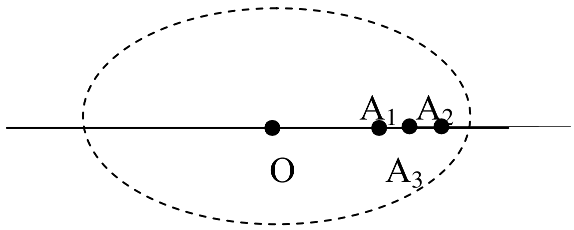
Р. И. ПИМЕНОВ

КОСМОЛОГИЯ И НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО

Начнем с вещей, давно хорошо известных среди специалистов. При всяком измерении расстояний или промежутков времени, прежде всего, возникает вопрос о выборе масштаба единицы измерения. В повседневной физике, основанной на изучаемой в школе геометрии Эвклида, не существует какой-либо априорной, естественной и раз навсегда данной единицы длины или времени. Очевидно, что расстояния можно измерять и километрами, и верстами, и дюймами, и световыми годами, а время — секундами, количеством распавшегося радия, годами или оборотами луны; но даже если мы выбрали эталон длины, то проблема измерения этим отнюдь не решена.

Для того, чтобы измерить ширину Волги около Саратова, нужно перенести эталон метра из места его хранения до Саратова и повернуть его поперек русла реки. Но кто может поручиться, что при переносе материального стержня или его повороте подлинная длина его не меняется? (Я имею в виду не то сокращение, которое, согласно частной теории относительности, наблюдается в процессе движения материального стержня, а говорю о длинах стержня до и после движения.) Может быть, в разных местах действуют различные силы: сила тяготения, электромагнитные силы или другие неучитываемые нами факторы, меняющие подлинную длину стержня в разных местах и различных положениях.

В начале нашего века известный французский математик и физик Анри Пуанкаре указал такую модель: представим себе сферу, радиус которой равен, скажем 2 км, очень сильно нагретую внутри, причем температура по определенному закону падает кнаружи. Пусть эталон длины находится в центре. Если мы перенесем этот эталон в какое-либо места внутри сферы дальше от центра, то подлинная длина этого стержня, очевидно, уменьшится всилу падения температур! Упростим несколько вопрос и будем считать, что сокращение происходит по следующему закону: если эталон имел длину 1 км и одним концом упирался в центр сферы, то когда мы передвинем его вдоль самого себя так, чтобы этот конец попал в точку, где был второй конец, то этот второй кона попадет в точку, удаленную от центра на 1,5 км., т.е. эталон сократится вдвое, его подлинная длина стала 0,5 км. При откладывании от точки, удаленной на 1,5 км, он опять сократится вдвое, его подлинная длина будет равна 250 м т.д. На черт. 1 изображены точки последовательного откладывания эталона длины внутри сферы Пуанкаре:

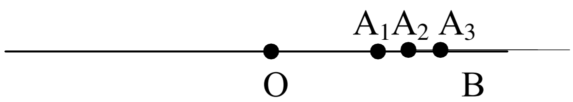


Теперь предположим, что существа, обитающие в этой сфере, лишены возможности различать температуры и не знают, что их стандарт длины сокращается по мере удаления от центра. Тогда они будут считать отрезки OA_1, A_1A_2, A_2A_3 и вообще A_n,A_{n+1}, получающиеся при последовательном откладывании масштаба, равными между собой. С их точки зрения, отрезок OA_2 (подлинная длина которой равна 1,5 км (будет равен 2 км, так же, как и отрезок A_1A (подлинная длина которого 750 м), ибо их масштаб уложится в каждом из этих отрезков ровно 2 раза.

Эта модель обладает интересной особенностью. Хотя диаметр сферы всего 4 км, существа, обитающие в ней, будут считать ее бесконечной, ибо с точки зрения их масштаба, граница сферы удалена от центра на бесконечное число км, или, говоря проще, они не в состоянии достигнуть границы, т.е. обнаружить ее существование. Таким образом, вся бесконечная Вселенная как бы оказалась упрятанной во внутрь довольно маленького шарика или, обратно, обитатели конечной ограниченной Вселенной с полным правом могут считать свой мир бесконечным, если подходящим образом выберут масштаб.

Перейдем теперь к вопросу об измерении времени. Здесь также не существует какой-либо возможности сравнивать между собой различные промежутки времени или, как выражаются в математике, однозначно проградуировать шкалу времени. Действительно, какой смысл вкладывается в утверждение, что время течет равномерно? Значит ли это, что часы в моей комнате идут равномерно, т.е., что подлинные промежутки времени, которым соответствует поворот стрелок на равные углы, равны между собой? Но почему именно эти часы? А вдруг они начнут отставать? Да и что значит «отставать»? Отставать в сравнении с какими часами? С часами Пулковской или Гринвичской обсерваторий? А если все часы в мире, начиная с некоторого момента, отстают или уходят вперед — и при том все одинаково?! Ведь известно, что под воздействием сильных гравитационных полей (там, где сконцентрированы большие массы) время, согласно общей теорий относительности, течет медленнее и это подтверждается наблюдениями. Если бы мы попробовали взять за эталон времени период вращения земли вокруг своей оси, то мы наткнулись бы на то, что, согласно астрономическим наблюдениям, период вращения земли удлиняется относительно показаний кварцевых часов. Но какие же часы «настоящие»? Вообще, какие бы часы — естественные или искусственные — мы ни взяли, мы никогда не можем быть уверены, что они идут равномерно. Фактически эта «равномерность» является вопросом соглашения: мы полагаем по определению, что промежутки времени между последовательными показаниями часов равны. Но сам выбор этих последовательных показаний произволен.

Поясним это примером. Согласно распространенной шкале времени, в основе которой лежит вращение Земли, процесс распада радия, урана и других радиоактивных веществ, происходит так: за равные промежутки времени распадается половина еще остающегося вещества. Скажем, если у нас 2 кг радиоактивных веществ и за первый век распался 1 кг, то за второй распадется 0,5 кг, за третий — 250 г и т.д. На черт. 2 отрезок OB



выражает 2 кг, OA_1 = 1 кг, A_1A_2 = 0,5 кг и т.д., а номер «*n*» отрезка выражает число столетий, необходимых для распада соответствующего количества вещества, номер шага распада. Легко заметить сходство такой градуировки времени с вышеприведенной градуировкой Пуанкаре для расстояний. Если при обычной градуировке времени всегда будет оставаться некоторое количество нераспавшегося радиоактивного вещества (что соответствует в модели Пуанкаре невозможности достигнуть границы сферы), то, изменяя градуировку времени так, чтобы подлинный промежуток времени был бы пропорционален количеству уже распавшегося радиоактивного вещества, мы получим, что через некоторое, вполне определенное время, все радиоактивное вещество (2 кг) полностью исчезнет. А, именно, если в новом масштабе времени 1 кг вещества распался за 100 лет, то через следующие 100 лет полностью распадется второй, последний кг. (Фактически процесс распада вещества есть явление статистическое, период полураспада выражает лишь вероятность этого распада. Мы отвлекаемся от всех возможных осложнений, чтобы выпуклее обрисовать основную идею.) Т.о., время для наблюдателей с разными градуировками может обладать существенно различными характеристиками: то, что для одного будет казаться некоторым ограниченным, конечным промежутком времени, то для другого будет обладать признаками бесконечного времени, не имеющего ни начала, ни конца. Разумеется, реальное событие, происходящее в мире, ни в коей мере не зависит от градуировки времени или пространства, но, как мы видим, существенно меняется описание этих событий.

Выбор масштаба времени, пропорционального количеству уже распавшегося вещества, далеко не случаен. Всякому химику известно, что почти все вещества вступают в химические реакции по тому же (показательному) закону, по которому происходит распад радия. Мы не будем приводить детальных примеров из физики и химии, но отметим закон, связывающий две рассмотренные градуировки.

Если обозначить время в бесконечной шкале через t, а время в измененной шкале τ, то связь между ними имеет вид

$$t = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\tau}$$

Когда

$$\tau_0 = 0 \qquad t_0 = 1$$

$$\tau_1 = 1 \qquad t_1 = 1{,}5$$

$$\tau_2 = 2 \qquad t_2 = 1{,}75$$

На черт. 2 отрезок OA_n выражает время t_n, а время τ_n равно номеру того шага, при котором получается отрезок $A_n A_{n+1}$; с учетом всего этого формула очевидна, если вспомнить, что $OB = 2$, A_nB соответствует как раз n-шагу распада радиоактивного вещества. Разумеется, то, что мы выбрали весь отрезок равным именно двум, а единицу масштаба OA_1 взяли равной половине всего отрезка, — не имеет существенного значения. В общем случае формула имеет вид:

$$t = a - b^{\tau}$$

или

$$\tau = \log_b (a - t)$$

где «a» и «b» — некоторые физические постоянные.

Крупный английский физик и астроном Э. А. Милн (умерший в 1951 г.) систематически рассматривал две шкалы времени (как он их называл: кинематическую и динамическую), связанные соотношением, вполне аналогичным только что приведенному:

$$\tau - \tau_0 = t_0 \log \frac{t}{t_0}$$

Мы не станем здесь подробно объяснять интересного физического значения этих постоянных τ_0 и t_0, отсылая интересующихся к книгам: *E.A.Milne, Relativity, Gravitation and World Structure, 1936*, и его же *Kinematic Relativity, 1948,* но отметим вот какое обстоятельство. В его теории, оказывается, что различие в градуировке шкал времени влияет не только на характер времени, но и на характер пространства. На одной шкале времени пространство будет эвклидово и галактики долины разбегаться; а при другой шкале пространство будет пространством Лобачевского и галактики в целом неподвижны друг относительно друга. Важно отметить, что в обоих случаях должно наблюдаться смещение спектра далеких галактик к красному концу. Это реальный наблюдаемый факт, независящий от выбора градуировки; от нее зависит лишь способ описания явления.

То, что Милн выбрал две различные шкалы времени, не является случайным; тем более это нельзя рассматривать как чисто умозрительное рассуждение, не имеющее никакой практической ценности. Всякому, сталкивавшемуся с вопросом о происхождении и эволюции небесных тел: Земли, звезд, звездных систем, известно, что астрономия стоит здесь перед дилеммой: выбрать «короткую» или «длинную» шкалы времени. С одной стороны, для объяснения эволюции звездных систем требуется предложить, что они существуют триллионы лет или, как говорят в астрономии, требуется «вводить длинную шкалу времени». С другой стороны, для объяснения эволюции самих звезд необходимо считать, что эти звезды существуют лишь несколько миллиардов лет, т.е. «вводится короткую шкалу времени». Получается парадоксальное положение: звездная система, выходит, возникла в миллионы раз раньше, нежели те звезды, из которых она образовалась! Вопрос гораздо глубже и касается не только звезд. Одно время астрономы даже делились на приверженцев «короткой» и «длинной» шкал времени. Милну удалось показать, что здесь нет никакого противоречия: некоторые явления лучше описываются при одной градуировке времени, а некоторые — при другой. Выбор градуировки зависит от нас; от этого выбора зависит описание явлений, а сами реальные события, наблюдаемые факты, — остаются неизменными, инвариантными.

Но на эту же проблему градуировки времени и пространства можно взглянуть с совершенно иных позиций — с позиций оснований математики.

В основе всякой градуировки лежит понятие числа; в основе понятия числа — идея натурального числа. Натуральное число определяется как то, что получается из единицы приписыванием следующей единицы. Рассмотрим такую последовательность чисел:

$$\boldsymbol{1},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{7}{4},\quad \frac{15}{8},\quad \frac{31}{16},\quad \ldots,\quad \frac{2^n-1}{2^{n-1}},\quad \ldots$$

Эту последовательность можно поставить в соответствие с натуральным рядом чисел. Тогда число, стоящее на первом месте, будет соответствовать единице, стоящее на втором — двойке и т.д. Введем для членов этой последовательности операцию «сложения». «Сложить» два числа из этого ряда — значит, взять такое число из этого ряда, номер места которого в ряду равен сумме номеров мест слагаемых. Обозначая это «сложение» знаком (+) (в отличие от обычного сложения); мы можем записать определение этой операции следующим образом

$$\frac{2^n-1}{2^{n-1}}(+)\frac{2^m-1}{2^{m-1}}=\frac{2^{n+m}-1}{2^{n+m-1}}$$

Нетрудно проверить, что для так построенного ряда выполняются аксиомы Пеано, определяющие натуральный ряд. Поэтому с точки зрения оснований математики указанный ряд оказывается полностью аналогичным — изоморфным, как говорят в математике — натуральному ряду. Все свойства натуральных чисел могут быть автоматически перенесены на члены этого ряда. Исходя из определения «сложения», можно обычным образом определить «вычитание», «умножение», «деление» и др. арифметические операции, определить «дробные» и «вещественные» числа и т.д., словом, построить всю математику. Все теоремы сохранят свою силу. Нужно отчетливо уяснить, что если мы уже выбрали в качестве стандартного натурального ряда один из рядов:

1, 2, 3, 4, 5, 6, …, n

$$\boldsymbol{1},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{7}{4},\quad \frac{15}{8},\quad \frac{31}{16},\quad \frac{63}{32},\quad \ldots,\quad \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$$

то вся последующая арифметика (а вообще математика) определится однозначно, но у нас нет никакой возможности сделать выбор между этими двумя рядами или, что то же, между двумя соответствующими им математиками. Причина заключается в том, что по своим внутренним свойствам обе математики совершенно одинаковы, изоморфны, неразличимы, а разница между ними проявляется лишь при их сопоставлении друг с другом.

Следующая совершенно аналогична той, которую мы заметили, рассматривая модель Пуанкаре или градуируя время пропорционально распавшемуся радию: то, что при одной градуировке кажется конечным числом «два», то при другой градуировке будет «первым порядковым числом, большим любого натурального числа», т.е. тем, что создатель теории трансфинитных чисел Георг Кантор обозначал символом ω. Верно и обратное: бесконечное с точки зрения одной градуировки будет конечным с точки зрения другой.

Можно ввести много различных градуировок пространства, времени и других величин. Отметил две градуировки величин, градуировки, представляющие геометрический интерес.

Всем известно, что в частной теории относительности сложение скоростей происходит по закону

$$V_{рез} = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{C}}$$

где

C — скорость света

V_1 , V_2 — слагаемые скорости

Будем теперь исходить из этого закона сложения величин, несколько упростив его:

$$a \oplus b = \frac{a+b}{1+ab}$$

Построим соответствующий этому сложению натуральный ряд, взяв в качестве первого числа $\frac{1}{2}$.

Второе число, «двойка» нового натурального ряда, получается прибавлением «единицы» $\left(\frac{1}{2}\right)$ к «единице» $\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

«Тройка» получается прибавлением «единицы» к «двойке»

$$\frac{4}{5} \oplus \frac{1}{2} = \frac{13}{14}.$$

«Четверка»:

$$\frac{13}{14} \oplus \frac{1}{2} = \frac{40}{41}.$$

Получаем ряд

$$1, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{13}{14}, \quad \frac{40}{41}, \quad ..., \quad \frac{3^n - 1}{3^n + 1}, \quad ...,$$

что легко проверяется методом математической индукции.

Как мы упоминали прежде, при всякой градуировке натурального ряда можно построить арифметику, соответствующую этой градуировке. Применим эту градуировку к геометрии — будем определять длину отрезков в соответствии с новыми натуральными числами. (Для знакомых с мероопределениями Кэли-Клейна отметим, что это соответствует мероопределению *arth x*.) Тогда окажется, что плоскость, которая с точки зрения обыкновенных натуральных чисел несла геометрию Лобачевского, с точки зрения вновь введенных натуральных чисел несет геометрию Эвклида.

Как известно, кроме геометрий Эвклида и Лобачевского, есть еще эллиптическая геометрия. Эта геометрия соответствует той градуировке натурального ряда, которая получится, если закон сложения взять в виде

$$a \oplus b = \frac{a+b}{1-ab}$$

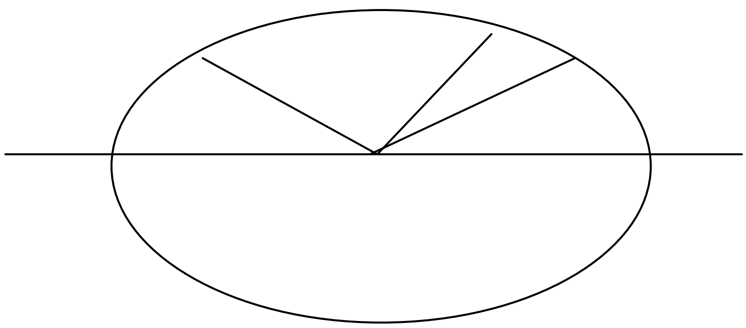
(это соответствует мероопределению Кэли-Клейна *arctg x*).

Таким образом, одна и та же плоскость, одно и то же пространство при различных исходных градуировках оказываются совершенно различными: ведь хорошо известно, как велико различие между этими геометриями.

И здесь наблюдается поразительное соответствие между далекими, на первый взгляд очень абстрактными выводами чистой математики и тем, что говорит современная физика. Если бы существовал какой-нибудь естественный физический масштаб, тогда естественно определилась бы единственно правильная градуировка натуральных чисел. Однако мы видели, что физика, дабы согласовать астрономические наблюдения, приходит к идее наличия двух шкал времени и в связи с этим получает, что пространство различно для различных градуировок. То же самое говорит абстрактная математика.

Мы приведем еще один пример такого совпадения абстрактно математических результатов с данными наблюдения.

В основаниях геометрии устанавливается, что автоматически геометрия не в состоянии отличить эллипса от круга. Точный смысл этого утверждения следующий: если мы возьмем обыкновенную эвклидову плоскость, на ней — обыкновенные прямые, то углы можно измерять иначе, чем обычно: за угол можно принять площадь эллиптического сектора, точнее, ее отношение к площади всего эллипса, а единицей масштаба в каждом направлении — отрезок от центра до эллипса (черт. 3).



Тогда полученная новая геометрия будет изоморфна эвклидовой, т.е., неотличимой от нее. Аналогично тому, что говорилось раньше о числах, если мы выберем некоторый эллипс или круг в качестве стандарта и назовем его кругом, то всякий другой эллипс можно отличить от стандартного; все дело в том, что у нас нет никакое критерия для выбора стандартного. Это согласуется с явлением, известным под названием Фитцджеральдова сокращения в частной теории относительности: т.к. при движении происходит сокращение размеров в направлении движения, то круг сплющивается в эллипс. То, что с точки зрения одного наблюдателя представляется кругом, с точки зрения другого будет эллипсом. Если бы в математике существовал «настоящий круг», то этот круг и с точки зрения физики выделялся бы. Наблюдатель, соответствующий этому кругу, оказался бы привилегированным, и можно было бы говорить об абсолютном покое. Обратно, если бы был абсолютный покой, можно было бы говорить о «настоящем круге» в геометрии.

Подобные совпадения, разумеется, не являются случайностью. Они показывают, что теоретические науки и физическая реальность весьма тесно связаны друг с другом. То обстоятельство, что одно и то же пространство может как бы одновременно быть и эвклидовым и гиперболическим (Лобачевского) и эллиптическим, может быть и конечным и бесконечным — все это приводит к мысли, что те свойства этих пространств, которые отличают их одно от другого (так называемые метрические свойства), не имеют физического смысла, ибо они зависят от выбора системы отсчета (или, как принято говорить неинвариантны относительно этого выбора). Для этих трех пространств общими являются некоторые топологические свойства и свойства сочетания и порядка; эти-то свойства могут являться характеристиками физического пространства. Что же касается метрических свойств, то они привносятся исследователем и нужны лишь для более удобного описания и обнаружения наблюдаемых явлений.

Но возможна и другая точка зрения. Указанная связь между градуировкой величин и свойствами пространства имеет место лишь в том случае, если повсюду в пространстве величины отградуированы одинаково. Тогда указанные парадоксы могут служить основанием считать, что в реальном физическом пространстве нельзя отградуировать все часы во всех местах одинаковым образом. А при таком предположении мы, как можно показать, автоматически приходим к аппарату общей теории относительности. При этом он показывает, что различие в градуировках времени и пространства вызывается скоплениями масс.

Трудно сказать, какой из предложенных ответов верен; возможны и другие. Цель настоящей статьи заключалась лишь в том, чтобы указать на связь определения таких первичных понятий, как натуральное число, круг с широкими проблемами современной космологии. Цель автора была достигнута, если тот, кто прочтет эту статьи, при изучении оснований математики не будет страшиться сухости и формальности материала, а будет видеть за этим выход в бесконечно привлекательную науку — космологию.