δ, ... можно относиться двояко. Их можно устранить еще до рождения, потребовав, например, выполнения постулата Π_3:

Постулат Π_3. Искомая функция должна быть целой рациональной функцией от своих векторных и тензорных переменных, причем по каждому аргументу веса не выше единицы.

Тогда в рассуждениях, приведших нас к формуле (13), не будет слагаемых при $r>1$, останутся слагаемые одного вида (17), и формула (23) совпадает с (1), а все $\beta=\gamma=\delta=...=0$ в силу постулата Π_3. Поэтому к "геометрическому выводу" можно относиться как к теореме, показывающей, из каких узко геометрических аксиом можно вывести традиционное уравнение движения заряда, и не утверждающей ничего больше. Даже в этом понимании "геометрический вывод" способствует выявлению аксиом электродинамики; в частности, благодаря ему завершается геометризация электромагнетизма, предложенная автором [3-4, гл. 3] в рамках грав-электромагнитного истолкования полуримановой геометрии ${}^3V_5^4$.

Можно, напротив, не усиливая постулат Π_2 никакими требованиями относительно веса аргументов (или, например, допустив вес не свыше 3), получить формулу (23) с дополнительными слагаемыми (дополнительными сравнительно с традиционной формулой). Тогда равенство нулю или близость нулю коэффициентов β, γ, δ, ... будет уже не логическим, а эмпирическим и, следовательно, приближенным фактом. Конечно, и в этом случае можно, как подсказал автору А.Д.Сахаров, произвести подходящее преобразование лагранжиана и получить (23) или (25) обычным вариационным путем. В этом смысле противопоставление "геометрического" вывода "физическому" не имеет значения. Но предложение А.Д.Сахарова порождает вопрос: какими физическими признаками характеризуются те нелинейные лагранжианы, из которых можно получить уравнения вида (23) и (25)? Неизвестно, можно ли на него ответить. Наш же путь, игнорирующий вариационный принцип, дает ответ на подобные вопросы.

Автор выражает свою признательность ранее упомянутым в тексте лицам, а также Ю.Д.Бураго за ценные замечания при обсуждении данной статьи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предполагая лишь, что производная касательного вектора является целой рациональной функцией от самого касательного вектора, векторного потенциала поля и производных этого потенциала, из известных теорем о виде векторных функций нам удается установить, что роль уравнения траекторий может играть не только обычное уравнение (которое удовлетворяет сверх названных условий еще требованию линейности).

К его правой части, вообще говоря, могут быть добавлены члены, которые можно интерпретировать как дополнительные силы, сказывающиеся только при исключительно больших электромагнитных полях или на очень близких расстояниях; тогда они значительно превосходят традиционную электромагнитную силу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М.-Л., Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1948.
2. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Теория поля. М., Физматгиз, 1962.
3. Пименов Р.И. Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени). Л., "Наука", 1968.
4. Пименов Р.И. Еще один шаг в геометризации электромагнетизма. Тезисы докладов Ш Советской гравитационной конференции. Ереван 1972, 136-138.

Труды Коми филиала Академии наук СССР
№ 26 1973

МИНИМАЛЬНЫЙ СТОК РЕК ЗАПАДНОГО СКЛОНА ПОЛЯРНОГО, ПРИПОЛЯРНОГО И СЕВЕРНОГО УРАЛА

Н.Н.Ветошкина

Изучение процессов формирования минимального стока рек западного склона Урала, обладающих большими потенциальными запасами гидроэнергии, имеет важное значение при водохозяйственном использовании их в целях гидроэнергетики.

Вопросы формирования и методы расчета минимального стока рек Урала исследуются в ряде работ [1, 2, 3, 4, 5, 8, 10] В одной из них [4] на основании анализа материалов гидрометрической съемки р.Щугор рассматривается влияние физико-географических факторов подстилающей поверхности на формирование минимального стока рек данного бассейна. В других работах [5, 10] исследуются зависимости минимального стока от основных стокоформирующих факторов – модуля годового стока и высоты бассейна.

Следует, однако, отметить недостаточную обоснованность некоторых выводов и рекомендаций гидрометрическими данными в этих работах. Гидрометрические материалы, накопленные за последнее десятилетие на сети Гидрометслужбы, и материалы гидрометрических съемок, проводившихся отделом энергетики и водного хозяйства Коми филиала АН СССР на р.Печоре и ее притоках с 1959 по 1967 гг., дают возможность более полного исследования условий формирования минимального стока рек западной части Полярного, Приполярного и Северного Урала (до 61° с.ш.), выявления роли основных стокоформирующих факторов в периоды низкого стока и уточнения методов расчета минимального стока для неизученных рек. Своеобразие этого крупного физико-географического региона на территории Коми АССР состоит в том, что на Урале, представляющем собой меридионально вытянутую горную систему, наблюдается сложное сочетание широтной зональности и высотной поясности, оказывающей влияние на условия формирования, распределение и режим речного стока.

Краткая физико-географическая характеристика района.

Урал расположен на востоке Коми АССР. Наиболее возвы -