Академия наук СССР
Коми филиал
Серия препринтов «Научные доклады»
Выпуск 22
С.Н.Белов, Н.А.Громов, В.Я.Крейнович, Р.И.Пименов

КРИВЫЕ В КИНЕМАТИКАХ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ ФИЗИКИ И КОСМОЛОГИИ

Доклад на заседания Президиума Коми филиала АН СССР
30 января 1976 г.

Сыктывкар
1976

УДК 530.12:531.51:3

КРИВЫЕ В КИНЕМАТИКАХ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ ФИЗИКИ И КОСМОЛОГИИ. Белов С.Н., Громов Н.А., Крейнович В.Я., Пименов Р.И. Серия препринтов «Научные доклады», Коми филиал АН СССР, 1976 (вып.22, 16с).

Исследованы два различных определения временных кривых; установлена их эквивалентность. Определение посредством отношения следования оказывается весьма эффективным и дает возможность обобщения общей теории относительности в виде гладких кинематик. Рассмотрены возможные способы экспериментальной проверки полученных моделей, вероятностные модели для пространств кинематического типа; получен некоторый класс электромагнитных полей, для которых существует физически допустимое движение заряженной частицы.

UDK 530.12:531.51:538.3

Curves in kinematics and the related topics of physics and cosmology. Be1ov S.N., Gromov N.A., Kreinovic V.Ya., Pimenov R.I. Preprint Series “Scientific Papers”, USSR Academy of Sciences Komi Branch, 1976, Issue 22, pp.16.

The relatedness of the two distinct definitions of the timelike curves is investigated. The definition by means of an order relation turns out to be very effective and yields a new generalization of the general relativity as a smooth kinematics. The topics related are those on the verificability of the models mentionned, on the probability in the kinematics, and on the accelerated charge motion in the simplest of the kinematics.

Редколлегия

М.П.Рощевский (отв. редактор), Е.П.Калинин (секретарь), И.В.Забоева, В.П.Подоплелов, Н.Н.Рочев, М.В.Фишман.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий доклад на Президиуме Коми филиала АН СССР является отчетом о работе группы теоретической математики и физики лаборатории математики и вычислительной техники. Темой является исследование пространств с неопределенной метрикой в связи с задачами физики и космологии. В § 1 излагаются основные определения теории топологических и метрических кинематик и формулируются базисные теоремы, на которых основано изучение кинематик и которые получены Р.И.Пименовым за годы работы в Коми филиале; они усиливают результаты, изложенные в его монографии [5], [6], и ранее не публиковались, если не считать устного изложения их автором на Новосибирском симпозиуме по хроногеометрии (октябрь 1974). В § 2 обсуждаются два в принципе возможных эксперимента для проверки одной из моделей, возникающей в рамках общей теории, а именно для проверки аксиомы интервальной связности. Это обсуждение мысленных экспериментов велось совместно всеми сотрудниками группы, включая находившегося на практике студента В.Я.Крейновича.

В §3 последний излагает некоторые теоремы относительно возможности введения теоретико-вероятностных понятий в теорию кинематик; результаты проливают новый свет на проблему несовместности теории относительности и квантовой механики. В §4 излагаются некоторые теоремы, полученные С.Н.Беловым, относительно движения заряда в случае лоренцова пространства-времени при наличии радиационного торможения; эти результаты ранее нигде не публиковались, являются продолжением исследований, о которых было доложено на молодежной конференции [2].

§ 1. ТЕОРЕМЫ О ВРЕМЕННЫХ КРИВЫХ В КИНЕМАТИКАХ

Не существует единообразия в употреблении термина «временная»: в [5], [6] и [9] она определяется через структуру порядка, а в [11] — через свойства касательного вектора. Есть и другие тонкости. Как будет доказано ниже, эти на первый взгляд различные определения эквивалентны для большого класса кинематик, включающего, в частности, пространство-время общей теории относительности. Теория временных кривых строится обычно для гладких кинематик [11] или в лучшем случае — для метрических [5], [9] . Здесь она будет обобщена и на случай топологических кинематик.

Напоминаем, что отношение следования $\prec$ есть бинарное антисимметричное локально-транзитивное

$$\left(\forall_a \forall_B \forall_C \left(\exists p \prec a,b,c \vee \exists q a,b,c \prec q\right) \Rightarrow a \prec B \;\&\; B \prec c \Rightarrow a \prec c\right)$$

отношение [6]. Обозначаем $a^+ = \{x \mid a \prec x\}, a^- = \{x \mid x \prec a\}$ и $(a,b) = \{x \mid a \prec x \prec B\}$ при $a \prec B$.

Топологической кинематикой (M, $\prec$) называем структуру $(M, T(\prec), \prec)$, где $T(\prec)$ — топология, базисом которой служат все интервалы $(a,b) \mid a,b \in M$, причем в этой структуре должны быть выполнены аксиомы:

ТК$_1$. $\forall a \exists p \exists q \quad p \prec a \prec q$;

ТК$_2$. $\forall_a \forall_B \forall_C \forall_d \left(\exists x \quad x \in (a,b) \cap (c,d)\right) \Rightarrow \exists p \exists q$

$$x \in (p,q) \;\&\; p \cup (p,q) \cup q \subset (a,b) \cap (c,d)$$

ТК$_3$ (Локальная нормальность) $\forall r \exists u \exists v \left(r \in (u,v) \;\&\; \forall_a \forall_B \forall_p \forall_q \left(a, B, p, q \in (u,v) \;\&\; a, B \in (p,q) \Rightarrow \left(\overline{a,B}\right) \subset (p,q)\right)\right)$

ТК$_4$ (Локальная компактность). $\forall r \exists u \exists v \left(r \in (u,v) \;\&\; \left(\overline{u,v}\right)\right)$ —

компактно).

ТК$_5$ (Локальная связность).

$$\forall r \exists u \exists v \left(r \in (u, v) \,\&\, \forall_a \forall_B a, B \in (U, V) \Rightarrow (a, B) \right)$$ — связен.

Замыкание, компактность и связность (ниже — граница ∂_1 внутренность *int*) понимаются в смысле интервальной топологии $T(\prec)$.

Изотонной кривой $\gamma : [0,1] \mapsto (M, \prec)$ называем непрерывное строго изотонное отображение. Предельно изотонной кривой γ называем непрерывное отображение при условии

$$S < S' \Rightarrow \gamma S' \in \left(\overline{\gamma S}\right)^+$$

Теорема 1. Всякое связное линейно упорядоченное относительно $\prec$, множество с концами является образом изотонного пути. Справедливо и аналогичное утверждение, где $a \prec b$ заменено на $b \in \overline{a}^+$, а «изотонный» — на «предельно изотонный».

Теорема 2 (о соединимости). Всякие достаточно близкие две точки *a* и *b* при $a \prec b$ можно соединить изотонной кривой. Аналогично для предельно изотонной.

Теорема 3 (о продолжимости). Всякую предельно изотонную кривую можно продолжить за любой ее конец.

Теорема 4 (о сокращении). Если кривая γ с концами *a* и *b* составлена из двух дуг: первая — изотонная, а вторая — предельно изотонная, то точки *a* и *b* можно соединить изотонной кривой.

Теорема 5 (об исключении). Если точки a и b можно соединить предельно изотонной кривой γ, то либо их можно соединить изотонной кривой, либо же $\forall S \forall S' \quad S < S' \Rightarrow \gamma S' \text{Ë} \partial(\gamma S)^+$.

Теорема 6 (о сходимости). Из всякой последовательности предельно изотонных кривых с концами, содержащейся в компактном интервале, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся либо к точке, либо к предельно изотонной кривой.

Метрической кинематикой (М, $\prec$, τ) называем [6], [9] топологическую кинематику, в которой дополнительно задана функция $\tau : M \times M \mapsto [0, \infty)$ называемая кинематической метрикой, удовлетворяющая аксиомам :

МК$_1$. $\forall a \forall b\, \tau(a, b) > 0 \Leftrightarrow a \prec b$

МК$_2$.

$\forall a \forall b \forall c \quad a \prec b \prec c \;\&\; a \prec c \Rightarrow \tau(a, c) + \tau(b, c)$;

МК$_3$ τ — непрерывна.

Длину предельно изотонной кривой определяем естественно: как точную нижнюю границу длин ломаных. Если длина кривой отлична от нуля, то кривую называем спрямляемой. Кинематическую метрику называем внутренней, если *τ(a, b)* равно точной верхней границе длин предельно изотонных кривых, соединяющих *a* и *b*.

Теорема 7. Существует изотонная неспрямляемая кривая.

Теорема 8. Спрямляемая кривая может быть 'пределом неспрямляемых.

В кинематике с внутренней метрикой справедливы теоремы 9—13, формулировки которых получаются из формулировок теорем 2—6 заменой термина «изотонная» на «спрямляемая» (термин «предельно изотонная» не заменяется).

Гладкой кинематикой называем структуру (*M, T*, $\prec$, *F*), которая относительно (*M,* $\prec$) является топологической кинематикой, относительно (*M, T*) — топологическим многообразием, относительно (*M, T, F*) — гладким многообразием, причем *F* — его алгебра гладких функций $f : M \to R$ и $T(\prec) \leq T$. Через F^+ *(M, p)* обозначаем клин изотонных в точке *p* функций из

$F\ (M,\ p)$. Требуем выполнения аксиом:

ГК$_1$: $\forall p \operatorname{int} F^{+}(M,p) \neq \varnothing$

ГК$_2$: $\forall p \overline{\operatorname{int} F^{+}(M,p)} \cap \overline{\operatorname{int} F^{-}(M,p)} \subset \{const\}$

ГК$_1$: У всякой $p \in M$ есть такая окрестность U, что при $a, b \in U$ & $a \notin b^+$ & $b \notin a^+$ найдется $f \in \overline{\operatorname{int} F^{+}(M,p)}$ такая, что $fa = 0$ & $fb = 1$, каковы бы ни были a и b.

В F считается введенной C^1 — топология. F^- клин антитонных. Изотонность f в точке p означает, что найдется окрестность точки p, в которой f изотонна.

Теорема 14. Топология многообразия T совпадает с интервальной $T(\prec)$; при этом аксиома ТК$_4$ оказывается избыточной.

О роли аксиомы ТК$_5$ подробнее см. в заметке трех авторов этого сборника.

Теорема 15 (об эквивалентности). Задание гладкой кинематики эквивалентно заданию касательного расслоения конусов $O^+(p) \subset TpM$, причем

$$X \in O^{+}(p) \Leftrightarrow \forall ff \in \overline{\operatorname{int} F^{+}(M,p)} \Rightarrow Xf(p \geq 0)$$

$$a \prec b \Leftrightarrow \exists \gamma \big(\gamma \in C^{1}\ \&\ \forall p \quad p \in \gamma \Rightarrow X_{\gamma}(p) \in \operatorname{int} \overline{O^{+}(p)}\big)\big)$$

и класс гладких временноподобных кривых ($X_\gamma \in O^+$) совпадает с классом гладких изотонных кривых.

Последнее верно и относительно кусочно гладких кривых, но уже неверно для кривых с почти везде существующей касательной.

§ 2. ВОЗМОЖНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ СТРОЕНИЯ КОНУСА ПРИЧИННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В [6] развита общая математическая теория пространственно-временных структур, содержащих общую теорию относительности как наиболее интересный частный случай. Оттуда также вытекает возможность введения на псевдоримановом многообразии отношения причинности, отличного от соединимости временноподобной кривой. В случае нарушения аксиомы TK_5 возникают два конуса: конус, соответствующий событиям, на которые можно повлиять из исходного при помощи связного («непрерывного») физического процесса (по временному пути), и конус $a+$, соответствующий всем, в том числе не связным, процессам. В ситуации, когда границы этих конусов различны, возникает вопрос о том, с границей какого конуса отождествлять свет? Эта проблема не возникает у Кронхеймера-Пенроуза [13], которые отождествляют причинность с соединимостью временными, но уже у А.Д.Александрова [1] названные конусы, вообще говоря, различны.

Если границу всей области влияния точки интерпретировать как фотон, то физически это различие конусов приводит к тому, что появляется дополнительное «кинематическое» ускорение. Таким образом, скорость света, приходящего от далеких источников, в этой модели больше, чем скорость фотонов, измеряемая в земных экспериментах. Этот эффект «ускорения» может исчезать при взаимодействии фотонов с оптическими системами, используемыми для наблюдений за небесными телами, так как эти системы поглощают первоначально испущенные фотоны и испускают другие, и поэтому он не сказывается на большинстве проводимых экспериментов.

Проверку, приемлема ли такая модель в космических масштабах, можно проделать, измеряя частоту ω некоторой выделенной монохроматической компоненты света от далекого источника в двух лабораториях, двигающихся относительно друг друга со скоростью v. В случае, если скорость c' света, приходящего от удаленного источника, отлична от скорости С света, испускаемого на Земле, тосоотношение между частотами, измеряемыми в этих лабораториях, окажется иным, чем для обычного света, в частности, для продольного эффекта Допплера :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c} \cdot \frac{c}{c^1} + 0\left(\frac{v^2}{c^2}\right),$$

где Δω — разность значений частот в рассматриваемых лабораториях.

Эффект скажется и на отклонение луча света в поле Солнца, а именно, угол δ отклонения дается формулой:

$$\delta = \frac{2\mu}{\rho}\left(1 + \frac{C^2}{\left(C^2\right)^2}\right)$$

где μ — гравитационный радиус, ρ — прицельный параметр.

Последняя формула выведена в предположении, что поле гравитации Солнца вполне описывается решением Шварцшильда.

§ 3. ВЕРОЯТНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВАХ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ТИПА

1°. Вероятностные аналоги эквивалентности и порядка.

Обозначим через *E(M)* семейство всехподмножеств $A \subset M \times M$, определяющих на *M* отношение эквивалентности.

Пусть *M* — вероятностная мера на σ-алгебре подмножеств *E(M)*, порожденной множествами вида $A_{ab} = \{A \in E(M) \mid (a,b) \in A\}$. Назовем функцию

$p\ (a,\ b) = M\ (A_{ab})$ вероятностной функцией эквивалентности на M.

Теорема 1. Если p — вероятностная функция эквивалентности на M, то:

1) Отношение

$$a \sim b \Leftrightarrow p\ \ p\ (a,\ b\ ) = 1 \qquad (1)$$

есть отношение эквивалентности; существует $g : M/_{\sim} \times M/_{\sim} \mapsto R$ такая, что $g(a,\ b) = p\ (a,\ b)$, где $a \in a,\ b \in b;$

2) Функция $1 - g$ является метрикой на $M/_{\sim}$;

3) Если $f : [0,\ 1] \mapsto R$ такова, что для всякой вероятностной функции эквивалентности p на M функция $f(p)$ является метрикой на $M/_{\sim}$, то для всякого метрического пространства, в котором $\forall a \forall b \quad p(a,b) \leq 1$, функция $f(1 - p)$
также является метрикой.

Итак, мы хотя и можем выбрать много функций $f(p)$ в качестве метрики на $M/_{\sim}$ (скажем, $\sqrt{1-p}$), но это будет просто следствие того, что $f(1 - p)$ есть метрика для всякой метрики $p \leq 1$ и, в частности, для метрики $1 - p$, которая является в этом смысле основной.

Обозначим через $F(M)$ семейство всех пар $A,\ R\ _E H\ M \times M$, где $A \subset E(M)$ и R согласовано с A, т.е.

$$\forall a_1, a_2, b_1, b_2 ((a_1, a_2) \in A \,\&\, (b_1, b_2) \in A \,\&\, (a_1, b_1) \in R \Rightarrow (a_2, b_2) \in R)$$

Пусть $A'_{ab} = \{(A,R) \in F(M)\ |(a,b) \in A\}$ и $R'_{ab} = \{(A,R) \in F(M)\ |(a,b) \in R\}$.

Теорема 2. Пусть M-вероятностная мера на σ-алгебре подмножеств $F(M)$, порожденной множествами A_{ab} и R'_{ab}. Тогда функция $M(R'_{ab})$ согласована с (1) и соответствующая функция на $M/_{\sim}$, непрерывна в метрике $1 - g$.

Вследствие неточности измерительных приборов вероятность того, что два события, в действительности далеко отстоящие друг от друга, будут зафиксированы как тождественные, отлична от нуля, причем тем больше, чем ближе эти события. Теоремы 1—2 показывают, что, зная эту вероятность, можно определить некоторую метрику, причем для всякого случайного отношения *R*, согласующегося с различимостью, вероятность того, что *(a, b)* $\in R$, непрерывным образом зависит от *a* и *b*.

Пусть теперь $0(M) = \{A \subset M \times M \ |(a,b) \in A$ есть отношение порядка$\}$. Пусть $0_{ab} = \{A \in 0(M) \ |(a,b) \in A$.

Если *M* — вероятностная мера на σ-алгебре подмножеств *0(M)*, порожденной $0_{ав}$, то функцию *p(a, в)* = $M(0_{ab})$ назовем <u>вероятностной функцией порядка</u> на *M*.

В отличие от предыдущего случая, здесь по *p(a, b)* нельзя восстановить не только никакой кинематической метрики, но и никакого нетривиального отношения порядка (т.е. отличного от $a < b \Leftrightarrow (a, b) \in A$ для почти всех *A*).

Теорема 3. Если множество

$$A \subset \{(a,b) \in R^2 \ |0 \le a,b \,\&\, a+b \le 1\}$$

таково, что $(1, 0) \in A$ и отношение $a < b \Leftrightarrow (p(a,b), p(a,b)) \in A$ является отношением порядка для всякой вероятностной функции порядка *p*, то $A = \{(1, 0)\}$.

2 . Лоренц-ковариантные случайные функции.

Рассмотрение случайной функции л над М предполагает рассмотрение ее функции распределения

$$p(a_1 < X(A_1) < b_1, \ldots, a_n < X(A_n) < b_n)$$

при $A_1, \ldots, A_n \in M$. Эта функция задается посредством некоторой однозначно определяемой по случайной функции мере *M* на множестве вещественнозначных функций $f: M \mapsto R$ в виде

$$p(a_1 < X(A_1) < b_1, ..., a_n < X(A_n) < b_n) = M\{f \ |a_1 < f(A_1) < b_1, ..., a_n < f(A_n) < b_n\}$$

Обычно на M налагают дополнительные условия типа регулярности, но, так как мы будем доказывать отрицательные результаты, то, отказавшись от этих ограничений, мы разве что усилим формулировки.

Пусть $\sigma(A)$ обозначает дисперсию $\int (f(A))^2 dM$. Случайную функцию назовем нормированной, если $X(\theta)= 0$ для некоторой фиксированной $\theta \in M$ и почти всех X. Если $M = {}^{n-1}R_n$, то X назовем лоренц-ковариантной, если $X(TA) \sim X(A)$ для всякого псевдоэвклидова вращения T вокруг θ в том смысле, что $\int F(f(x))dM = \int F(f(Tx))dM$ для всякого M-измеримого функционала F и инвариантным относительно переносов, если для всякого $C \in {}^{n-1}R_n$ справедливо

$X(A) - X(B) \sim X(A + C) - X(B + C).$

Теорема 4. Для всякой нормированной лоренц-ковариантной случайной функции на ${}^{n-1}R_n$ инвариантной относительно переносов, либо:

а) дисперсия бесконечна, т.е. $\forall A \quad A \neq \theta \Rightarrow \sigma(A) = +\infty$;

б) либо существует $A_n \to \theta$ такая, что $\sigma(A_n)$ конечно при всех n и $\sigma(A_n) \to \sigma(\theta)$, т.е. дисперсия разрывна;

в) либо с вероятностью *1* все непрерывные функции $f: M \mapsto R$ обращаются в *0* во всех точках, т.е. исчезает «случайность» из случайной функции.

Эта теорема указывает на трудности теории случайных процессов в псевдоэвклидовом случае сравнительно с эвклидовым (о последнем см. [4]; о первом ср. [6] , гл. 2, § 2, Р. 4°).

Близкое к этой теореме утверждение можно найти в [12], правда в более сильных предположениях, и по существу без доказательства.

Теорема 5. Всякая вероятностная нормированная мера на множестве кривых в ${}^{n-1}R_n$, инвариантная относительно собственных преобразований Лоренца, и такая, что множество $\{f \ |f(A) \in B\}$ измеримо для любых $A \in R$ и открытого $B \in {}^{n-1}R_n$, сосредоточена на кривой *f*.

Следствие. Не существует вероятностной меры, удовлетворяющей условиям теоремы 5 и сосредоточенной на временных.

§ 4. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КЛАССИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Уравнение Дирака в классической электродинамике описывает движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле с учетом силы радиационного трения. Как известно [8] , [14], не все решения этого уравнения являются физически приемлемыми, поскольку некоторые из них соответствуют самоускоренному, т.е. нефизическому движению частицы. В этой связи возникает вопрос, какими свойствами должно обладать внешнее электромагнитное поле, чтобы уравнение Дирака имело физически приемлемые решения.

В настоящей статье этот вопрос исследуется для одномерного движения частицы вдоль оси *x* во внешнем поле *E (x, t)*, которое является функцией пространственно-временных координат *x, t*. В отличие от работ [10], [14]**,** где затрагивается указанная проблема, мы не требуем существования явной зависимости» внешнего поля от собственного времени частицы. При этом уравнение Дирака имеет вид:

$$mcx = \frac{e}{c}E(x,t)\sqrt{1+x^2} + \frac{2e^2}{3c}\left(x - x\frac{x^2}{1+x^2}\right), \qquad (1)$$

где t — координатное время, m, e — масса и заряд частицы, c — скорость света; дифференцирование по собственному времени частицы S обозначается точкой над буквой, кроме того, выполнено

$$\frac{dt}{dS} = \frac{1}{c}\sqrt{1+x^2} \qquad (1')$$

Везде в ~~дальнейшем~~ предполагается, что поле $E(x, t)$ всюду, где рассматривается движение частицы, конечно и непрерывно со своими частными производными. В соответствии с теорией дифференциальных уравнений [7] это гарантирует существование и единственность решения системы (1), (1') для всех $S > 0$, при задании полного набора начальных значений $t_0 = t/S = 0$, $x_0 = x/S = 0$ $x_0 = x/S = 0$ $x_0 = x/S = 0$, а также его непрерывность по начальным данным.

Физически приемлемыми мы будем называть те решения уравнения (1), которые обладают свойством $\exists \lim\limits_{S\to\infty} x(S) \neq \pm\infty$.

Сформулируем некоторые утверждения относительно свойств решений уравнения (1), которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. Если $x(S)$ — решение уравнения (1) и существуют S_0 и дифференцируемая $\Phi(S)$ такая, что для $S \geq S_0$ выполнено

$$\Phi(S) \leq 0, \qquad \Phi(S) \geq |E(x(S), t(S))| \qquad (2)$$

и если при $S = S_0$ справедливы неравенства:

$$\frac{d}{dS}x^2 > 0 \qquad (3)$$

$$A^2x^2 - \Phi^2(S)(1 + x^2 > 0) \qquad (4)$$

где $A = \frac{mc^2}{e}$, то для любого $S > S_o$ неравенства (3—4) сохраняют силу и, кроме того, имеет место

$$\frac{d}{dS} x^2 > 0 \qquad (5)$$

Нетрудно проверить, что при указанных в лемме условиях неравенства (3) и (4) усиливаются, именно

$$\frac{d}{dS}\left(\frac{d}{dS} x^2 \right) > 0 \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dS}\left(A^2 x^2 - \Phi^2(S)(1+x^2)\right) > 0 \qquad (6)$$

Неравенство (5) всегда выполнено, если справедливо (3) и (4).

Пусть $M(x_0,t_0)$-множество решений $x(S)$, $t(S)$ уравнения (1), для которых $x(0) = x_0$, $t(0) = t_0$, $x(0) = 0$, и предположим, существует дифференцируемая $\Phi(S)$, которая при любом $S \geq 0$ удовлетворяет неравенствам (2) для всех элементов $M(x_0, t_0)$. Обозначим $D(x_0, t_0, S')$ — подмножество $M(x_0, t_0)$, образованное всеми теми элементами $M(x_0, t_0)$, для которых система неравенств (3—4) не выполнена при $S = S'$, $V(S')$-множество значений $x(0)$ для решений, содержащихся в $D(x_0, t_0, S')$.

Лемма 2. Множество $D(x_0, t_0, S')$ не пустое, множество $V(S')$ — замкнуто.

В самом деле, применяя лемму 1, можно показать, что для решения $x_1(S)$, $t_1(S)$ из $M(x_0, t_0)$ удовлетворяющего начальному условию $x_1(0) = y_1 > \frac{\Phi(0)}{A}\sqrt{1+x_1^2}$, выполнено $x_1(S') > y_1$. Аналогично для решения $x_2(S)$, $t_2(S)$ из $M(x_0, t_0)$, удовлетворяющего соотношению $x_2(0) < -y_1$, выполнено $x_2(S') < -y_1$. Вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных существует у, содержащееся в интервале $(-y_1, y_1)$ такое, что решение $x(S)$, $t(S)$ из $M(x_0, t_0)$, отвечающее начальному условию $x(0) = y$, удовлетворяет соотношению $x(S') = 0$ и неравенство (4) для него не выполнено. Все элементы множества $Y(S')$ содержатся в промежутке $(-y_1, y)$ и множество $Y(S')$ является замкнутым вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных.

Лемма 3. Существует непустое подмножество $D(x_0, t_0)$ множества $M(x_0, t_0)$ для всех элементов которого система неравенств (3), (4) не выполнена при всех $S > 0$.

Для доказательства достаточно установить, что существует не пустое пересечение множеств $Y(S)$ для всевозможных $S > 0$, если учесть, что вследствие леммы 1 множества $Y(S)$ образуют систему вложенных замкнутых множеств.

Теорема 1. Если в конусе будущего события (x_0, t_0) внешнее поле $E(x_t\, t)$ таково, что существует дифференцируемая $\Phi(S)$ обладающая при $S \geq 0$ свойствами (2) для всех решений уравнения (1) из множества $M(x_0, t_0)$ и интегрируемая в промежутке $[0, +\infty)$, то в множестве $M(x_0, t_0)$ содержится непустое подмножество, состоящее из физически приемлемых решений и совпадающее с $D(x_0, t_0)$.

Указанный факт легко установить, если учесть, что для любого решения $x(S)$ из $D(x_0, t_0)$ при $S > 0$ выполнено неравенство:

$$A\frac{d}{dS}x^2 \leq 2\Phi(S)\sqrt{1+x^2}\,|x| \tag{8}$$

что имеет место, если не выполнено хотя бы одно из неравенств (3), (4). Используя (8), получаем, что $\lim\limits_{S\to\infty} x$ существует и конечен. Применяя лемму (1), нетрудно убедиться, что всякое решение, не содержащееся в $D(x_0, t_0)$, не является физически приемлемым.

Теорема 2. Если в конусе будущего события (x_0, t_0) внешнее поле $E(x, t)$

таково, что существует дифференцируемая $\Phi(S)$, обладающая при $S \geq 0$ свойствами (2) для всех решений уравнения (1), которые удовлетворяют соотношениям $x(0)= x_0$, $t(0)= t_0$, и интегрируемая в промежутке $[0, +\infty)$, то для любого значения x_0 множество решений уравнения (1), удовлетворяющих начальным условиям $x(0)= x_0$, $t(0)= t_0$, $x(0)= x_0$, содержит в себе физически приемлемое решение.

Для доказательства достаточно, воспользовавшись свойствами преобразований Лоренца для электромагнитного поля [3] и результатом теоремы 1, обратиться к системе отсчета x', t', в которой $x'(0) = 0$.

Очевидным следствием теоремы 2 является следующий факт.

Если в конусе будущего события x_0, t_0 поле $E(x, t)$ таково, что существует $\Phi(S)$, интегрируемая в промежутке $[0, +\infty)$, и при $S \geq 0$ является невозрастающей дифференцируемой функцией и $\left|E(x,t)\right| \leq \Phi\left(\sqrt{c^2(t-t_0)^2-(x-x_0)^2}\right)$, то уравнение (1), описывающее движение заряженной частицы, с начальными пространственно-временными координатами x_0, t_0 имеет физическое решение, каково бы ни было начальное значение скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Д. — «Труды МИАН СССР» 1972, 128, 3.

2. Белов С.Н. — В кн.: Тезисы докладов шестой республиканской молодежной научной конференции. Сыктывкар,
1974.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., «Наука», 1973.

4. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. М., «Наука», 1970.

5. Пименов Р.И. К основаниям теории дифференцируемого пространства-времени. — «ДАН СССР», 1975, 222, № 1, 36-38.

6. Пименов Р.И. Пространства кинематического типа (Математическая теория пространства-времени). Л., «Наука», 1968.

7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Физматгиз, 1961.

8. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. М., «Наука», 1974.

9. Busemann H. Timelike **spaces. Warszawa, 1967.**

10. Hale J.K. and Stokes A.P. J.Math. Phys., v.3, 70, 1962.

11. Hawking S.W., Ellis G.F. The large scale structure of spacetime. Cambridge, 1975.

12. Ingraham R.L. Nuovo cim., x. 34, 182, 1964.

13. Kronheimer E.H., Pensones R. Proc. Cambr. Phil. Soc., 63, 481, 1967.

14. P1ass G.N. Rev. Mod. Phys., 33, 37, 1961.

СОДЕРЖАНИЕ

КРИВЫЕ В КИНЕМАТИКАХ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ ФИЗИКИ И КОСМОЛОГИИ

С.Н.Белов, Н.А.Громов, В.Я.Крейнович, Р.И.Пименов

Редактор Ю.Кочев

Корректор В.Пименова

Техн. редактор В.Захарова

Ц03296. Подписано к печати 02.12. 1975 г. Формат 60 х 60 1/16. Уч.-изд.л. 0,73. Тираж 500. Заказ № 1048. Цена 5 коп.

Ротапринт Коми филиала АН СССР г.Сыктывкар, Коммунистическая, 24