(§1 - §13.6. Последние 10-ть страниц монографии находятся в наборе)

Академия наук СССР
Уральское отделение
Коми научный центр

Р.И.Пименов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕМПОРАЛЬНОГО УНИВЕРСУМА

Под редакцией А.В.Жубра

Сыктывкар 1991

УДК 530. 1: 531 055 0202

Р.И. Пименов. Основы теории темпорального универсума. – Сыктывкар, 1991. – 193 с.

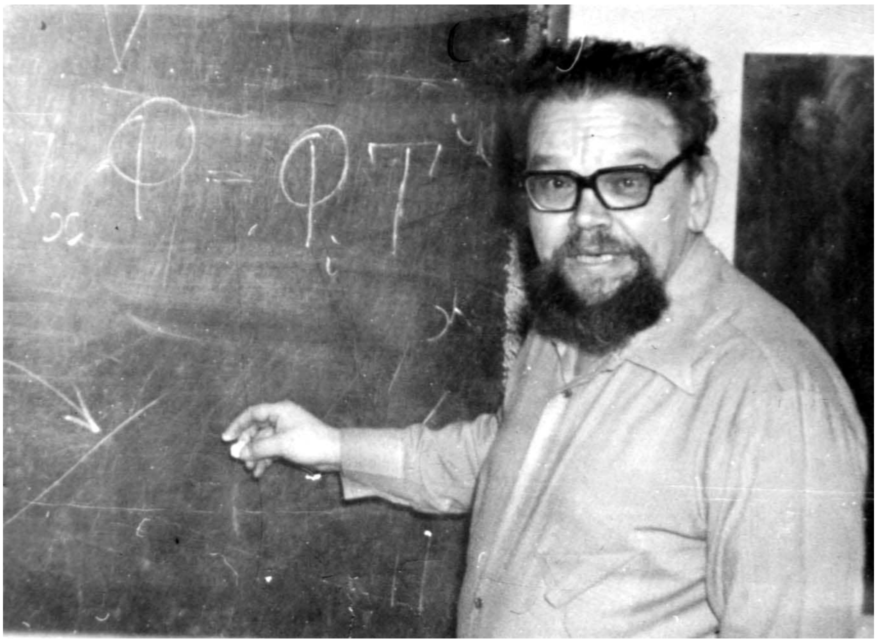
(В 2006 – м году вышло 2-е стереотипное издание. Москва, URRS. ISBN 5-9710-0042-X/ ББК 22.312 22.313 87.1)

Отталкиваясь от бытующих в физике математически строгих моделей пространство-времени, привлекая другие математически возможные модели и имея в виду связанное с термином «время» словоупотребление в таких дисциплинах, как геология, биология, лингвистика, философия, автор выделяет в качестве главного понятия (отношения) то, которое передается термином «раньше-позже». Тогда темпоральный универсум предстает как

множество, упорядоченное так, чтобы порожденная этим порядком топология была хорошей. Этот подход позволяет единым образом изложить все известные (не дискретные) модели пространство-времени. При этом не требуется предварительно изучать векторную или тензорную алгебру, риманову геометрию или другие дисциплины, без которых обычно не обходится изложение общей теории относительности. Но можно содержательно ввести такие понятия, как «будущее», «ахронное множество», «интервал», «инерциальная» или «материальная точка», «наблюдатель», «система отсчета», «ток вещества», «промежуток времени», «субстанциальное время», «функциональное время», «дата», «интервальная датировка», «собственно пространство», «темпоральная» или «кинематическая метрика», «горизонт Коши», «часы» и многие другие. Кроме того, книга содержит сводку новых результатов по единой теории гравитации и электромагнетизма, причем результаты доведены до уравнений.

Книга адресована как специалистам-физикам, так и широкому кругу читателей, интересующихся проблемами исследования пространства и времени.

Рецензент:
доктор физико-математических наук, профессор *Ю. С. Владимиров*



ПАМЯТИ
РЕВОЛЬТА ИВАНОВИЧА
ПИМЕНОВА

19 декабря 1990 г. на 60-ом году жизни скончался известный советский математик, доктор физико-математических наук Револьт Иванович Пименов (родился 16 мая 1931 г.).

После окончания математико-механического факультета Ленинградского университета в 1954 г. Р.И.Пименов работал старшим редактором в Библиотеке Академии наук, ассистентом кафедры математики Ленинградского технологического института пищевой промышленности. С 1963-го по 1970 г. он работал научным сотрудником Ленинградского отделения Математического института АН СССР, где вел научный семинар по математическим проблемам теории пространства-времени, читал лекции по геометрии студентам матмеха ЛГУ, защитил кандидатскую (1965 г.) и вскоре докторскую (1969 г.) диссертации по специальности геометрия и топология (к сожалению, докторский диплом он получил только в конце 1988 г.). С 1972 г. и до своей кончины Р.И.Пименов *работал в Коми филиале АН СССР, преобразованном впоследствии в Коми научный центр Уральского отделения АН СССР, где он прошел путь от младшего до ведущего научного сотрудника.*

Р.И.Пименов обладал ярко выраженными математическими способностями, большими навыками в самообразовании, творческой самостоятельностью мышления и высокой работоспособностью. Его научные работы можно разбить на три цикла.

Уже первый цикл работ Р.И.Пименова (1956—1964 гг.) содержал единое аксиоматическое построение системы неевклидовых геометрий. Здесь Р.И.Пименову удалось опередить работы целого ряда других геометров и развить новые плодотворные подходы к этим теориям, оказавшиеся эффективными также и в теории групп[1].

Второй цикл работ Р.И.Пименова (1964—1966 гг.) содержит исследование аналогов римановых пространств, представляющих собой метризованные гладкие многообразия, у которых в касательных пространствах имеет место та или иная однородная неевклидова геометрия, В этом направлении Р.И.Пименов, в частности, обеспечил приоритет отечественной науки в развитии тензорного исчисления, согласованного с расслоением пространства. В терминах этих понятий РМ.Пименовым был развит один из вариантов единой общей теории относительности и электромагнетизма, не потерявший своей актуальности до настоящего времени.

Третий цикл работ Р.И.Пименова (1966-1990 гг.) связан с развитием идеи академика А.Д.Александрова о первичности каузального отношения в рамках программы: построить теорию относительности исходя из отношения порядка. Здесь P.IL Пименов построил теорию неоднородных

---

[1] Н.А.Громов. Контракции и аналитические продолжения классических групп. Единый подход. — Сыктывкар, 1990. — 220 с.

пространств, значительно расширивших систему математических моделей пространства-времени, которые используются учеными в различных областях науки, он решил проблему построения нерегулярных пространств со знакопеременной метрикой, а также проблему выведения пространственно-временных структур из отношения порядка. Суть его подхода состоит в том, что в основу всех пространственно-временных конструкций кладутся отношения порядка (линейной или частичной упорядоченности) и далее тщательно анализируется, какие другие аксиомы и отношения (топологические, метрические и т.д.) и каким образом должны быть добавлены к свойствам отношения порядка, чтобы получить используемые в физике многообразия. Именно в таком ключе Р.И.Пименов построил теорию анизотропного пространства-времени, в котором скорость света различна по разным направлениям, т.е. световой конус не круговой, а «граненый». Дальнейшее допущение, что этот конус меняется от точки к точке, приводит к финслерову обобщению общей теории относительности. По убеждению Р.И.Пименова, «изучение структур порядка есть в физическом аспекте разработка самых базисных априорных моделей для укладывания в них последующего физического материала». И в данной книге, подготовленной к печати незадолго до кончины, Р.И.Пименов продолжил исследование возможных пространственно-временных конструкций, названных «темпоральным универсумом».

С юношеских лет Р.И.Пименов боролся за демократические преобразования в обществе, В 1957 г. он выступил с *требованием проведения выборов по многомандатной системе, за что был осужден на 10 лет. В заключении Р.И.Пименов продолжал активно заниматься научной работой и сумел получить важные научные результаты, которые переправил в Академию наук СССР. По ходатайству президента АН СССР М.В.Келдыша и поэта А. Твардовского он был досрочно освобожден после 6 лет лагерей. Однако и в дальнейшем Р.И.Пименов продолжал правозащитную* *деятельность, за что его в 1970 г. выслали из Ленинграда. В1990 г. Р.И.Пименова избрали народным депутатом РСФСР, членом Конституционной комиссии России.*

Р.М.Пименов был разносторонне талантливым человеком. Он отличался широкими гуманитарными интересами, знал больше десяти иностранных языков, владел блестящим литературным стилем, написал несколько исторических и художественных книг, большая часть которых еще не опубликована. Его оптимизм, самоотверженность и преданность делу вызывали восхищение окружающих и, несомненно, останутся навсегда в их душах.

Зав. лаб. математики, канд. физ.-мат. наук Н.А.Громов

СПИСОК НАУЧНЫХ РАБОТ Р.И.ПИМЕНОВА

1. Аксиоматическое исследование пространственно-временных структур // Труды Ш Всесоюз. математ. съезда (Москва, 1956). — М. — 1969. — Т.4. — С. 78-79.
2. К основаниям геометрии // Доклады АН СССР. — 1964. — Т.155. — № 1. — С.44-46.
3. Применение полуримановой геометрии к единой теории поля // Доклады АН СССР. — 1964. —Т.157. — №4. — С. 796—797.
4. Тензорная теория флаговых пространств // Тез. докл. П геометрической конф. —Харьков, 1964. — С.216—216.
5. Алгебра флагтензоров // Вестник ЛГУ — 1964. — № 13. — С.160—152.
6. К определению полуримановых пространств // Вестник ЛГУ. —1966. — №1, — С. 137—140.
7. Тензорная теория полуэвклидовых и полуримановых пространств: Автореф. дис. канд. физ.-мат.наук, — Л,, 196о. — 24 с,
8. Тензорная теория полуэвклидовых и полуримановых пространств: Дис.

... канд. физ.-мат, наук. — Л., 1965. — 100 с.

9. Полуриманова геометрия и единые теории // Проблемы гравитации. — Тбилиси, 1965. — С. 111—114,
10. Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений // Литовский матем. сб. — 1965. — Т.о. — № 3. — С.457—480.
11. Метрические пространства кинематического типа // Международный конгресс математиков: Тез. докл. — Москва, 1966. — Секция 9, — С. 40.
12. Теоретико-групповое описание трех плоскостей // Сиб. мат. журн. — 1967. — Т.8, — № 1. — С.49—55.
13. Некоторые теоремы о метрических пространствах кинематического типа // II Всесоюзный симпозиум по геометрии в целом, — Петрозаводск. — 1967, — С. 61—52.
14. Топологические и метрические пространства кинематического типа и теория пространства-времени // III межвузовская научная конф. по проблемам геометрии. — Казань, 1967, — С. 132—133.
15. Полуриманова геометрия // Труды семин. по векторному и тензорному анализу. — Вып.14. — М., 1998. — С. 154-173.
16. Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени) // Зап.научи. семинаров ЛОМИ. —1968. — Т, 6.- — 496с.
17. Теория пространства-времени как теория упорядоченных пространств // Тез. докл. V междунар. конф. по гравитации и теории относительности. —Тбилиси, 1968. — С.47—50.
18. Новые модели пространства-времени и некоторые связанные с ними философские проблемы // Философские проблемы теории относительности. — М.: МГУ, 1968. — С.40—52.
19. Пространства кинематического типа: Автореф. дис.… д-ра физ.-мат. наук, — М., 1969. — 18 с.

20. Пространства кинематического типа // Математ. заметки. — 1970, — Т.7.—№ 6, — С. 641—653,
21. Пространства кинематического типа: Дис. ... д-ра физ.-мат.наук.— М., 1969. —314 с.
22. Дополнение к теореме А.Д.Александрова о преобразованиях, сохраняющих конусы // Ш Всесоюзн. симпозиум по геометрии в целом. — Петрозаводск, 1969. — С. 52—53.
23. Необходимые и достаточные условия линейности преобразований, сохраняющих конусы // Математ. заметки. — 1969. — Т.6. — № 4. — С.361—369.
24. О связи между пространственной метрикой, кинематической метрикой и конгруэнцией временных кривых // IV Всесоюзн. конференция по геометрии: Тез. докл. — Тбилиси. — 1969. — С. 202—205.
25. Kinematic spaces. — New-York & London: Consultants Bureau, 1970.— 185 p.
26. Еще один шаг в направлении геометризации электромагнетизма в общей теории относительности // III советская гравитационная конф. Тез. докл, — Ереван, 1972. — С.136-138,
27. К геометрическому выводу уравнений движения заряда в электродинамике // Вопросы развития энергетики и водного хозяйства, — Сыктывкар, 1973. — С. 80—92.
28. Язык для описания правил эксплуатации программ на языке Наири-С // Применение в учебном процессе и методическое обеспечение малых ЭВМ: Тез. докл. I Всесоюзн. конф. — Обнинск, 1974,— С,64-65. — (Совместно с В.С.Никифоровым, Б.Г.Новаковским).
29. Дисперсионный анализ. — Сыктывкар. — 1974. — 56 с. (Сер. препринтов «Научн. рекоменд. — народному хоз-ву» / АН СССР, Коми фил.: вып. 3) — (Совместно с В.П.Куэнецовым).
30. К основаниям теории дифференцируемого пространства-времени //

Доклады АН СССР. — 1975. — Т.222. — № 1. — С.36—38.

31. Кривые в кинематиках и смежные вопросы физики и космологии. — Сыктывкар. — 1976. — 16 с. (Сер. препринтов «Научн.докл.» / АН СССР, Коми фил.; выл .22). — (Совместно с С.Н.Беловым, Н.А.Громовым и В.Я.Крейновичем).
32. Теория кривых *а* гладких кинематиках // Сиб. мат. журн. — 1978, — Т.19, —№ 2. — С. 370—384.
33. Негладкие и другие обобщения в теории пространства-времени и электричества. — Сыктывкар, 1979. — 60 с. (Сер.препринтов «Науч. докл.» / АН СССР, Коми фил.: вьш.47).
34. Нормативный пересчет на ЭВМ как средство получения минералогической информации // Ин-т геологии Коми фил. АН СССР. 1980. Вып. 31. — С. 91—93. — (Совместно с Я.Э.Юдовичем и др.).
35. A non-smooth approach to the physical content of General Relativity // th Intern, conf. on General Relativity and Gravitation. Abstracts. — Jena, — 1980. — V. 3. — P.663—664.
36. Финслеровы кинематики // Сиб.мат. журн. — 1981. — Т.22, — № 3, — С. 136—146.
37. Анизотропию невозможно обнаружить радарным методом // Симпозиум по геометрии в целом и основаниям теории относительности: Тез. докл. —Новосибирск, 1982. — С. 87—88.
38. К одной проблеме Буземаиа // Симпозиум по геометрии в целом и основаниям теории относительности: Тез. докл. — Новосибирск, 1982. —

    С. 89—90.
39. О полноте решения Шварцшильда // Сиб. мат. журн. — 1984, — Т.25, — № 5. — С.119—124.
40. Устойчивость оптимального решения в задаче с производящим и потребляющем регионах // Применение математических методов в

анализе и планировании отраслей народного хозяйства Европейского Северо-Востока, — Сыктывкар, 1984, — С. 40-45. — (Совместно с М.И.Игнатовым).

41. Финслерово пространство-время позволяет обойтись без черных дыр. — Сыктывкар, 1985. — 8 с. (Сер. препринтов «Науч.докл.» / АН СССР, Коми фил.; вып. 136).
42. Хроногеометрия: достижения, препятствия, структуры. — Сыктывкар, 1987. — 22 с. (Сер. препринтов «Науч. докл.» / АН СССР, Коми фил..: вып. 150).
43. Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. — Сыктывкар, 1987, — 182 с.
44. Самостоятельное место гладкости в системе дискретное-непрерывное в теории пространства-времени // VШ Междунар. конгресс по логике, методологии и философии науки. Abstracts. — М., 1987. — V.2, — P.212—214.
45. Горизонты как экстремальные точки выпуклой структуры. // Всесоюзн. конф. по геометрии в целом. — Новосибирск, 1987, — С. 95.
46. Хроногеометрическая аксиоматика общей теории относительности // Всесоюзн. конф. по геометрии в цепом: Тез. докл. — Новосибирск, 1987. —С. 96.
47. Каузальная аксиоматика обшей теории относительности // Тез. докл. IX Всесоюзн. геометрической конф., 20-22 сентября 1983. — Кишинев, 1988. —С244—245.
48. Аксиоматика общерелятивисткого и финслерова пространство-времени посредством причинности // Сиб. мат. журн. — 1988. — Т.29, — № 2,— С. 133—143.
49. Кинематическое доказательство невозможности кривой Пеано // Всесоюзн. конф. по геометрии и анализу. — Новосибирск, 1989, — С.63.

50. New spacetime — anisotxopic and eemi-Riemannean // Proc. XVIII Intern, colloquium on group theoretical methods in physics, June 4—9, 1990, Moscow — Lecture Notes in Physics; Springer, 1991.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Часто задаются вопросом: «Что такое время?» Этот вопрос наполняется смыслом в зависимости от позиций спрашивающего, или отвечающего или просто слушающего. То «время» выступает как указание на неизбежную смерть любого познающего индивидуума. То «время» — как эпоха тех или иных правителей или мастеров. То «время» — как нечто «реальное», что «управляет ходом» всех исторических или физических процессов, «время» как мера и причина перетекания песка в песочных часах. То «время» — как противопоставление «вечности», «ахронности». В связи со «временем» употребляют такие, например, фразы: «Время — вперед!», «Время так же относится к весу, как бремя к бесу», «Время есть форма существования материи», «Время есть пористая перепонка: через которую мы процеживаемся». В этой книге мы будем говорить и о «времени», поэтому несколько уточним аспект, в котором будут вестись наши рассуждения. Но в предисловии, задача которого состыковать разные способы словоупотребления на эту тему, термины будут употребляться несколько приблизительно: только на двух последних страницах предисловия мы вложим, наконец, окончательный точный смысл в употребляемые нами слова и фразы.

«Время» для нас будет одним из терминов В СИСТЕМЕ других терминов. Иными словами, мы работаем с ПОНЯТИЙНЫМИ КОНСТРУКТАМИ, с теми из них, среди которых фигурирует и понятийный конструкт «время». Этим мотивируется прилагательное «темпоральный» в названии нашей книги. Конечно, это будет НЕ ЕДИНСТВЕННЫЙ термин, на единственный понятийный конструкт, с которым мы работаем здесь. Собственно, «время» не будет даже главным нашим понятием. Это один из терминов, один из понятийных конструктов — вот аспект, в котором мы будем проводить изучение времени. Понятийные конструкты относятся к тому, что в философии традиционно называется «априорными представлениями»: может быть, удобнее говорить просто о «представлении» и «формах представления», имея в виду противопоставление «воли» и «представления», как это принято в той философской системе, которая мне больше всего нравится». Но наше изложение будет свободно от вкусовых предпочтений в философии, мы просто изучаем темпоральные понятия как формы априорных представлений, не углубляясь в вопрос, откуда эти формы появились. Другое философское название того же самого — «модель».

Способ нашего изучения — математический, ибо наиболее профессионально, наиболее корректно с понятийными конструктами работает математика. Она, в частности, специально исследует вводимые понятийные конструкты на их непротиворечивость (совместность), на самосогласованность всей системы рассматриваемых конструктов. Поэтому мы, собственно, будем строить МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. Говоря технически, на языке Бурбаки, мы изучим модели рода $(\mathrm{M};\ \mathrm{S} \subset \mathrm{M} \times \mathrm{M},\ \mathrm{R})$, конкретнее, те из них, которые в силу выбранных нами аксиом оказываются также моделями рода $(\mathrm{M},\ \mathrm{T} \subset 2^{\mathrm{M}},\ \mathrm{R})$.

Зацепленность этих моделей за «реальность», за «факты», за «волю», за «перепонку», за «естественность», за «приемлемость» иллюстрируется на следующем примере, относящемся к экспликации термина «часы». ЧАСЫ дают пользователю никоторое число — дату, час, секунду. Следовательно, ЧАСЫ имеют отношение ко множеству *TR* вещественных (действительных) чисел. Но само по себе отдельно взятое число может не иметь никакого отношения к «часам» — ни к чьим часам. Про часы можно говорить, лишь если ПРОИСХОДИТ СОПОСТАВЛЕНИЕ, если «событию» сопоставляется число, являющееся «датой этого события». В рамках распространенной в нашем веке презумпции (метанаучного постулата), что сами события образуют множество, которое обозначим *U* от начальной буквы слова «универсум», часы *w* оказываются при этом взгляде ОТОБРАЖЕНИЕМ из *U* в R , что математически записывается w: $U \Rightarrow R$ или, почти равносильно, $w \in R^u$. Таким образом, экспликация термина «часы» как прибора, дающего числовое значение, приводит к математическому понятию «функция», заданная на множестве событий и имеющая вещественные значения.

Но такого уточнения недостаточно, дабы СПЕЦИФИЧЕСКИ выделить «часы» среди всех разнообразных «приборов» или «инструментов». Ведь, например, градусник ϑ тоже дает вещественные числа в зависимости от того, опускаем ли мы его в кипящую воду, суем ли его подмышку или кладем» в снег. Градусник — тоже «функция на множестве событий (состояний) со значениями среди вещественных чисел». $\vartheta \in R^u$. В чем СПЕЦИФИКА «часов» сравнительно с «термометром»? Ответ на этот вопрос в рамках принятого нами уже несколько десятилетий и излагаемого в этой книге подхода следует искать не в описании тех ЯВЛЕНИЙ, которые измеряются «часами» или «градусниками» («часы» де измеряют длительность «временных промежутков», а «термометры» измеряют «тепловую энергию»), не в описании ФАКТИЧЕСКОГО УСТРОЙСТВА тех или иных часов или термометров, а в приискании МАТЕМАТИЧЕСКИХ КВАЛИФИКАТОРОВ к уже полученному понятийному конструкту «функция». Пусть у меня имеются два последовательных измерения A и B. В каждом измерении я работаю часами w и термометром ϑ, получаю соответственно числа w_A , w_B и ϑ_A, ϑ_B. Значения, выдаваемые термометром, могут между собой соотноситься довольно произвольно; может случиться $\vartheta_A < \vartheta_B$, или $\vartheta_A = \vartheta_B$ или $\vartheta_A > \vartheta_B$, независимо от того, какое из измерений A или B производилось раньше, какое позже. Но значения, выдаваемые часами w, не могут быть столь произвольными: если измерение A делалось раньше измерения B (например, A — начало реакции, а B — ее конец), то всегда $w_A < w_B$. Это банально, дата более позднего события всегда больше, чем дата более раннего события. Про термометр же нельзя сказать, будто температура более позднего события всегда выше температуры более раннего. В этой банальности содержится указание на МАТЕМАТИЧЕСКУЮ СПЕЦИФИКУ часов — часы есть не какая угодно функция из универсума U в R, но ВОЗРАСТАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ из U в R.

Откладывая на несколько страниц ответ на возникающий у математика вопрос насчет упорядочения в области задания этой функции, рассмотрим другие вопросы. Могут возникнуть Вопросы: а всякая ли возрастающая функция годится в качестве часов? В значительной мере всё содержание книги проясняет, какие возрастающие функции могут претендовать называться «часами», а какие — нет. В различных физически или биологически осмысленных универсумах как число, тек и вид «часов» различны. Покамест же мы констатируем, что указание на различие между ЛЮБЫМИ функциями и функциями ВОЗРАСТАЮЩИМИ — само по себе очень важное указание. Оно сразу, с порога, отметает все те рассуждения «о часах», где не отмечено это возрастание: отметает как НЕСПЕЦИФИЧЕСКОЕ и потому НЕРЕЛЕВАНТНОЕ для теории часов (и, следовательно, для теории «времени») рассуждение.

Таким образом, от «реальности», от «эмпирики», от «конвенции» (если прибегать к терминологии соответствующих философий) мы берем немногое — на уровне примеров, позволяющих отделить интересующее нас от неинтересующего. Как только мы нащупали то, что позволяет формулировать самодостаточную математическую модель, мы «забываем» про «внешний мир», а работаем исключительно с обретенным понятийным конструктом.

Изучение понятийных конструктов, т.е. математических моделей, которым мы занимаемся уже свыше тридцати лет, привело нас, в частности, к убеждению, что малосодержательно рассуждать о «времени», если не рассуждать о нем в рамках «пространствовремени». Ведь «время» и в его интуитивном восприятии, и в смысле обыденного словоупотребления, и в философском понимании, и в смысле переменной в физических уравнениях, и во многих других смыслах —ЛИНЕЙНОЕ НЕЧТО. «Стрела времени» — это в переводе на математический язык является «одномерным пространством». Напротив, то, что понимается в обыденном языке под «пространством» или в физике под «пространствовременем», — в переводе на математический язык является многомерным пространством размерности не меньше двух—трех. А одно мерное пространство — довольно простенький объект сравнительно с пространством многомерным (если отвлечься от тератологических казусов). Поэтому и рассуждения об одномерном объекте, о «времени» в значительной мере делаются тривиальными, банальными. Из-за этого мы главное внимание будем уделять тому, что называется «пространствовременем», трактуя «время» как некий частный ПОДОБЪЕКТ в нем, Термин «пространствовремя» возник в физике и оживлен примерами, которые относятся именно к физике (к классической ньютоновой, к релятивистской эйнштейновой, к космологии, к финслеровой геометрии), тогда как в этой книге мы будем говорить и о биологии, и о геологии, и о лингвистике. Но, к сожалению, единого термина для всех этих четырех наук не создано, придется поэтому нам пользоваться несколько неадекватно (из-за специфически физической нагрузки) звучащим термином «пространствовремя». Желая как-то снять эту привязанность к физике, мы предпочитаем употреблять вводимый в этой книге термин «темпоральный универсум». Словосочетание «биологическое пространствовремя» можно было бы употреблять, кабы уже было известно, что такое «биологическое пространство», а то еще весьма спорный и неустоявшийся термин.

Но независимо от терминологии, смещение в сторону ЛИНЕЙНОСТИ, ОДНОМЕРНОСТИ, которое наблюдается при изучении времени, вызывается также иногда недостаточной осведомленностью авторов по части знания свойств упорядоченности. Ибо в основе «теория пространствовремени» лежит, говоря математически, некая подтеория общей теории упорядоченных множеств. В самом деле, как мы видели из примера с «часами», мы сразу переходим к «возрастающим функциям». Однако функция может быть возрастающей ТОЛЬКО в том случае, если в области ее задания (в универсуме *U) и в* области ее значений (вещественные числа *R*) УЖЕ ЗАДАНО какое-то отношение порядка, корректнее говоря, отношение РОДА ПОРЯДКА, но об этом подробно будет говориться далее. Итак, универсум мыслится не как лишенное всех свойств «голое» множество U , но как МНОЖЕСТВО С ОТНОШЕНИЕМ < С ПОРЯДКА, т.е. как структура (U, <) или, педантически, как структура рода (U. $S \subset U \times U$). Распространенная широко интуиция, привычный опыт работы с порядком и упорядоченными множествами сводятся на практике к работе с ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫМИ множествами: они иногда даже именуются «упорядоченными множествами», что вовсе сбивает с толку — в этой терминологии наша структура (U, <) называется «частично упорядоченным множеством». Практика работы с высказываниями вроде «число α меньше числа b», «ординал λ меньше ординала μ «сужает применение обшей идеи порядка до однонаправленного, одномерного порядка: эта привычка стыкуется с интересом к линейно направленному потоку времени.

Однако наше отношение «событие p раньше события q», «событие q произошло позже, чем произошло p» — НЕ ОБЯЗАНО быть линейным». Для иллюстрации обратимся к распространенному каузальному пониманию отношения «раньше—позже». Если B позже A, то это значит, что A могло быть (потенциальной, не обязательно актуальной) причиной для B. Точнее, то, что происходило в A, могло оказаться одним из факторов, действующих в B. Но при таком толковании ясно, что два очень сильно удаленных события не могут быть связаны отношением раньше—позже, если только мы считаемся с тем, что скорость передачи каузальных сигналов ограничена, Следовательно, для работы с пространствовременем нам преимущественно понадобятся УПОРЯДОЧЕННЫЕ, НО НЕЛИНЕЙНО, множества.

Приведем несколько примеров такого отношения порядка, дабы расшатать одномерные стереотипы и интуицию. Первый. Пусть множество *м* состоит из пар чисел (ξ, η). Задаем отношение

$$(\xi,\eta)<(\xi',\eta')\Leftrightarrow\ \xi<\xi'\&\eta<\eta' \qquad (0.1)$$

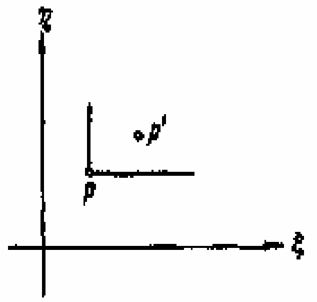


Рис. 1.

это отношение антисимметрично: если $(\xi,\eta)<(\xi',\eta')$. то невозможно $(\xi',\eta')<(\xi,\eta)$. Это отношение транзитивно: если $(\xi,\eta)<(\xi',\eta')$ и $(\xi',\eta')<(\xi'',\eta'')$, то ξ < ξ” & η < η”. Следовательно, введенное нами формулой (0.1) отношение < является отношением СТРОГОГО ПОРЯДКА, При этом, например, такие точки (пары чисел), как (0, 0) и (1, 1) очевидно не связаны между собой ни отношением (0, 0) < (1, 1), ни (0, 0) > (1, 1). Следовательно, множество *М* НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ЛИНЕЙНО-УПОРЯДОЧЕННЫМ множеством. На рис.1 видно, что точка $p'=(\xi',\eta')$ следует за точкой $p=(\xi,\eta)$, если р´ содержится внутри четверть-плоскости (квадранта) с вершиной *р,* причем имеется в виду тот квадрант, который обращен вверх и вправо. Чаще на практике поворачивают оси координат на 45º, и тогда отношение (0.1) в новых координатах выражается формулой

$$(t,x)<(t',x')\Leftrightarrow t'-t>|x'-x| \qquad (0.2)$$

см. рис.7. Обобщение этой формулы с двумерного на многомерный случай хорошо известно тем, кто занимался теорией относительности:

$$(t,x,y,z)<(t',x',y',z')\Leftrightarrow t'-t>\frac{1}{c}\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'+z)^2} \quad (0.3)$$

Здесь порядок задается конусом, как изображено на рис.2, для двумерного случая конус вырождается в угол, причем в формуле (0.2) еще дополнительно предполагалось С = 1.

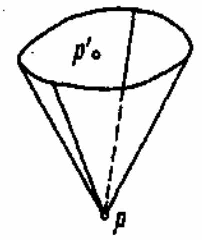


Рис.2.

Интересным крайним случаем (С = ∞) формулы, (0.3) является следующее отношение порядка. На множестве четверок (t, x, y, z) вводим определение:

$$(t, x, y, z) < (t', x', y', z') \Leftrightarrow t' < t$$

(0.4)

Тогда за точкой $p = (t, x, y, z)$ следует целое полупространство

$$\{(t', x', y', z') | t' > t\}$$

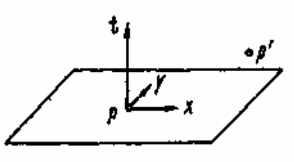


Рис.3.

НЕЗАВИСИМО от того, каковы координаты x', y', z' и ; см. рис.3. Очевидно, что так упорядоченное множество четверок тоже не линейно-упорядоченное: не связаны отношением порядка те пары точек, которые лежат на сечении $t = const$.

Другим кравшим случаем (С = 0) формулы (0.3) является упорядочение по формуле:

$$(t, x, y, z) < (t', x', y', z') \Leftrightarrow t' < t \; \& \; x = x' \& \; y = y' \& \; z = z' \qquad (0.5)$$

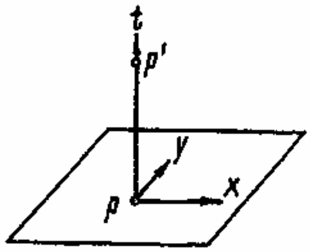


Рис.4.

Тогда, как видно на рис. 4, за точкой $(t_0, x, y, z) = p$ следуют только те точки, которые лежат на полупрямой $x = x_0$ & $y = y_0$ & $z = z_0$ выходящей из p и направленной вверх. Опять-таки, точки (t_0, x_0, y_0, z_0) и (t_0, x_1, y_1, z_1) при $x_0 \neq x_1$ не связаны никаким отношением порядка, так что множество $(M, <)$ не линейно-упорядоченно.

Наконец, конус, который в формуле (0.3) имеет прямолинейную образующую, можно сделать искривленным, как, например, при порядке, задаваемом формулой:

$$(t, x, y, z) < (t', x', y', z') \Leftrightarrow t' - t > \sqrt{\sin^2(x' - x) + \sin^2(y' - y)} \qquad (0.6)$$

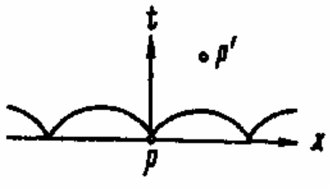


Рис.5.

Тогда множество точек, следующих за точкой *p*, изображается на рис.5 в виде множества внутри «криволинейного конуса». Технически в этом случае для доказательства транзитивности отношения (0.6) требуется сначала, как при опущенном доказательстве транзитивности отношения (0.3), воспользоваться неравенством

$$\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^2 + y^2} \geq ax = by \ ,$$

а затем прибегнуть к неравенству

$$|\sin(\alpha + \beta)| \leq |\sin \alpha| + |\sin \beta|$$

Все эти примеры должны предупредить читателя, что отношение «раньше-позже», о котором здесь идет речь, гораздо непривычнее, богаче, разнообразнее, нежели отношение «больше-меньше», известное на числах и фигурирующее обычно в философских сочинениях о времени. Рассматриваемое здесь отношение — это бинарное отношение, от которого требуется только антисимметричность и транзитивность, к тому же последняя будет ниже еще ослаблена, дабы включить в рассмотрение потенциальные «машины времени», т.е. замкнутые временные циклы».

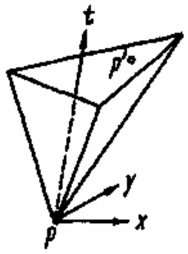


Рис. 6.

Мы будем заниматься проблемами «времени» или «пространство-времени» или «темпорального универсума» в рамках теории упорядоченных структур (множеств). Там, где возникают классические вопросы: «Где? Что? Когда?» — т.е. от юриспруденции до макрофизики — там подойдет одна из моделей упорядоченного множества. Возможны и радикально иные воззрения на мир, например, такие, где нет даже места соответствующим понятиям.

Например, воззрения, связанные с терминами вроде «водород», «гелий», «точка в гильбертовом пространстве», «любовь», «измена», «ровность», «вечность». Эти термины и сопутствующие им операции остаются ВНЕ РАМОК теории темпорального универсума. По-видимому, из европейских философов первым Шопенгауэр показал, что «время» не является НЕОБХОДИМОЙ априорной формой нашего представления. Таким образом, за пределами теории темпорального универсума остается много даже важных представлений. В рамки же теории упорядоченного универсума вкладываются и классические ньютоновы представления о времени, и специальная теория относительности, и релятивистская космология, и финслерово пространствовремя, и даже единая теории пространствовремени-электричества. Как вкладываются — будет показано в книге. Мы надеемся, что можно вложить и геологические и биологические представления о времени.

Оказалось, что если строить теорию темпорального универсума, начиная не со множества *M*, а с упорядоченного множества (*M*, <). то требуется очень немного аксиом — меньше десяти[2], дабы по сути получить пространство-время обшей теории относительности. Идея подхода очень простая и естественная. Для изучения множества *M*, как известно, очень важную роль играют вещественнозначные функции $f\colon \; M \Rightarrow R$: особенно возрастает их роль, если начинать не с множества *M*, а с топологического пространства (*M*, *T*) или с гладкого многообразия (*M*, *T*, *F*). Если M упорядочено, то среди всех мыслимых функций естественно выделяется подкласс ВОЗРАСТАЮЩИХ функций *f*, т.е. удовлетворяющих условию:

$$p < q \Rightarrow f_p < f_q \tag{0.7}$$

Дифференциалы (если можно о них говорить) этих последних функций *df*

---

[2] Для сравнения: в гильбертовой аксиоматике эвклидовой геометрии два десятка аксиом, в вейль-рашевской аксиоматике аффинного пространства — десяток аксиом.

выделяют в пространстве дифференциалов произвольных функций (в так называемом «кокасательном пространстве») определенное множество: которое по своим математическим свойствам является «клином». Остается так отредактировать аксиомы, чтобы этот клин оказался хорошим конусом, — тогда получим финслерово пространство-время. Если к этому добавить требование изотропности (одинаковости пространствовремени по всем направлениям), то получаем риманово с точностью до масштаба пространствовремя, т.е. «общую теорию относительности». Идейно самое содержательное заключается в выделении среди всех возможных функций из M в R возрастающих, т.е. удовлетворяющих (0.7). Всё прочее оказывается вопросом техники и, наверное, может быть усовершенствовано, когда этим займутся другие авторы. Нами же в теорию пространствовремени (на дометрическом уровне) привнесены лишь две идеи. Первая из них (1966) состояла в том, что на отношение порядка налагались ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ характеристики: благодаря этому и удалось выделить среди всех упорядоченных структур как раз те, которые описывали темпоральный универсум. Они тогда были названы нами «топологическими пространствами кинематического типа», позже название сократилось до «топологические кинематики». Удалось и топологически описать различие между «ньютоновыми» и «эйнштейновыми» кинематиками. Вторая идея (1972) заключалась как раз в описанном выделении возрастающих функций на дифференциально-топологическом уровне.

Наши работы позволяют дать такое общее определение понятию «пространствовремя» (или, что-то же, «темпоральный универсум»). Пространствовремя есть локально упорядоченное множество, в котором отношение порядка позволяет ввести хорошую топологию, «Хорошая» приблизительно означает «со счетной базой», «регулярная», «локально компактная», «локально связная»; требование «хаусдорфова» не входит в объем термина «хорошая». Уточнения см. ниже в тексте книги.

Тут уместно задержаться на перечне возможных уровней рассмотрения-изучения. Сам Эйнштейн первую свою работу по специальной теории относительности писал на уровне «линейной физики». Физика присутствовала в том, что он оперировал понятиями «масса», «электродинамика» и т.п. «Линейность» содержалась в той математической модели, которую он предполагал. Мы не станем перебирать здесь возможных ФИЗИЧЕСКИХ и ФИЛОСОФСКИХ уровней рассмотрения, сразу перейдем к тем трем-четырем МАТЕМАТИЧЕСКИМ уровням рассмотрения темпоральной теории, которые будут играть существенную роль для дальнейшего изложения. Первые два называемых ниже уровня широко известны, следующий — самый абстрактный — введен нами.

Итак, исторически первый уровень, который в обратном логическом счете мы будем называть «третьим», — уровень ЛИНЕЙНЫЙ или ВЕКТОРНЫЙ. Самое главное здесь — это наличие абсолютного параллельного переноса («трансляции») Этот перенос задается вектором («вектор переноса») и ни от какого пути не зависит. Поэтому удается работать в рамках векторного пространства E_n, а точнее — аффинного пространства A_n. На этом уровне ЗАРАНЕЕ ИЗВЕСТНО, что такое «прямая линия», так что, например, формулировка: «Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения», — корректна. Прямые линии подчиняются довольно простым правилам. Исторически эти прямые считались подчиненными также еще метрическим закономерностям эвклидовой геометрии, но на деле важна лишь аффинная структура. Это настолько простой в обращении объект, что никаких трудностей и неоднозначностей практически не возникает. Будучи одновременно и геометрическим объектом, и объектом алгебраическим, векторное пространство позволяет легко писать уравнения, а инвариантность относительно абсолютного переноса делает эти уравнения независящими от точки, т.е. вовсе простыми. На этом уровне создавалась галилеево-ньютонова механика, вся теоретическая механика XVII—XIX веков, специальная теория относительности, хроногеометрия по А.Д.Александрову. В определенном смысле это самый низовой уровень изучения темпорального универсума.

Следующий уровень (и исторически и логически — второй) возникает, если мы избавляемся от жесткого требования, чтобы существовал абсолютный параллелизм, но сохраняем требование, чтобы рассматриваемая структура была структурой n-мерного гладкого многообразия M_n, т.е. гладкой (дифференцируемой). Наличие гладкости позволяет говорить о «касательном в точке p пространстве» T_pM. Следовательно, хотя простое аффинное пространство A_n заменено более сложным. (более общим) многообразием M_n, в каждой точке $p \in M$, имеется своя — удобная и привычная — векторная структура $T_pM = E_n$. Правда, в разных точках она разная, и нет способа сравнивать векторы с разными начальными точками. Даже когда ДОПОЛНИТЕЛЬНО вводят на гладком многообразии структуру ковариантного дифференцирования V (или, равносильно, параллельного переноса Γ^i_{jk}, или форм связности с ω^i_j) или более сильную структуру метрического тензора q_{ik}, то, оказывается, что перенос из точки в точку зависит от пути, не является абсолютным. Получаемый объект не сводится к простому алгебраическому объекту E_n. Сейчас предложены методы, которые превращают такое пространство в алгебраический объект (гладкие квазигруппы, гладкие локальные пупы), но сии алгебраические объекты настолько далеки от простоты векторной алгебры, что остаются почти никому неизвестными. Для нас важно, что на этом «гладком уровне» («дифференциальном уровне») рассмотрения можно говорить про ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИЙ, про ОПЕРАТОРЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. Поэтому намеченные выше в связи с формулой (0.7) соображения ЗАКОННО проводить на гладком уровне рассмотрения, не прибегая к дополнительной структуре абсолютного параллелизма.

(Напомним, что всякая структура абсолютного параллелизма автоматически является гладкой структурой.) В чистом виде гладкая структура есть бесконечно дифференцируемое конечномерное многообразие. Этот второй, приподнятый в направлении абстрагирования над линейным уровнем, уровень рассмотрения присущ общей теории относительности, к нему относится хроногеометрия в смысле Синга, каузальная теория по Пенроузу-Хокингу. Получаемые тут уравнения, конечно, зависят от точки. Финслерово пространствовремя также относится ко второму уровню рассмотрения, потому что наличие анизотропии ничего не меняет в том обстоятельстве, что производные и дифференциалы имеются, а абсолютного параллельного переноса — нет.

Третий исторически уровень рассмотрения — топологический. Здесь нет никакой гладкости и, вообще говоря, не обязательно предполагать, что рассматриваемое топологическое пространство является топологическим многообразием. Раз нет гладкости, то нельзя упоминать никаких дифференциалов функций, а потому рассуждения, связанные с формулой (0.7), прерываются. Никаких векторов, само собой, не возникает. На этом уровне, фактически, рассматривали теорию пространствовремени только Пименов да Буземан, а позднее Квейнович, хотя идея такого подхода встречалась еще в 1930 г. у А.А.Маркова мл.

Четвертый исторически, самый абстрактный априори мыслимый уровень рассмотрения и потому логически первый — это теоретикомножественный, когда нет и топологии. Однако в нашей темпоральной теории «третий» и «четвертый» уровни сливаются. Дело в том, что мы начинаем, как уже отмечалось, не с голого множества M, а с упорядоченного $(M, <)$. И при этом оказывается, что аксиомы, выделяющие темпоральный универсум из других упорядоченных множеств, формулируются так, что по отношению порядка $<$ ОДНОЗНАЧНО КОНСТРУИРУЕТСЯ топология $T \subset 2^{M}$, называемая «интервальной топологией»: подробности в тексте ниже. В результате между «третьим» и «четвертым» уровнями разницы не остается, в логическом счете этот уровень называется нами первым.

Возникает естественный вопрос о СОДЕРЖАТЕЛЬНОСТИ ИЗУЧЕНИЯ на этом верхнем, топологическом, абстрактнейшем уровне. Известно, что при переходе с низшего (конкретного) уровня на высший (абстрактный) часто утрачиваются многие привычные понятия. Например, при переходе с векторного уровня на гладкий риманов уровень утрачивается возможность дефинировать «жесткое тело». Не происходит ли таких утрат при переходе на еще более общий топологический уровень столь много, что теория становится бессодержательной? Нет, не происходит. Оказывается, что из гладкого уровня на топологический можно «перетащить» едва ли не все понятия. При этом, очищенные от математических подробностей, они делаются философски прозрачнее, четче. Например, это относится к таким понятиям: «ахронное множество» (быв. пространственноподобное сечение), «будущее» (быв, конус будущего), «время», «дата», «изотонная кривая» (быв. временноподобная кривая или, на более низком уровне, инерциальная частица), «интервал», «материальная точка», «пространственноподобная метрика», «наблюдатель», «область Коши-зависимости», «ориентация во времени», «поток вещества», «промежуток времени», «прошлое для события», «прошлое для множества», «система отсчета»« «темпоральная метрика», «циклическое время», «часы» и многое другое.

При этом соблюден принцип перманентности: понятие, определенное нами» для высшего уровня рассмотрения, автоматически переходит в понятие, традиционно определяемое на гладком уровне рассмотрения, как только мы допускаем существование гладкости.

Известные в физике модели пространствовремени так размещаются по названным трем уровням (названия на верхнем уровне еще не установились):

	НЬЮТОН Абсолютная одновременность	ЭЙНШТЕЙН Постулат близкодействия	Промежуточные модели
топологически	Линейное абсолютное время и абсолютное Пространство (могущее зависеть от времени); без метрики.	Пространствовремя, Получаемое вырезыванием и вклеиванием, и более общее	
гладкий	Ньютонова общая теория относительности.	Финслерова (анизотропная) и риманова (эйнштейнова) теория относительности	Пространствовремя -электричество.
векторный	Галилеево-ньютоново («классическое») пространствовремя	Анизотропная и эйнштейнова специальная теория относительности	

Всё это достигается на первом, верхнем уровне рассмотрения только за счет того, что мы берем не *M,* а (*M,* <). Всякий подход к теории пространствовремени, игнорирующий отношение рода порядка < (введенное как ПРИМЕРНОЕ, АПРИОРНОЕ, ибо иначе ему неоткуда взяться на этом уровне), оказывается бессодержательным. Без «раньше-позже» всё, что можно сказать о множестве, о его элементах, подмножествах и функциях, — с равным правом можно отнести не только ко времени, но и к весу, и к плотности, и к толщине, и к температуре. Без отношения «раньше-позже» теряется СПЕЦИФИКА пространствовремени, то, чем оно отличается от «пространства», от «фазового пространства», от «пространства состояний», от «пространства признаков». На более низких уровнях рассмотрения эту специфику обычно ВЫВОДЯТ из метрической структуры, для задания которой уже предполагается наличие гладкости.

Конечно, при более пристальном рассмотрении в названных уровнях обнаруживаются «подуровни». Так, например, «гладкий уровень» содержит в себе «метрический уровень», «конформный уровень», «уровень аффинной связности» и другие, о которых речь пойдет ниже. Но в укрупненном плане мы будем вести рассмотрение на названных трех уровнях: 1) на топологическом, когда задана структура $(M, <)$, по которой однозначно определяется топология T: 2) на гладком, когда задана структура $(M, <, T, F)$, где F — так называемая «гладкость», т.е. $F \subset R^{M}$ и семейство функций $f \in F$ удовлетворяет известным условиям C^{∞}-дифференцируемых многообразий: 3) на векторном, когда в $(M, <)$ заданы согласующиеся с порядком $<$ операции $M \times M \Rightarrow M$ (т.е. «сложение» $(x, y) \Rightarrow x + y$) и $R \times M \Rightarrow M$ (т.е. «умножение на скаляр» $(\lambda, x) \Rightarrow \lambda x$, подчиняющиеся известным алгебраическим условиям.

Здесь следует сказать несколько слов о стиле изложения в этой книге. Преимущественно мы будем писать без доказательств. Доказательства читатель сможет найти в наших книгах [9, 11], а также в статьях [8, 12]. Только в целях иллюстративных, а также в тех случаях, когда в названных работах нет доказательства формулируемому здесь утверждению, мы будем его приводить. В основном это относится к гл. 4. В то же время от читателя требуется определенная математическая культура, дабы для него были понятны и не являлись бы пустым местом вышеприведенные формулы, хотя бы он и не работал прежде с ними. Наша цель б этой книге — свести воедино все результаты по теории темпорального универсума, а снабжение их еще и доказательствами существенно увеличило бы лимитированный объем книги. В отличие от наших прежних книг на эту тематику мы здесь не замыкаемся в рамки исключительно физико-математических представлений, но привлекаем ситуации из геологии, биологии и т.п.

Вот тот минимальный математический реквизит, без которого читать данную книгу нецелесообразно. Надо знать следующие понятия: «множество», «элемент множества», традиционные операции над множествами ($\cup$, $\cap$, \ , $\times$, /, 2^M, N^M), «операция факторизации / по некоторому отношению эвивалентности», «отображение множества M во множество N», т.е. $M \Rightarrow N$ и «отображение из множества M во множество N», т.е. $M \Rightarrow N$. Множество всех отображений $M \Rightarrow N$ обычно обозначается мы будем пользоваться, допуская вольность обозначений, ибо она не приведет ни к каким недоразумениям, этим же символом для обозначения множества отображений f: $M \Rightarrow N$; педантично следовало бы писать $(N \cup \{O\})^M$, где $\varnothing$ — пустое множество. Операция факторизации, в частности, поможет нам не только склеивать куски разных пространств, но и понять такие конструкты, как «одновременность», «линейно-упорядоченное время», «собственно-пространство данной системы отсчета», «проекция электромагнитного пятимерия на 4-мерное пространствовремя».

Далее, читателю надо знать, что такое «отношение порядка» и вообще учение о логических одно-, двух- и трех-местных предикатах, равно как и символику V, &, ⌉< $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, : $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$, $P(x)$, $\{x|P(x)\}$. Надо знать, что такое «вещественное число» и «множество всех вещественных чисел R, хотя бы на уровне практического понимания без углубления в обоснование этого понятия. Важное значение приобретают такие отображения одного упорядоченного множества в другое упорядоченное (возможно, ДРУГИМ отношением) множество, при которых порядок сохраняется. Такого рода отображения обычно называются «изотонной функцией», или «возрастающей функцией», или «морфизмом порядка». Из изотопных функций главную для нас роль будет играть отображения $\mathrm{R} \Rightarrow (M, <)$ и $(M, <) \Rightarrow \mathrm{R}$, где $(M, <)$ — произвольное упорядоченное отношением множество M (наш универсум U, наше пространствовремя), а R — множество вещественных чисел с их естественным порядком.

Целью нашей, будет рассмотреть по возможности исчерпывающе все те модели $(M, <)$ или, корректнее $(M, <, R)$, которые допускают интерпретацию в терминах «время», «пространствовремя». При этом мы исключаем из рассмотрения те модели, в которых множество M состоит из КОНЕЧНОГО ЧИСЛА элементов. Порой мы спускаемся с первого (высшего по абстрактности) уровня рассмотрения на второй (гладкий) или третий (векторный). Читатель, не знакомый ни с римановой ни с псевдоэвклидовой геометриями, может пропускать эти наши экскурсы: он утратит часть доводов, подкрепляющих нашу теорию, но не утеряет общей картины. Исключением является гл.4, которая ПРЕДПОЛАГАЕТ хорошее знакомство читателя с аппаратом римановой геометрии. Она вся написана на втором уровне рассмотрения.

Гл. 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И АКСИОМЫ ТЕМПОРАЛЬНОГО УНИВЕРСУМА

§ 1. ОТНОШЕНИЯ РОДА ПОРЯДКА

1. ***Строгий порядок, интервал и топология***. Имеем множество M, элементы которого по традиции называем «точками». Двуместное отношение $x < y$ называется отношением строгого порядка, если оно антисимметрично (т.е. $x < y \Rightarrow y < x$) и транзитивно (т.е. $x < y$ & $y < z$). Поэтому, в частности, оно антирефлексивно: $x < x$. Множество $\{x | p < x < g\}$ тех точек, которые лежат между p и q, при $p < q$ называется ИНТЕРВАЛОМ и обозначается (p, q); при $p < q$ оно пусто. Среди всех упорядоченных (иногда в таких случаях говорят «частично упорядоченных») множеств мы выделяем те, которые удовлетворяют ниже сформулированным аксиомам ТК$_{1\text{-}8}$, и будем заниматься только ими. В этой рубрике речь пойдет только о первых трех аксиомах, прочие см. §1.3, §4.2 и §5.6. Обозначение ТК есть аббревиатура Топологическая Кинематика, так что речь идет о (несколько модифицированной) аксиоматике топологической кинематики, введенной в [9], см. также [11].

ТК$_1$. Для всякой точки $\alpha \in M$ найдется содержащий ее интервал (p, q).

В частности, это означает, что у всякой точки α есть предшествующая $q < a$, и следующая за ней $q > \alpha$. (О «непосредственно предшествующей» или «первой следующей за» речи не идет.)

ТК$_2$: Пересечение любых двух интервалов, содержащее в себе точку x, содержит в себе вместе с концами некоторый третий интервал, также содержащий точку x. В виде формулы:

$$\forall \alpha \forall b \forall \subset \forall d \qquad x \in (a,b) \cap (c,d) \Rightarrow \exists_p \exists_q$$

$x \in (p,q) \& \{p\} \cup (p,q) \cup \{q\} \subset (a,b) \cap (c,d)$

Обратим внимание, что допускается и случай $\alpha = c,\ b = d$. Поэтому каждый интервал можно уменьшить, сохранив фиксированную внутреннюю точку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Называем ИНТЕРВАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ *T* на *M* ту топологию, базисом которой служат произвольные интервалы из *(м, <).*

Напомним, что топология *W* на множестве *M* есть некоторое семейство $W \subset 2^{M}$, удовлетворяющее известным аксиомам (оно замкнуто относительно операции объединения и относительно операции конечного пересечения). Наше требование TK_2 означает, что всякое открытое в интервальной топологии T множество является объединением интервалов. Что окрестность любой точки — это содержащий ее интервал плюс, возможно, нечто еще.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $\{x | \alpha < x\}$ всех точек, следующих за α, называется БУДУЩИМ ТОЧКИ α и обозначается α^+. Множество $\{x | x < \alpha\}$ всех точек, предшествующих α, называется ПРОШЛЫМ ДЛЯ ТОЧКИ α и обозначается α^-.

Из определений следует, что $(p, q) = p^+ n q^-$. Из аксиом непосредственно вытекает, что α^+ и α^- открыты в интервальной топологии и что α является точкой прикосновения для α^+ и α^-, т.е. в любой окрестности точки α найдутся точки из α^+ и из α^- Поэтому третья аксиома частично усиливает в определенном аспекте вторую:

TK_3. Если $p, q \in (a,b)$ и $p < q$, то $\overline{(p,q)} \subset (a,b)$, где черта обозначает замыкание относительно интервальной топологии.

Приведем пример <, удовлетворяющего нашим аксиомам и пример <, не удовлетворяющего им.

На координатной плоскости $\{(t, x)\}$определим:

$$(t,x) < (t',x') :\Leftrightarrow t' - t > |x' - x| \tag{1.1.1}$$

см. рис. 1: ср. (0.1—3). Очевидно, что ТК$_{1—3}$ выполнены. Это отношение — частный случай КИН$_2$ или КИН$_3$ из [11].

Напротив, рассмотрим отношение:

$$(t,x)<(t',x'):\Leftrightarrow t'-t\geq|x'-x|\,\&\,(t',x')\neq(t,x) \qquad (1.1.2)$$

Это отношение строгого порядка, и нетрудно убедиться, что ТК$_3$ выполнена. На рис. 7 точка, относящаяся *к этому примеру, помечена II.* Интервал для точек $p = (t_p, x_p)$ и $q = (t_q, x_q)$ состоит здесь из

$$\{(t,x)\ |t-t_p\geq|x-x_p|\,\&\,t_2-t_1\geq|x_q-x|\,\&\,p\neq(t,x)\neq q\}$$

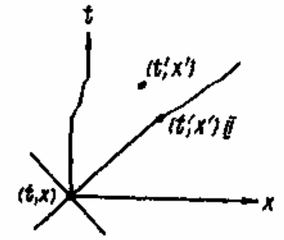


Рис. 7.

Поэтому, в частности, интервалы с вершинами *(a – 1, b – 1), (a + 1, b – 1)* и *(a – 1, b + 1), (a + 1, b + 1)* пересекаются по одной единственной точке *(a, b).* Если бы *ТК$_{1\text{-}2}$* выполнялись, то произвольная точка *(a, b)* была бы открытым множеством (следовательно, топология *T* была бы дискретной) и в ней, в одной точке, содержался бы целый интервал, т.е. минимум две разные точки. Этим противоречием доказывается, что *ТК$_{1\text{-}2}$* не выполнены при определении (1.1.2).

Аксиомы *ТК$_{1\text{-}3}$* описывают, как видно из их формулировок, локальное устройство. Если и глобально мир устроен так же, как локально, то достанет и приведенной аксиоматики. Но, имея в вицу, глобальное устройство более сложных темпоральных моделей, понадобятся некоторые модификации сказанного. В частности, придется ввести малоизвестное отношение «локального следования», модифицирующее порядок.

2. ***Отношение локального следования***. Это отношение рода порядка, т.е. двуместное, антисимметричное, но транзитивность у отношения локального следования $\prec$ ослаблена до следующего условия:

$$\forall x\forall_y\forall_z((\exists px,y,z\in p^{+}\vee\exists qx,y,z\in q^{-})\Rightarrow((x\prec y\,\&\,y\prec z)\Rightarrow x\prec y)) \quad (1.2.1)$$

Ясно, что строгий порядок $<$ является частным случаем отношения локального следования $\prec$. Интервал для $\prec$ определяем так же, как для $<$, будущее и прошлое — тоже. Обратим внимание на то, что условие $p \prec q$ в определении интервала становится нетривиальным. В случае локального следования при $p \prec q$ может существовать *x,* удовлетворяющая $p \prec x \prec q$, т.е. $p^- \cap q^- \not\subset (p,q)$, хотя $(p,q) \subset p^+ \cap q^-$. Точно так же из $b \in a^+$ не следует $b^+ \subset a^+$. Примером $\prec$ может служить отношение

$$(t,x) \prec (t',x') :\Leftrightarrow 0 < t' - t < 1 \qquad (1.2.2)$$

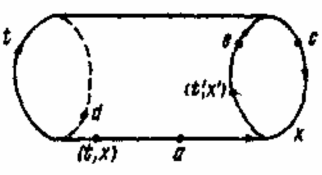


Рис. 8.

Наиболее интересно оно, если мы за *M* принимаем не саму координатную плоскость *t, x*, а результат ее факторизации (склеивания) по отношению эквивалентности *(t, x) – (t + 2k, x), k ∈ N:* см. рис 8. Это цилиндр, образующей которого служит ось абсцисс *x,* а направляющей — ось темпорат *t,* склеенная в окружность длины 2. В факторизованном примере (1.2.2 (1.2.2) имеется цепочка $(0, x_1) \prec \left(4\!\!\diagup\!_3, x_3\right) :\prec (0, x_4)$ при произвольных x_1, x_2, x_3 и x_4. Тут видно самое главное отличие $\prec$ от <. Локальное следование допускает цепочки вида $a \prec b \prec c \prec a$ или общее $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n \prec a_1$, где уже $a_к$ *R* a_{k+2}. Это гомотопическое различие между цепочками $\ldots a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ и $\ldots \prec a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n \prec \ldots$ позволяет описать более широкий класс моделей. В частности, (*M*, $\prec$) можно иногда покрыть конечным множеством интервалов, тогда как *(M*, <) нельзя никогда покрыть конечным числом интервалов. Например, при описанной выше факторизации достаточно трех интервалов ((0, 0), ($5\!\!\diagup\!_6$, 0)), (($2\!\!\diagup\!_3$. 0), ($3\!\!\diagup\!_2$, 0)) и (($4\!\!\diagup\!_3$, 0), ($13\!\!\diagup\!_6$, 0)). Поэтому строгий порядок < годится для описания исключительно некомпактных темпоральных моделей, а локальное следование позволяет описывать и компактные. Например, в дополнение к описанной факторизации можно провести факторизацию по отношению (*t*, *x* + *k*) ~ (*t*, *x*), превратив цилиндр в тор, $к \in N$.

Локальное следование можно аксиоматизировать по-разному. Один из способов указан формулой (1.2.1) локальной транзитивности. Другой способ основан на предварительном независимом введении отношения близости (толерантности), т.е. двуместного симметричного отношения $x \mid y$. Тогда взамен (1.2.1) постулируется выполнение формул:

$$x \prec y \Rightarrow x|y \tag{1.2.3}$$

$$x \prec y \;\&\; y \prec z \;\&\; x|z \Rightarrow x \prec z \tag{1.2.4}$$

Очевидно, что все различия между $\prec$ и $<$ глобальны, а локально, т.е. на всяком интервале (p, q) отношение $\prec$ является отношением строгого порядка; поэтому аксиомы ТК$_{1\text{-}3}$ не нуждаются в переформулировании. Мы по определению полагаем их выполненными. Сама идея рассматривать отношение рода порядка КАК ЗАДАННОЕ ЛОКАЛЬНО развивается в следующей рубрике, где обнаруживается попутно недостаточность даже отношения локального следования для охвата всех мыслимых глобальных моделей темпорального универсума.

3. ***Локальное задание строгого порядка***. Рассмотрим два множества M$_1$ и M$_2$, каждое со своим отношением строгого порядка $<_1$ и $<_2$. Для каждого $(M_i, <_i)$ можно определить свой интервал, свою топологию: предполагаются выполненными ТК$_{1\text{-}3}$. Если $M_1 \cap M_2 \neq \varnothing$, то у точки $\alpha \in M_1 \cap M_2$ имеется содержащий ее интервал (p, q) в смысле $<_1$ и содержащий ее интервал $(r, s)_2$ в смысле $<_2$. Но, вообще говоря, эти интервалы могут быть разными и пересекаться по одной единственной точке α. Для исключения подобных казусов и для согласования порядков на пересечении мы вводим аксиому:

ТК$_4$. Если $\alpha \in M_1 \cap M_2$, то найдутся $p, q \in M_1 \cap M_2$, для которых либо $(p, q)_1 = (p, q)_2$, $\alpha \in (p, q) \subset M_1 \cap M_2$ и для всяких x, y из (p, q) соотношение $x <_1 y$ влечет $x <_2 y$: либо же $(p, q) = (q, p)_2$, $\alpha \in (p, q) \subset M_1 \cap M_2$ и для всяких $x, y \in (p, q)_1$ из $y <_2 x$.

Теперь интервальной топологией T на $M_1 \cup M_2$ называем такую систему окрестностей: пока точка x принадлежит лишь одному из M_i, то без оговорок, а если $x \in M_1 \cap M_2$, то с оговоркой, что речь идет об интервале, гарантированном аксиомой ТК$_4$. Так же поступаем в случае, когда задано конечное семейство множеств M_i, каждое со своим отношением порядка $<_i$. Для случая бесконечного и несчетного семейства M_α аксиома ТК$_4$ перередактируется тривиально, но громоздко. Впрочем, несчетный случай у нас будет исключен аксиомой ТК$_6$ в § 4.1.

Вот пример локального задания строгого порядка посредством трех множеств. Рассмотрим лист Мёбиуса, т.е. факторизуем $\{(t,x)\}$ по отношению эквивалентности $(t,\ x)$ ~ $\left((-1)^k t, x+k\right)$, $k \in N$. Пусть $M_1 = \left\{(t,x)\ \middle|\ 0 < x < \frac{2}{3}\right\}$, $M_2 = \left\{(t,x)\ \middle|\ \frac{1}{3} < x < 1\right\}$ и $M_3 = \left\{(t,x)\ \middle|\ \frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}\right\}$

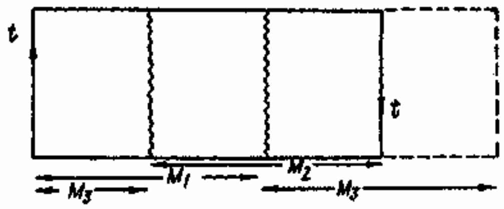


Рис. 9

Порядки зададим так: (см. рис. 9):

$$\begin{aligned}
&(t, x) <_1 (t', x')\colon \Leftrightarrow t' - t > | x' - x| \\
&(t, x) <_2 (t', x')\colon \Leftrightarrow t' - t > | x' - x| \\
&(t, x) <_3 (t', x')\colon \Leftrightarrow t - t' > | x' - x|
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Тогда на полосе $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ порядок $<_2$ совпадает с $<_1$, на полосе $\frac{2}{3} < x < 1$ порядок $<_3$ противоположен $<_2$, на полосе $1 < x < \frac{4}{3}$ (т.е. $0 < x < \frac{1}{3}$) порядок $<_3$ совпадает с $<_1$ Этот способ упорядочивания не накрывается, конечно, ОДНИМ отношением строгого порядка, но не накрывается он и отношением локального следования, как видно из следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 1. Пусть на $\cup(\mathrm{M}_i, <i)$ выполнены аксиомы ТК$_{1\text{-}4}$. Тогда для того, чтобы на $\cup M_i$ можно было задать отношение локального следования $\prec$, которое на одном из M_i локально совпадает с $<_\mathrm{i}$, а на остальных M_K $(k \neq i)$ совпадает с $<_k$ или с обратным к $<_\mathrm{k}$ порядком, — необходимо и достаточно, чтобы некоторые из порядков $<_\mathrm{k}$ $(k \neq i)$ можно было бы обратить (т.е. перейти к порядку $x <_\mathrm{k} y \Leftrightarrow y <_k x$) так, чтобы относительно оставшихся исходных порядков и порядков обращенных аксиома ТК$_4$ выполнялась бы в более сильной формулировке, когда дизъюнкция «либо... либо...» заменена на первое утверждение в этой дизъюнкции.

Доказательство теоремы просто и может быть проведено читателем. Точно так же читатель может проверить, что упорядочение (1.3.1) не допускает выполнения такой усиленной формулировки.

Приведем пример невыполнения аксиомы ТК$_4$. Из плоскости t, x выбросим третий квадрант $t \leq 0$ & $x \leq 0$, а на оставшейся области зададим два множества $M_1 = \{(t,x)\ |x > 0\}$ и $M_2 = \{(t,x)\ |t > 0\}$ с порядками:

$$(t, x) <_1 (t', x'): \Leftrightarrow t' - t > 3|\,x' - x|$$

$$(t, x) <_2 (t', x'): \Leftrightarrow x' - x > 3|\,t' - t| \qquad (1.3.2)$$

см. рис.10. На пересечении $M_1 \cap M_2$, т.е. при $t > 0$ & $x > 0$, эти порядки никак не согласованы.

Чаще начинают не с множеств M_2, а с топологического пространства (M, T): тогда говорят про открытое покрытие $\omega : M \mapsto T$, и на каждом ωp, $p \in M$ заданным считается, строгий порядок $<_p$. На пересечении разных $\omega p \cap \omega q$ порядки согласованы аксиомой вроде ТК$_4$, см. [9]. Здесь мы предпочли не вводить топологию априорно, а получать ее из отношений рода порядка, но принципиального значения такая модификации не имеет.

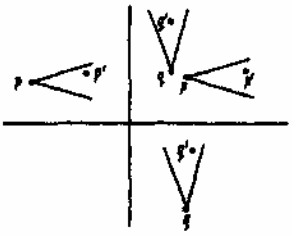


Рис.10.

Наконец, может случиться, что порядки на $\cup M_i$; никак не связаны между собой в том смысле, что M_i между собой попарно не пересекаются. Дабы исключить это усложнение, мы вводим аксиому.

ТК$_3$. Для любых пар точек $p, q \in \cup M$ найдется такая цепочка множеств (в упрошенном обозначении) $M_1. \dots , M_n$, что $p \in M_1$ $\& \ q \in M_n, \ \& \ 1 \leq k \leq n\text{-}1$ $\Rightarrow M_k \cap M_{k+1} \neq \varnothing$.

В более общем случае пришлось бы рассматривать несколько «компонент связности», не соотнесенных друг с другом.

4. ***Производные понятия первого уровня***. Уже введенных пяти аксиом (а при локальном изучении — только первых трех) достаточно, чтобы ввести ряд полезных в темпоральной теории понятий.

Мы уже говорили про будущее для события *p,* т.е. про p^+. Можно говорить про будущее А+ для множества *A,* это множество $\{x \ |\exists \alpha \in \text{А} \quad a < x\}$. Не всякая точка из A^+ следует за всякой точкой из *A,* но для всякой $p \in A^+$ найдется хоть одна точка $a \in A$, за которой *p* следует. И любая тачка *p*, следующая хоть за одной $a \in$ А, попадает в А$^+$. Само множество А как правило не попадает в A^+. Технически иногда полезно рассматривать А $\cup$ А$^+$, которое обозначается А$^{\oplus}$ и называется НАСЫЩЕНИЕМ множества А в будущее. Аналогично определяются А$^-$ и А$^-$.

Мы ввели топологию *T* и говорили уже о замыкании $\overline{A}$ множества А относительно интервальной топологии *T.* Можно говорить и о ГРАНИЦЕ ∂A относительно той же топологии. Чаще всего границу интерпретируют как «предельный сигнал», как «нематериальное воздействие», «световое воздействие»: об этом см. в § 3. Пока мы, не вдаваясь в интерпретацию, определим важное производное понятие: ОТНОШЕНИЕ ЗАМКНУТОГО СЛЕДОВАНИЯ $q \in \overline{p^+}$. Ясно, что если $p < q$, то $q \in p^+$ и потому $q \in \overline{p^+}$. Обратное неверно, хотя бы потому, что согласно аксиомам ТК$_{1—2}$, отношение $p < q$ открытое, а из $q \in \overline{p^+}$ следует $q \in p^+ \ \vee \ q \in \partial p^+$, но не $q \in p^+$, (легко видеть, что $p = p^+ \cup \partial p^+$, $p^+ = \cap\, \partial p^+ = \varnothing$). Вообще говоря, отношение $q \in \overline{p^+}$ не является отношением строгого порядка, даже если за исходное взято отношение строгого порядка <, а не локальное следование $\prec$. Но в силу ТК$_3$ оказывается, что отношение $q \in \overline{p^+}$ является отношением предпорядка и равносильно $q \in \overline{p^-}$. Предпорядок — это транзитивное бинарное отношение. Частный общеизвестный пример предпорядка есть отношение нестрогого порядка для чисел $\xi \le \eta \Leftrightarrow \xi < \eta \vee \xi = \eta$. Тогда $\xi \le \eta \,\&\, \xi < \eta \le \xi \Rightarrow \xi = \eta$. Но в общем случае предпорядка $\le$ из условия $x \le y \;\&\; y \le x$ не вытекает $x = y$, а множество таких пар гораздо богаче.

Отношение $q \in \overline{p^+} \;\&\; p \in \overline{p^+}$ оказывается отношением эквивалентности, причем выполняется.

ТЕОРЕМА 2. Множество точек x, для которых $x \in \overline{p^+} \;\&\; p \in \overline{x^+}$, совпадает со множеством $\overline{p^+} \cap \overline{p^-} = \partial p^+ \cap \partial p^-$ и совпадает с замыканием $\overline{p}$ точки p: см. [9], гл.2.

Таким образом, вообще говоря, интервальная топология T не очень сильна — замыкание одной точки иногда не состоит из одной этой точки. Об этом подробнее будет идти речь в гл.2—4. Но так как у нас отношение $x \in \overline{y}$ равносильно $y \in \overline{x}$ и является отношением эквивалентности, то по структуре (M, <) АВТОМАТИЧЕСКИ строится фактор-структура $\dfrac{M}{x \in \overline{y}}$, элементами которой являются замыкания точек. В гл.2 мы увидим, как выделяется при такой факторизации «линейно текущее время», а в гл.4 — как четко выделяются при такой факторизации электромагнитные явления. Познавательно это существенно вот в каком аспекте. В том случае, когда $\overline{p} = p$ (это будет случай гл. 3), вся теория темпорального универсума строится как теория структуры (M, <), т.е. ничего сверх отношения рода порядка НЕ ТРЕБУЕТСЯ ЗАРАНЕЕ. В случае же, когда интервальная топология оказывается неотделимой $\overline{p} \neq p$, для содержательного построения темпоральной теории требуется априори задавать помимо порядка < ЕЩЕ ТОПОЛОГИЮ T (уже не интервальную, а более сильную, нежели интервальная). Таким образом, предметом изучения становится структура

$$U = (M, <, T). \tag{1.4.1}$$

Именно так будет обстоять дело в гл.2 и 4. Говоря там о «непрерывности», мы будем иметь в виду топологию, более сильную, нежели интервальная.

Другое направление конструкций, где используются ∂A и $A^{\oplus}$ — это операция выпуклой оболочки множества А. По определениию это такая операция $H : 2^M \mapsto 2^M$ которая удовлетворяет аксиомам: $A \subset H(A)$, $H(H(A) = H(A)$ и $A \subset B \Rightarrow H(A) \subset H(B)$. Оказывается, что операция Н: $A \mapsto A^{\oplus}$ удовлетворяет этим аксиомам, следовательно, во всяком упорядоченном множестве $(M, <)$ автоматически возникает выпуклая структура (M, H), и даже две, ибо тем же аксиомам удовлетворяет $H^{-} : A \mapsto A^{=}$. Это очень плохая выпуклость, потому что выпуклая оболочка одной точки $x \in M$ не совпадает никогда с самой точкой, $H(x) = x \cup x^{+} \neq x$, а кроме того практически у всяких разных двух точек их выпуклые оболочки пересекаются, $x^{+} \cap y^{+} \neq 0$. Однако даже такая выпуклость оказывается полезной, потому что применима часть аппарата теории выпуклых множеств: в частности, верна.

ТЕОРЕМА 3. Множества ∂p^{+}, ∂p^{-}, ∂A^{+} и другие границы важных в теории темпорального универсума множеств являются ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ для структур выпуклости H и H^{-}.

Кроме того, возможен и обратный подход: начиная со структуры выпуклости на множестве (заданной аксиоматически), можно ввести на том же множестве отношение строгого порядка.

Операции границы и замыкания, перенесенные на множество пар $M \times M$, позволяют определить понятие УСТОЙЧИВОГО ПОРЯДКА. В $M \times M$

естественно возникает топология $T \times T$, далее мы имеем в виду ее. Кроме того, в $M \times M$ имеется подмножество $A = \{(x, y) \,|x < y\}$. Рассматриваем класс *K* отношений порядка $<'$ такой, что среди $\{<'\}$ содержится и $<$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Говорим, что некоторое свойство (предикат) отношения порядка < устойчиво в классе *K,* если найдется такая окрестность V_A множества $\overline{A}$, что для всех $<' \in K$, соответствующий множества $\overline{A'}$ которых содержатся в V_A, это свойство выполняется.

В частности, оказывается, что такое свойство, как «не существует замкнутой цепочки точек $p_1 \prec p_2 \prec \dots \prec p_1$», — НЕ УСТОЙЧИВО, см. [17], гл.6.

С отношением порядка (точнее, « предпорядка) тесно связано понятие квазиравномерной (полуравномерной, семи-равномерной, семи-униформной) структуры. Именно, квазиравномерная структура *S* на *M* есть некоторый фильтр на *M*, содержащий диагональ в $M \times M$ и удовлетворяющий условию $\forall \vee \in S \exists W \in S \quad WoW \subset \vee$. Так вот, отношение предпорядка ≤ возникает, если положить $x \leq y$ при

(x, y) $\in \cap$, где $\cap$ — пересечение всех множеств из фильтра *S*. По-видимому, эта связь (равно как и обратная от предпорядка к квазиравномерной структуре) подмечена впервые Начбином. Мы этими вопросами здесь заниматься не будем.

Названными здесь понятиями и конструкциями не исчерпываются все производные понятия на первом уровне рассмотрения, но самое важное из таких понятий — линейно-упорядоченное множество точек — удобнее рассмотреть в отдельной главе, см. гл.2.

§ 2. ВТОРОЙ УРОВЕНЬ ИЗУЧЕНИЯ — ГЛАДКОСТЬ

1°. ***Появление конуса в касательном пространстве***. В § 1 описано все, что требуется для содержательного изучения темпоральных проблем, за исключением лишь проблемы интерпретации, о которой см. § 3. Для облегчения понимания нашего текста теми читателями, которые знакомы с постановкой вопросов в Терминологии теории относительности, т.е. на втором или третьем уровне изучения, наметим способ; как спускаться с нашего верхнего, абстрактного уровня ко второму, более сложному, но зато более конкретному и общеизвестному уровню. При этом отметим, какие структуры ПОРОЖДАЮТСЯ порядком, а какие НЕ ПОРОЖДАЮТСЯ.

На втором уровне главным инструментом служит касательное пространство. Дабы можно было о нам говорить, нужно рассматривать не просто топологическое пространство (M,T), а совместно с множеством R вещественных чисел[3], т.е. структуру (M, T, R). Именно, R входит в определение топологического многообразия M_n (число n, называемое размерностью многообразия M_n, одно и то же для всех точек $p \in M$): у всякой точки p должна существовать окрестности гомеоморфная R^n. Понятие R входит и в само определение гладкости F через множество R^M отображений из M в R). Именно, требуется, чтобы среди всех непрерывных отображений из M в R существовало бы и среди всех существующих было бы выделено семейство F_+ обладающее определенными аксиоматическими свойствами. Это семейство F называется «гладкостью», или «классом гладких функций», или «семейством бесконечно-дифференцируемых функций», или «$C^{\circ\circ}$ -- структурой на M». Заметим, что поскольку топология T» задана с самого начала, постольку все использованные термины «непрерывный»,

---

[3] Оговаривать это приходится, в частности, из-за распространения теории нестандартных вещественных чисел.

«гомеоморфный», «окрестность» корректны. После того, как класс P выделен, т.е. после того, как мы перешли к структуре (M, T, R, F), в каждой точке $p \in M$ выделяются из F те $f \in F$, для которых область задания $\alpha_{\mathrm{om}} f$ содержит точку p : множество таких функций обозначается F. Затем рассматриваются операторы $X : F_p \mapsto R$, удовлетворяющие известным требованиям и называемые операторами дифференцирования функций $f \in F_p$. Эти операторы и образуют то, что называется касательным в p пространством $T_P M$ к гладкому многообразию $\mathrm{M}_\cap = (M, T, R, F)$/ Удобство касательного пространства в том, что оно оказывается n-мерным векторным пространством E_n. Поэтому все рассуждения и результаты на втором уровне рассмотрения выглядят как рассуждения о семействе векторных пространств, где каждое пространство «занумеровано» какой-то точкой $p \in M$.

Ясно, что в рамках этого подхода совершенно несущественны глобальные тонкости § 1.2—3, а достаточно рассмотреть одно отношение строгого порядка $<$ на достаточно малой окрестности точки p. По $<$ мы получали интервальную топологию. Как отмечалось в § 1.4, иногда в ней $\bar{p} \neq p$ (конкретнее см. § 6.3 и § 12.3). Для определения топологического многообразия такая топология не годится, поэтому в общем случае надо исходить не из $(M, <, R, F)$, а из $(M, T, <, R, F)$, где T и $<$ заданы первично и независимо от прочих структур, хотя и в определенном согласовании, см. [9]. Из-за наличия $<$ мы получаем кое-что добавочное сравнительно со сказанным в предыдущем абзаце про гладкость вообще. Именно, среди всех непрерывных функций $f : M \Rightarrow R$ естественно выделяются изотопные (строго возрастающие) функции, для которых

$$p < q \Rightarrow f(p) < f(q) \qquad (2.1.1)$$

Очевидно, что они образуют клин, т.е. конус с не одноточечной вершиной. Тем самым из множества всех операторов дифференцирования $X \in T_p M$ выделяются некоторые — те, которые па этих изотопных $f \in F_p$ дают неотрицательное число («производная не убывает»):

$$Xf \geq 0. \qquad (2.1.2)$$

Очевидно, что эти операторы (которые мы станем называть положительными или неотрицательными операторами), сами образуют клин:

$$\lambda, \mu > 0 \ \& \ Xf \geq 0 \ \& \ Yf \geq 0 \Rightarrow (\lambda X + \mu Y)f \geq 0 \qquad (2.1.3)$$

Клин в n-мерном векторном пространстве может быть неудобным, может обладать пустой внутренностью, например, это (n-мерный конус, причем $m < n$. Так, в гл. 4 мы увидим, что клин изотопных функций образует 4-мерный конус пространствовремени в 5-мерном пространствовремени-электричестве. Напротив, клин может быть «слишком большим», например, состоять из целого полупространства. Так, в гл.2 мы увидим, что в ньютоновом пространство-времени клин из таких положительных операторов дифференцирования заполняет всё полупространство $t > 0$. В наиболее распространенном случае пространствовремени общей теории относительности таких патологий не возникает. В гл. 3 мы сформулируем аксиомы гладких кинематик, при выполнении которых получим в касательном векторном пространстве определенный открытый выпуклый конус с одноточечной вершиной: этот конус мы обозначим $\mathrm{O_p}^+$. Он называется «конусом будущего» для касательного пространства T_pM, а, точнее, его следовало бы называть КОНУСОМ БЕСКОНЕЧНО МАЛОГО БУДУЩЕГО, потому что он совсем другое, нежели будущее p^+ для точки p. Симметричный ему относительно вершины (нуля) конус $O_p{}^+ = -O_{\ p}{}^+$ называется конусом прошлого для касательного пространства. В том частном случае, когда дополнительно требуется высокая степень симметрии, конус этот будет сферическим: это почти то самое, что обычно известно под названием «пространствовремя общей теории относительности» (почему «почти» — см. в следующих рубриках). Если же конус симметриями не обладает или же обладает не в полной мере, то получаем «почти» финслерову кинематику. Существо описанного перехода с первого уровня на второй заключается в том, что в рамках упорядоченной структуры мы должны и рассматриваемые функции мыслить как морфизмы порядка. А выделение среди всех функций R^M таких, которые сохраняют порядок, сразу же выделяет в пространстве градиентов (дифференциалов) функций определенный конус градиентов, называемых положительными. В каждой точке $p \in M$ для касательного пространства T_PM указан, таким образом, переход от минуса к плюсу, некий класс направлений, по которым этот переход осуществляется.

Переход со второго уровня на третий почти банален. Ведь третий уровень предполагает наличие абсолютного параллелизма в многообразии (M, T, R, F), а, точнее, в пространстве аффинной связности (M, T, R, F, ∇), где ∇ — то, что называется «аффинной связностью» (иначе «ковариантное дифференцирование», «абсолютное дифференцирование», «линейная связность»). Абсолютный параллелизм — это случай, когда ковариантные дифференцирования по любым двум направлениям коммутируют: $\nabla_1 \nabla_2 = \nabla_2 \nabla_1$. Так вот, в этом случае все конусы O_p^+ в разных точках оказываются одинаковыми — с точностью до абсолютно-параллельного переноса. Эта ситуация, соответствующая специальной теории относительности (с одним уточнением, о котором речь в рубриках 3° — 5°), если этот конус сферический: она соответствует ситуации анизотропного пространствовремени, если конус не приводится к сферическому.

2°. ***Структура углов (скоростей)***. Как только среди всех векторов $X \in T_p M$ (при фиксированной $p \in M$) выделены ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ векторы $X \in O_p^+$, так сразу на множестве всех пар векторов однозначно определяется УГЛОВАЯ СТРУКТУРА. В следующей рубрике это будет показано «конформными» методами, а здесь — «проективными». Рассмотрим два вектора $X, Y \in O_p^+ \subset T_pM$. Несущие их прямые отмечают пару точек на бесконечно-удаленной прямой, имеющейся в 2-плоскости, задаваемой этою парою векторов. Кроме того, на той же 2-плоскости выделяется пересечение этой плоскости с границей $\partial\ O_p^+$ конуса O_p^+: говоря о плоскости, мы это пересечение будем обозначать просто $\partial\ O_p^+$. Если конус не вырожден, то таких точек пересечения две, в вырожденном случае может быть одна точка. В невырожденном случае ранее указанные прямые отмечают еще две точки на бесконечно удаленной прямой. Поэтому соответствующее двойное отношение (точнее, его логарифм, потому что двойное отношение есть мера мультипликативная, а логарифм — аддитивная) в невырожденном случае определяет «гиперболическую» аддитивную меру на парах векторов, т.е. УГОЛ. В том случае вырождения, когда $\partial\ O_p^+$ — одна двойная прямая, эта мера (угол) также существует и является параболической.

Из простейших тригонометрических соотношений легко устанавливается, что в вырожденном случае сам угол φ связан с тем, что называется «скоростью» $\vee = \frac{dx}{dt}$ соотношением

$$\vee = \alpha\varphi, \qquad \alpha = \text{const}, \tag{2.2.1}$$

а в невырожденном

$$\frac{\vee}{c} = th\varphi, \qquad \text{c} = \text{const}, \tag{2.2.2}$$

где th — тангенс гиперболический. Эддингтон предлагал называть в формуле (2.2.2) угол «быстротой», но это название не прижилось. Быстрота, как и скорость в ньютоново-галилеевой кинематике, изменяется от — ∞ до ∞ и аддитивна (складывается при объединении движений).

С познавательной точки зрения самое важное то, что при задании структуры порядка в гладком многообразии M в его касательном пространстве $T_p\ M$ уже возникает однозначно определенная структура углов между векторами, а потому и углов между кривыми (где угол вводится обычно как угол между касательными к кривым). Заданием граничных направлений ∂O_p^+ на бесконечно-удаленной 2-плоскости определяется то, что в проективном мероопределении называется «абсолютом». В § 8.7 будет показано, насколько существенна тут презумпция гладкости.

3. Метрический тензор и структура порядка. Чаще всего на втором уровне рассмотрения говорят не о порядке <, не об углах, а о «метрике», имея в виду метрический тензор $g_{ik}(p)$. В какой мере заданием порядка < предопределяется метрическая структура? Не в полной, хотя определенные условия налагает. И в зависимости от того, какой возникает конус положительных векторов, — различен произвол в задании метрики.

Дабы это прояснить, напомним, как возникает метрика $g_{ik}(p)$ по конусу O_p^+. В специальной и общей теории относительности имеется конус — круговой конус, граница которого в подходящих координатах (координаты либо в M либо в T_pM соответственно) задается уравнением

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \qquad (2.3.1)$$

а в произвольных координатах задается уравнением

$$g_{ik}(p)\, X^i X^k = 0 \qquad (2.3.2)$$

где стоящая слева квадратичная форма имеет сигнатуру (+ - … -), т.е. допускает приведение к виду (2.3.1). Поэтому, ЕСЛИ ЗАРАНЕЕ ПРЕДПОЛАГАЕТСЯ, ЧТО I1РОСТРАНСТВОВРЕМЯ ОПИСЫВАЕТСЯ АППАРАТОМ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ, то наличие конуса O_p^+ позволяет отождествить его границу с (2.3.2), а тем самым получить метрический тензор $g_{ik}(p)$ с очевидным произволом в вида скалярного множителя:

$$g_{ik}(p) \mapsto \lambda(p)\, g_{ik}(p), \qquad \lambda > 0 \qquad (2.3.3)$$

Преобразование (2.3.3), с точностью до которого задается метрика в римановом случае, называется конформным преобразованием. Поэтому структура порядка задает (в презумпции римановости) конформную структуру на многообразии. Здесь следует предостеречь против недоразумения. Чаше всего конформную структуру вводят, начиная с эвклидовой, т.е., с положительно определенной метрики: тогда достаточно добавить одну единственную точку — бесконечно удаленную. В случае переменной по знаку метрики вещественное, мнимое и нулевое направления существенно неравноправны (не могут быть переведены одно в другое автоморфизмами), поэтому нельзя обойтись добавлением ОДНОЙ и той же бесконечно удаленной точки для всех направлении. Надо добавлять больше точек, а это часто забывают.

Конформной структурой однозначно определяется угол, о котором шла речь в предыдущей рубрике. Именно, косинус гиперболический этого угла задается известной формулой:

$$ch\varphi = \frac{g_{ik}X^iY^k}{\sqrt{g_{ik}X^iX^k}\sqrt{g_{ik}Y^iY^k}} \qquad (2.3.4)$$

и очевидно, что при умножении метрики на λ угол не меняется.

Так обстоит дело, когда конус не вырожденный и допускает риманову геометрию. Если конус O_p^+ вырожденный, например, обращается в полупространство, то, конечно, никакой квадратичной формы (2.3.2) не задать: это ситуация гл. 2. Если вырождение более слабое, то конусом O_p^+ частично определяется метрика, но полное описание метрических соотношений возможно лишь при обогащении структуры дополнительно структурою полуримановой геометрии: это ситуация гл. 4. Но даже если конус не вырожденный (ситуация гл. 3), неприятности все равно возможны. Именно, этот конус может быть АНИЗОТРОПНЫМ, т.е. разным по разным направлениям, например, быть не круговым, а квадратным. В этом — называемом «финслеровым» — случае уравнение. (2.3.2) заменяется внешне похожим:

$$g_{ik}(p, X)\, X^i X^k = 0 \qquad (2.3.5)$$

но здесь $g_{ik}(p, X)$ зависит не только от точки $p \in M$, но еще от направления (вектора $X \in T_pM$). И — самое неприятное — в финслеровом случае ОДИН И ТОТ ЖЕ КОНУС может задаваться РАЗНЫМИ финслеровыми тензорами $g_{ik}(p, X)$ и $h_{ik}(p, X)$ между которыми нет соотношения к $h = \lambda g$: см. (9.5.5), (9.5.6), (9.6.1). С формулой (2.3.4) тут тоже имеются сложности, хотя угол тут все-таки определяется однозначно, см. (9.5.3). Даже в том случае, когда конус O_p^+ круговой, финслеров тензор, задающий его, определяется существенно неоднозначно (см. 89.8), вот почему выше мы так подчеркивали презумпцию римановости.

4°. ***Структура объема***. На всяком гладком многообразии, даже лишенном метрики или порядка, можно ввести структуру объема, хотя локально, но, конечно, не единственным образом. Для этого в n-мерном пространстве $T_\mathrm{p}M$ посредством операции косого (внешнего) умножения вводят n-векторы $X_1{}^\wedge ...{}^\wedge X_n$, т.е. элементы из n-ой внешней степени пространства TM (подпространства грассманова пространства) $\wedge :=_1^n \wedge TM = TM \wedge ... \wedge TM$ в числе n-множителей. Рассматривают некоторое отображение $\vee : \wedge \mapsto R$, и его значение называют ОБЪЕМОМ $\vee := \vee(X_1 \wedge ... \wedge X_n)$ параллелепипеда, натянутого на n-векторов $X_1, ..., X_n$. Это отображение осуществляется n-вектором, т.е. вполне кососимметрическим тензором $\varepsilon_{i_1 ... i_n}$, который в физике часто называется «псевдоскпляром». Если в пространстве уже введена метрика g_{ik}, то описанное отображение единственно и задается известной формулой:

$$\vee\ (X_1 \wedge ... \wedge X_n) = g_{i_1 k_1} \wedge ... \wedge g_{i_{n1} k_n} X_1^{i_1} ... X_n^{i_n} X_1^{k_1} ... X_n^{k_n} =$$

$$= g_{i_1 k_1} ... g_{i_{n1} k_n}\ X_1^{i_1} \wedge ... \wedge X_n^{i_n} X_1^{k_1} \wedge ... \wedge X_n^{k_n} \qquad (2.4.1)$$

Отсюда уже ясно, что конформная структура не задает структуры объема. Но ясно также и то, что верна

ТЕОРЕМА 4. При задании структуры порядка и структуры объема риманов метрический тензор (если его допускает структура порядка) определяется однозначно. Иными словами, структура порядка задает (в римановом случае) метрическую структуру однозначно с точностью до объема.

5º. Структура аффинной связности. На втором уровне рассмотрения всегда фигурирует — явно или подразумеваемо — еще структура аффинной связности Γ^i_{jk} или, что то же, операция ковариантного дифференцирования ∇. Она в подразумеваемом варианте вводится условием:

$$\nabla g_{ik} = 0 \qquad (2.5.1)$$

Так согласованная с римановой метрикой связность называется РИМАНОВОЙ СВЯЗНОСТЬЮ, а если в (2.5.1) стоит финслерова метрика, то финслер-аффнннная связность называется обычно КАРТАНОВОЙ, Благодаря связности можно говорить о параллельном переносе вектора вдоль пути, определять, как сравнивать, насколько повернулся вектор при обносе по замкнутому контуру, дифференцировать («ковариантно» или «абсолютно») Векторы и тензоры, выделить класс «прямейших» кривых («геодезических») и т.п. Через связность строится такой объект, как риманова кривизна и финслеровы кривизны. По метрике связность задается однозначно, по связности метрика — неоднозначно.

И здесь структура порядка существенно понижает степень произвола-неоднозначности. Именно, согласование связности ∇ с порядком $<$ по определению означает, что при параллельном в смысле этой связности переносе вектора $X_p \in T_p M$ по любому пути в точку $g \in M$ получаемый вектор $X_g \in T_q M$ удовлетворяет условию:

$$X_p \in O_p^+ \Leftrightarrow X_q \in O_p^+ \qquad (2.5.2)$$

В частности, если бы он был «световой», то «световым» и останется:

$$X_p \in \partial O_p^+ \Leftrightarrow X_q \in \partial O_p^+ \qquad (2.5.3)$$

Тогда выполняется:

ТЕОРЕМА 5. Для связностей, согласующихся с данным порядком, компоненты Γ^i_{jk} связностей преобразуются в классе преобразований (в одной и той же координатной системе) так:

$$\Gamma_{ijk}(p) \mapsto \lambda(p)\Gamma_{ijk}(p) + g_{jk}(p)\partial_i\lambda(p) \qquad (2.5.4)$$

где $\lambda(p) > 0$ — произвольная функция.

Читатель, знакомый с уравнениями геодезических, увидит, что при одном и том же порядке возможны различные геодезические. Даже уравнения световых геодезических могут различаться.

Априорное задание связности налагает известные ограничения на допустимую метрику, согласованную с этой связностью по (2.5.1): говоря технически, из бесконечномерного пространства метрик выделяется конечномерное. Задание же априори порядка налагает на допустимую метрику, согласованную с этим порядком, еще более сильные ограничения: говоря технически, остается одномерное пространство метрик. Проиллюстрируем это на двумерном случае. Если задана связность с абсолютным параллелизмом, то метрику можно в некоторой карте записать в виде $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, но и метрика с матрицей $\begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$ при $\lambda \neq 1$, $\mu \neq \pm 1$, $\nu \neq 0$ (лишь бы сигнатура сохранялась) согласуется с той же связностью. Если же задан порядок, то метрика в некоторой карте имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$и с тем же порядком согласуется только метрика вида $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$, так что степень произвола меньше. Алгебраически это обусловлено только видом сигнатуры (+ - … -). Уже для (++ - ... -) не так.

А при такой — единственно согласованной с наличием конуса — сигнатуре алгебраическое своеобразие состоит вот в чем. Метрика g_{ik} определяет известное отношение ортогональности $g_{ik}\ X^iY^k = 0,$ т.е. определяется плоскость тех векторов Y, которые ортогональны вектору X. При этом домножение g_{ik} на произвольное λ ничего не меняет. Ясно и обратное: наличие ортогональности задаст метрику g_{ik} с точностью до произвольного множителя λ: это устанавливается, по сути, рассуждениями § 2.2, только в проективных терминах говорили «поляритет», а в алгебраических «ортогоналитет»). Рассмотрим теперь (для простоты на третьем уровне) пару точек $p < g$ и множество $\partial p^{+} \cap \partial g^{-}$. Оказывается, что, если конус сферический, то это множество целиком лежит в одной плоскости, которая в метрическом смысле ортогональна прямой pg. Следовательно, наличие сферического конуса приводит к однозначному появлению ортогональности, а последнее — к метрике.

Разумеется, всё сказанное в рубриках 3—5 значительно осложняется для анизотропного финслерова случая: см. § 8.3, § 9.5, § 9.6.

Терминологически мы различаем случай ГЛАДКИХ КИНЕМАТИК, в которых задан (в каждой точке и гладко) невырожденный конус O_p^{+}, и РИМАНОВЫХ КИНЕМАТИК, в которых сверх конуса задана еще риманова метрика $g_{ik}(p)$, согласованная с O_p^{+}, а также ФИНСЛЕРОВЫХ КИНЕМАТИК, в которых эта метрика $g_{ik}(p, X)$, не риманова, а финслерова. В двух последних случаях объемы и связности определяются однозначно.

6º. Устойчивость на втором уровне. Когда задана метрика g_{ik}, то под устойчивостью того или иного свойства, выражающегося через g_{ik} понимают £J7] следующее:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Говорят, что метрическое свойство H устойчиво, если в пространстве $T_p^{*}M \times T_p^{*}M$ у точки $g_{ik}(p) \in T_p^{*}M \times T_p^{*}M$ существует окрестность $\vee$ такая, что для всякого $g_{ik}(p) \in \vee$ свойство H выполняется.

Отчетливо видно, как модифицировано определение 3 при переходе на тот уровень рассмотрения, где имеется касательное пространство, фигурировавший там «класс K» здесь подразумевается в неявном виде как те отношения $<'$ на M, которые определяются через метрику g'_{ik}. Как конкретно — см. § 9.7.

§ 3. ПРОБЛЕМЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

1°. Понятие содержательной интерпретации. Всякой формальной теории отвечает более или менее нечеткий процесс «содержательной интерпретации». Дабы лучше прояснить смысл, который мы вкладываем в это словосочетание, сделаем некоторое философское отступление.

Распространено мнение, будто бы наука «отражает» известные ей свойства («стороны») реального мира. Особенно часто пишут, будто бы физико-математические науки отражают свойства физической реальности. Мы не придерживаемся сего взгляда» Наука ничего не отражает — она освещает. Именно, математика создает понятийные конструкты (конструкции). Эти конструкты могут быть плодом выполнения прикладного заказа на устранение флаттера при полете самолета (Келдыш), могут родиться как ответ на психологически-религиозную потребность постигнуть, как это в Святой Троице «один равно трем» (Кантор), могут быть вызваны военно-инженерными потребностями в дескрипции крепостей (Монж), могут появиться из желания «устранить всякие пятна на Эвклиде» (Лобачевский). Откуда и почему берутся сюжеты в математике — бесконечное поле работы для психологов и историков математики. Но, будучи раз созданными по своим формальным, аксиоматическим или конструктивистским критериям, понятийные конструкты иногда позволяют взглянуть цельным нераздробленным взглядом на ту или иную совокупность эмпирических материалов. Понятийные конструкты дают ПРОВЕРЕННЫЙ НА НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ЯЗЫК для изложения этих материалов. Это вроде как фонарь на улице: он позволяет отчетливо разглядеть, не шаря руками, где калитка и запор на калитке, отличить лужу от опавших листьев, найти, наконец, оброненный ключ — если обронил под фонарем... А без фонаря, в свете одних вечных звезд, вместо всего этого видишь какие-то тени, расплывающиеся очертания, натыкаешься в черноте на что-то твердое. Конечно, фонарь на улице ничем не поможет заблудившемуся в лесу (разве что когда тот пробьется на опушку): впрочем, и в этой ситуации фонарь может помочь обеспокоенным родственникам заблудившегося: поскорее созвать спасателей. Так и математические конструкции сами по себе не отражают НИКАКОЙ РЕАЛЬНОСТИ, даже если они сформулированы в житейски-физических терминах «прямая», «расстояние», «объем». Некоторые из обстоятельств удачно освещаются сими конструкциями, хорошо укладываются в язык понятий, объектов, отношений, аксиом и теорем. Другие — остаются необустроенными. Математик отвечает только за то, чтобы горел фонарь непротиворечивости, а за материал, освещаемый фонарем, он ответственности не несет.

Такому «освещению» отвечает процесс содержательной интерпретации, см. [19]. Тем или иным понятийным, математическим конструкциям придается значение житейских предметов, операций с конкретными вещами, мысленных экспериментов с физическими объектами. Например, «точка» истолковывается как «песчинка», «прямая» — как «натянутая веревка», «объем» — как срок, на который хватает картошки в ведре этого объема. Некоторые из предложенных толкований допускают устойчивое последовательное употребление, нуждаясь разве что в «уточняющих» поправках: «очень мелкая песчинка», «пылинка», «такая кроха, что и формы ее не видать», «очень тонкая и сколько угодно длинная веревка», и т.п. Иные же из толкований годны на разовое употребление, скорее оказываясь метафорами, нежели терминами для систематического словоупотребления. Когда удается установить приемлемое взаимно-однозначное, систематическое и принудительное соответствие между ВСЕМИ терминами понятийного конструкта и определенным набором обстоятельств, предметов, процессов, данных, — тогда говорят об ИНТЕРПРЕТАЦИИ. Это соответствие может оказаться ЗАФИКСИРОВАНО явным словарем соответствия (как сделано, например, в [9], может ПОДРАЗУМЕВАТЬСЯ, может выражаться репликами и покачиваниями головой при докладах на семинарах. Всегда содержательная интерпретация заключается в условном соответствии между строгим формальным языком — и несколько расплывчатым языком из той или иной области деятельности.

2°. «Раньше — позже». Наша интерпретация будет основана на замене формального символа «$a < b$» или «$a \prec b$» выражением «*a* раньше, чем *в*». Слово «раньше» лишено в этой фразе количественного оттенка («раньше на пять минут», «раньше на столетие»), оно передает чисто качественное отношение. При этом подразумевается, что «*a*» — есть «мгновенное событие», такое же крохотное по объему и длительности, как «самая мельчайшая песчинка, только сверкнувшая на солнце». То же относится и к «*b*». Работая в теории множеств, мы мыслим *a* и *b* в каком-то смысле равноправными, обезличенными, проявляющимися только статусом мысленного существования — т.е. актом умственного выделения этих «мгновений» из джунглей «всего, что происходит и что померещится». Такое представление-описание посредством точек из множества — распространено очень широко, и задерживаться на нем едва ли уместно. Специфичным для нас является именно РАНЬШЕ—ПОЗЖЕ. Точечный, мгновенный характер «*a*» исключает двусмыслицы бытового словоупотребления вроде такой: отцы обычно раньше детей, но бывает, что отцы переживают своих детей (и в смысле физического существования и в смысле посмертной славы). Но точечный характер события *a* не исключает, что с ним может быть связано МНОГОЕ. Например, «*a*», может быть событием полудня в Петропавловской крепости: тогда с «*a*» связан пушечный выстрел и связана встреча двоих влюбленных, договорившихся в полдень там сойтись. В механике, как правило, событием *a* считается мгновение жизни так называемой «материальной точки»: с этим связаны его календарная дата, его координаты в пространстве, масса этой точки, ее заряд, температура, теплопроводность, сила притягивающая или вращающая. Словом, «самая мельчайшая пылинка в один из мигов ее кружения» может обладать огромным запасом характеристик-параметров. Отношение «раньше—позже» означает, что те или иные значения параметров — не обязательно тех же самых — у *a* могут оказывать воздействие на те или иные значения параметров у *b*. Именно поэтому построение теории на основе отношения, а $< b$ называется чаще всего «каузальным подходом», подходом посредством «причинности».

Иногда предлагались названия типа «хроногеаметрия», «хронометрия», но всеобщего распространения эти термины не получили.

«Причинность», «причина» — сложные понятия, и не входит в наши задачи полностью обрисовывать способы их словоупотребления. Нам достаточно помнить, что «причина» всегда мыслится предшествующей «результату»: если «причина» лежит в будущем, то она обычно именуется «целью», и мы не занимаемся телеологической фразеологией. Итак, «причина» предшествует «следствию». Эта фразеология веками принята в физике и юриспруденции. Но термин «причина» ясен и прост только в исключительных случаях. Иванов умышленно и тайком подсыпал цианистый калий в бокал Сидорова — причина смерти Сидорова однозначна. Но если Сидоров пал, прогоняемый сквозь строй шпицрутенов, то кто был причиной его смерти? Последний ли Иванов, хлестнувший еще живого Сидорова? Или первый, открывший экзекуцию? Или врач, вовремя не остановивший? Или генерал-губернатор, конфирмовавший приговор? Или закон? Или сам Сидоров, обокравший склад и поджегший его в надежде замести следы? Тут мы вступаем в область недостаточности аристотелевой терминологии. Удовлетворительнее говорить о ФАКТОРАХ, действующих или проявляющихся в «*a*»: эти факторы каждый порознь так или иначе воздействуют на происходящее в «*b*», но определяют «следствие» или «результат» не каждый порознь, а. лишь всею своею совокупностью, причем в «*b*» могут присутствовать и другие еще факторы, которых вовсе не существовало в «a». Таким образом, «$a < b$» отражает лишь частичное потенциальное причинное воздействие из a. на b.

Наша основная метатеоретическая гипотеза состоит в том, что терминология «раньше—позже» и идея «частичного потенциального причинного воздействия» являются НЕУСТРАНИМЫМИ для всякой темпоральной теории. Любое рассуждение о «времени», о темпоральных моделях, о пространство-времени, об измерениях временных промежутков — включает в себя «раньше—позже». Автор был бы признателен всякому критику, который предъявил бы рассуждение о времени (а не о вечности), в котором вовсе ОТСУТСТВОВАЛО БЫ раньше—позже» (возможно, в превращенной форме). Но если наша гипотеза верна, то тогда делается естественным привлечь отношения рода порядка к построению темпоральных моделей: ведь «a» раньше «b», «b раньше c» в обычном словоупотреблении и для достаточно родственных событий a, b, c практически неизбежно означает, что «a раньше c». Следовательно, «раньше» выступает как отношение порядка. Конечно, для очень разнесенных во времени событий, для длинных цепочек $a_1 < a_2 < \ldots < a_{1000000} < \ldots < a_n$ иногда слова «a_1 было причиной для a_n» оказываются содержательно бессмысленными. Примером тому — цветок, раздавленный динозавром миллион лот назад и оказавшийся причиной избрания другого президента США, как в одном из рассказов Брэдбери. Для устранения таких несуразиц мы используем отношение локального следования, которым могут быть связаны только БЛИЗКИЕ — в каком-то смысле — события: см. § 1.2. Используем локальное задание порядка, как описано в § 1.3,

3°. Темпоральныйуниверсум. В своих дальнейших рассуждениях мы будем всегда иметь в виду некоторый ТЕМПОРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСУМ, т.е. некоторое множество U с одним или несколькими отношениями рода порядка, заданными согласно аксиомам ТК$_{1—5}$ «Универсум» хорошее слово для обозначения «всего того, что имеется в виду в данном рассуждении или в данной системе рассуждений». Универсум, конечно, есть ПЕРЕМЕННОЕ понятие: универсумом может служить совокупность всех событий, случившихся на Земле, и универсумом может служить вовсе нам неведомая совокупность всех событии, произошедших в туманности Андромеда в течение нашего земного XX века... Универсумом может быть и вполне умозрительное образование: модель, удовлетворяющая галилеевско-ньютоновским пространственно-временным постулатам. Для темпорального универсума существенно присутствие отношени$_я$ рода порядка.

Прежде всего, вместо «темпоральный универсум» я говорил «топологическая кинематика». Точнее, сначала я писал «топологическое пространство кинематического типа», а при переводе моей книги на английский язык это длинное выражение сократили (без моего ведома) до «топологическая кинематика». Я принял его и далее пользовался им. Ведь в специально математическом трактате не имеет значения, как назвать тот или иной конструкт. Но так как я предполагаю круг читателей этой книги более широким, чем математики, то здесь я предпочитаю использовать для обозначения того же объекта более эмоциональный термин «темпоральный универсум».

4^o. Перевод терминов на содержательный язык. Итак, U, состоит из одного или конечного числа множеств M, на каждом из которых введено отношение строгого порядка $<_i$, которые согласованы друг с другом по правилам аксиомы ТК$_4$. Никакой другой роли, кроме согласования локально-заданных «раньше—позже», согласования на ОБЩИХ областях действия, аксиома ТК не играет, а аксиома ТК$_5$ гарантирует возможность такого согласования. Как видно из теоремы 1, в широком классе случаев можно вместо нескольких отношений строгого порядка говорить об одном-единственном отношении локального следования.

Мы будем называть темпоральный универсум ПРИЧИННО-ПРОСТЕЙШИМ, если на всем U задано одно-единственное отношение строгого порядка. Как отмечено в § 1.2, тогда *U*, некомпактно. Мы будем говорить, что *U* — ТЕМПОРАЛЬНО-ОРИЕНТИРУЕМЫЙ универсум, если на нем можно задать одно единственное отношение локального следования. Наконец, называем *U*, ТЕМПОРАЛЬНО-НЕОРИЕНТИРУЕМЫМ универсумом, если систему заданных на нем порядков $\{<_i\}$ нельзя эквивалентно заменить одним отношением локального следования. При переходе на второй уровень изучения, где появляются конусы в касательном пространстве (см. § 2), эти конусы в каждой точке многообразия состоят из двух половинок — конуса бесконечно малого будущего и прошлого. «Причинно-простейший универсум» — это такое гладкое пространства-время, в котором не существует замкнутых временноподобных кривых (всегда входящих «в одну и ту же половинку конуса»), не существует Циклов. Темпоральная ориентируемость на этом уровне означает, что можно у некоторых конусов так поменять прошлое и будущее, что в итоге получится непрерывное и однозначное поле переходов из прошлого в будущее в каждой точке многообразия.

В этой связи подчеркнем важную черту нашей интерпретации. В определениях § 1 и здесь мы говорим «прошлое для события *a*» и т.п., но никогда не употребляем термина «прошлое» БЕЗ УПОМИНАНИЯ переменной α. Одна из наиболее распространенных ошибок в околофилософской литературе — оперировать словом «прошлое» или «будущее» или «настоящее» БЕЗ указания параметра-переменной: чье прошлое? настоящее для кого? Эта универсализация («гипостасирование», незаконное «коллективирование» в другой терминологии) затрудняет понимание реальных проблем, которые возникают в темпоральной теории. Можно говорить про прошлое (будущее) не одного события, а множества событий А (см. § 1.4), но всегда слово «прошлое» нуждается в аргументе «чье прошлое».

Аксиома ТК$_3$ носит технический характер: она позволяет строить изотонные функции, которыми можно отделять упорядоченные множества одно от другого аналогично тому, как в обычной топологии непрерывными функциями отделяют одно множество от другого. В этом смысле она соответствует аксиоме регулярности, хотя иногда она заменяет аксиому нормальности. Из ТК$_3$ следует, в частности, что если $A = A^{-}$ и $B = B^{\oplus}$ суть замкнутые и непересекающиеся, то на U, существует непрерывная неубывающая вещественная функция $f : U \mapsto [0,1]$, для которой $f(A) = 0$ и $f(B) = 1$. Благодаря аксиоме ТК$_3$ условия $p \in \overline{q^{+}}$ и $p \in \overline{q^{-}}$ оказываются равносильными, и т.п. Словом, она облегчает изучение.

Аксиомы ТК$_{1—2}$ позволяют мыслить об универсуме $(U, \{<_i\})$ как о топологическом пространстве, и в этом смысле они фундаментальны. В них суть нашей дефиниции. Ведь такое позволение очень важно, потому что, вообще говоря, в теории множеств не присутствует топология. Среди всех подмножеств 2^u множества U априори никак не выделено никакое семейство, задавшее бы топологию. Но, благодаря наличию порядка $<_I$, и, благодаря выбранным аксиомам, мы получаем право в дальнейшем работать не просто с U или с $(U, <_i)$ но с (U,T), т.е. с топологическим пространством. Требование, чтобы интервал был открытым множеством — очень существенное требование, нетривиальное и удобное в работе требование. В некоторых альтернативных построениях темпоральных$_1$ моделей работают с замкнутыми отношениями порядка (т.е. в основу кладутся отношения вроде $p \in \overline{q^{+}}$). Тогда такие объекты, как интервал, будущее точки и т.п. не открыты, а замкнуты. Но и там приходится вводить аналог нашего требования открытости, например, в такой формулировке: «Внутренность интервала не пуста». После этого простым переопределением отношений порядка устанавливается эквивалентность обоих подходов. Если же порядок задан не «с мясом», а, например, только на границе множества или даже на более богатом множестве меры нуль, то ничего хорошего не получается: доказано, что такие задания не существенны для темпоральной теории.

Аксиомами $\text{ТК}_{1—2}$ исключаются из рассмотрения те направления в темпоральных теориях, в которых отсутствует неограниченная дробимость интервала. Если $p < q$, то всегда интервал (p, q) не пуст, т.е. имеется x при $p < x < q$. Исключаются также те направления мысли, в которых допускаются «крайние точки», т.е. такие, за которыми ничего не следует или которым ничего не предшествует. Исключаются также те направления исследований, в которых отсутствует предельный переход — у нас ко всякой точке можно подойти непрерывным предельным переходом из ее прошлого или из ее будущего. Насколько оправданы такие отсечения? Не знаю. Думаю, что главным критерием здесь может служить лишь креативно-экспликативная сила теорий. А я не знаю никаких богатых и/или содержательных моделей, в которых, нарушались бы аксиомы $\text{ТК}_{1—2}$, нарушались бы по существу, а не внешне, когда простым переопределением они восстанавливаются.

В нашей интерпретации $a < b$ понимается как возможность повлиять на происходящее в b из a каким-нибудь «материальным воздействием». Эта не вполне удачная, но распространенная терминология означает, что можно переместить ненулевую массу покоя из a в b. А отношение $a \leq b$, т.е. $b \in \overline{a^+}$ понимается как возможность «в пределе» повлиять из a на b, может быть, и таким информативным воздействием, как телепериача. Запись же $b \in \partial a^+$ означает, что из a в b доходит свет (радио и т.п.), но ни пуля, ни пешеход, ни ракета не достигнут b, вышедших из a. (Во избежание недоразумения напомним, что свет оказывает давление на тела ненулевой массы и перемешает их, но они перемешаются уже со скоростью меньшей световой.). Наконец, возможна ситуация $a \leq b \,\&\, b \leq a$ (или $a < b \;\&\; b < a$ при некоторых упорядочениях), про которую мы будем говорить, что события a и b АХРОННЫ. Если множество A таково, что любая его пара точек ахронна, то будем называть A — АХРОННЫМ МНОЖЕСТВОМ. Его элементы, взятые сами по себе, как бы лежат «вне времени», не связаны друг с дружкой никаким причинным воздействием, хотя бы предельным.

На втором уровне рассмотрения, где у нас появляются векторы, ковекторы и пр., названное различие между $a < b, a \leq b, b \in \partial a^{+}$ и $a \leq b \;\&\; b \leq a$ сопряжено с другой терминологией. Говорят, что вектор X временноподобен, если $\pm X$ входит во внутрь конуса $O_p^{+} \subset T_pM, X \in O_p^{+} \cup O_p^{-}$ Говорят, что вектор X каузален, если $X \in O_p^{+} \cup O_p^{-}$. Говорят, что X светоподобен (или нулевой), если $X \in \partial O_p^{+} \cup \partial O_p^{-}$. Таким образом, конус ∂O^{+}, т.е. $g_{ik}X^iX^k = 0$; называют СВЕТОВЫМ КОНУСОМ. Говорят, что X пространственноподобен, если $X \notin O_p^{+} \cup O_p^{-}$. Эта терминология вскрывает психологическую связь между «пространством» и «ахронностью». Те события, которые расположены в пространстве, мыслятся как бы «одновременными», т.е. не различающимися в Хроносе. На эту терминологию можно взирать чисто математически — система терминов, из которых никакому не приписывается реального содержания: где любой термин можно заменить формулой: хорошо работающая система терминов. Можно взирать как на содержательную интерпретацию. Успех физики здесь связан с глубинным объединением обоих воззрений.

Как уже видно из приведенных в 91 примеров, одно и то же множество можно упорядочивать по-разному. Это различие УПОРЯДОЧИВАНИЯ универсума — самое важное философски обстоятельство. В зависимости от того, как упорядочено множество, оно может оказаться тем, что мы называли «ньютоновой кинематикой» или «эйнштейновой кинематикой». Здесь целесообразно говорить не о «кинематиках», а о СПОСОБАХ УПОРЯДОЧИВАНИЯ. Упорядочение может быть ньютоновым, может быть эйнштейновым, может быть еще третьим, четвертым... В последующих главах мы проследим, как варьируются допускающие содержательную интерпретацию термины при разных упорядочиваниях. В связи с этим встает методическая проблема простоты-понятности. Известно, что простоту-удобство можно понимать в двух противоположных смыслах. Предмет может быть ПРОСТЫМ В ОБРАЩЕНИИ, ПОЛЬЗОВАНИИ, — но весьма сложным по устройству. И, напротив, предмет может быть предельно простым по устройству, но довольно непросто им пользоваться. Например, таково различие между электродрелью и дубинкой, когда надо сделать отверстие в стене. Мы начнем свое изложение с простейших в использовании темпоральных конструкций, т.е. «с электродрели». Таковыми будут «приводимые к линейным способы упорядочивания».

Гл. 2. ЛИНЕЙНО-УПОРЯДОЧЕННЫЕ И СВОДИМЫЙ К ЛИНЕЙНЫМ СТРУКТУРЫ

§ 4. ЛИНЕЙНО-УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО

1^o. Линейно-упорядоченное строгим порядком множество. Говорят, что универсум *(U, <*) со строгим порядком < ЛИНЕЙНО-УПОРЯДОЧЕН, если $\forall x,\quad y \in U \;\; x < y \vee y < x \vee x = y$. Вообще говоря, таких множеств много, гораздо больше, не же ли нужно в теории пространствовремени. Аксиомы ТК$_{4—5}$ избыточны, потому что у нас одно единственное отношение порядка. Аксиома ТК$_3$ в случае линейной упорядоченности выводима из аксиом ТК$_{1—2}$. В силу ТК$_{1—2}$ наше линейно-упорядоченное множество оказывается топологическим пространством с не дискретной топологией — этим уже резко сужается класс допустимых в темпоральной теории линейно-упорядоченных множеств. Следующей аксиомой мы еще значительнее сузим этот класс.

ТК$_6$. Интервальная топология имеет счетную базу.

В принципе можно строить темпоральную теорию и для несчетных баз» Например, можно за *U* принять так называемую «длинную прямую», где каждая точка имеет окрестность, гомеоморфную вещественной прямой *R*, но все *U* состоит из несчетного множества таких прямых, последовательно расположенных. Но формулировки последующих утверждений стали бы при этом на несколько порядков более громоздкими, а мы хотим прояснить специфику темпорального универсума, не вдаваясь в громоздкую всеобщность.

Из аксиом ТК$_{1—3,6}$ легко доказывается, что на (*U*, <, *T*) можно ввести метрику, согласованную с порядком (если $x < y < z$, то $\tau (x, z) = \tau (x, y) + \tau$ $(y < z)$, а тогда (*U*, *T*) оказывается гомеоморфно некоторому подмножеству вещественных чисел. Дабы исключить всякие топологические тератологии, мы вводим еще одну аксиому, причем формулируем ее (как и предыдущую ТК$_6$) в таком виде, чтобы она сохраняла смысл и для случаев нелинейно-упорядоченных множеств:

ТК$_7$. У всякой $p \in U$ есть окрестность $\vee$ такая, что для любых $x, y \in \vee$ при $x < y$ интервал (x, y) связен.

Это «локальная интервальная связность». Из нее следует, что всякая точка p линейно-упорядоченного универсума имеет окрестность, гомеоморфную отрезку вещественных чисел *R:* иными словами, $(U, <)$ оказывается одномерным топологическим многообразием без граничных точек и ветвлений, без выброшенных точек.

Какие интерпретационные доводы имеются в пользу связности? Если бы интервал был несвязен, т.е. распадался бы в объединение непересекающихся открытых подмножеств *R*, то мы получили бы несоответствие определенным ИНТУИТИВНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМ, хотя ЛОГИЧЕСКОГО ПРОТИВОРЕЧИЯ не было бы. Например, начиная о события *a,* мы нашли бы возрастающую линейную последовательность $a = a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$, которая не имеет последнего элемента, но все точки этой последовательности ограничены («случаются раньше, чем») событием *b.* Точно также из *b* выходит убывающая линейная последовательность $\dots < b_n < \dots < b_2 < b_1 = b,$ которая не имеет самого раннего элемента, но каждая точка, из которой следует не только за ее, но и за всякой a_n. При этом названные точки могут быть взяты сколь угодно плотно. Линейно-упорядоченный универсум — это «чистая длительность» по Бергсону. Это — возможность мысленно переходить от события к событию «последовательно во времени». Это то, что иные философы называют «временем как субстанцией». Возможны ли «провалы», «дыры» в «чистой длительности»? Куда деваются «в пределе» события, монотонно возрастающие и ограниченные сверху — уходят в подсознание, что пи? Думать о них мы боимся, что ли? По-видимому, ответы на подобные вопросы зависят от отвечающего субъекта. Но для большинства исследований проступает, вроде бы, такая точка зрения: если возникает какая-либо «дыра», «несвязность», «нарушение непрерывности» в линейной длительности, то эти «дыры» и «несвязности» ОБЯЗАНЫ БЫТЬ, ЧЕМ-ТО ОБЪЯСНЕНЫ. Они должны «иметь причину», «быть мотивированными», «иметь происхождение». Таким образом, метатеоретическими доводами в пользу постулата локальной интервальной связности служат интерпретационные соображения, а не соображения технические, аппаратно-математические — по крайней мере, для случая линейно-упорядоченного универсума.

С философски-интерпретационных позиций немаловажно, что в рассматриваемом линейно-упорядоченном универсуме нет ни «начала» ни «конца», т.е. он «бесконечен». Сам универсум выглядит «неограниченно раздутым интервалом». Именно, пусть $(a, b) \subset U$, а событие $p \in U$ произошло произвольно, лишь бы $b < p$. Тогда по линейной упорядоченности либо $p \in (a, b)$ либо же $p < a$. В последнем случае можно рассмотреть больший интервал (p,b), к которому бывшая начальная точка a относится уже как внутренняя точка. Так как у всякой a есть предшествующая, то «процедуру раздувания вниз» интервала можно продолжать неограниченно, а так как универсум линейно-упорядочен и имеет счетную базу, то безразлично, с какого именно интервала мы начнем «раздувание». «В пределе» будет одно и то же, одна «бесконечность времени в прошлое». Аналогично и для будущего.

2º. Структуры на «времени самом по себе». Как мы видели, на $(U,<)$ возникает структура вещественных чисел. Но познавательно существенно, что эта структура задается С ТОЧНОСТЬЮ ДО гомеоморфизма (т.е. топологически). Гомеоморфизм сей изотонный, но все-таки он НЕ СОХРАНЯЕТ алгебраической структуры вещественных чисел. Интервалу (a, b) нельзя приписать никакого числа, так сказать, «меры интервала» — даже если точкам a и b приписаны числа ξ_a и ξ_b. При другом изотопном гомеоморфизме числа η_a и η_b будут совершенно другими, сохранится лишь $\eta_a < \eta_b$, если $\xi_a < \xi_b$. Если (a, b) и (p, q) суть два непересекающихся интервала, то нельзя сказать, «равны» ли эти интервалы, какой из них «меньше», какой «больше». Сравнивать можно только те интервалы, один из которых целиком содержится в другом. «Линейки» для перенесения «во времени» «промежутков времени» — нет. Линейно-упорядоченный универсум ость нечто крайне гибкое, допускающее такие числовые представления, при которых не только нарушается величина числа, но даже конечное число может обратиться в бесконечность — ведь числовой отрезок (0, 1) ничем с топологической точки зрения не отличается от всей числовой прямой $(-\infty, \infty)$; о последствиях этого см. § 5.2 и § 6.7. Никакой «конгруентности» у «временных промежутков» пока нет: см. § 9.

На $(U, <)$ можно, пользуясь линейной упорядоченностью ввести трехместное отношение «между». Говорим, что b между a и c, если $a < b < c$ или $c < b < a$. Заметим, что при этом необходимо $a < c$ или $c < a$. Принято обозначать тернарное отношение «между» символом abc. Нетрудно проверить выполнение следующих свойств этого отношения:

$$abc \Rightarrow cba \tag{4.2.1}$$

$$abc \Rightarrow bca \tag{4.2.2}$$

$$abc \ \& \ adb \Rightarrow adc \tag{4.2.3}$$

$$abc \ \& \ adc \Rightarrow adb \vee b = d \vee bdc \tag{4.2.4}$$

$$a \neq b \ \& \ b \neq c \ \& \ a \neq c \Rightarrow abc \vee bca \vee cab \tag{4.2.5}$$

$$a \neq b \Rightarrow \exists c \quad acb \tag{4.2.6}$$

$$a \neq b \Rightarrow \exists c, d \ \ cab \ \& \ abd \tag{4.2.7}$$

Верно и обратное. Если на множестве U задано тернарное отношение, удовлетворяющее формулам (4.2.1—7), то можно (двумя противоположными способами) ввести на U отношение строгого порядка <, причем $(U, <)$ окажется линейно-упорядоченным. Предоставляем это как упражнение читателю.

3^o. Линейно-упорядоченное локальным следованием множество. Для случая локального следования $\prec$ условие $\forall\times\forall_y x \neq y \Rightarrow x \prec y \vee y \prec x$ было бы обременительно: мы не станем задерживаться на пояснении, почему. Читатель, склонный к педантизму, сам без труда обнаружит неудобство такого определения, рассмотрев, например, окружность. Поэтому мы определим линейно-упорядоченное множество (U, $\prec$) двумя условиями:

ЛУМ$_1$. $a \neq b \Rightarrow \left(\left(\exists p p \prec a \,\&\, p \prec b \vee \exists p a \prec p \,\&\, b \prec p\right) \Rightarrow a \prec b \vee b \prec a\right)$,

ЛУМ$_2$. $a \neq b \Rightarrow \exists \{a_k\}_1^n a_1 = a \,\&\, a_n = b \,\&\, \left(a_{k-1} \prec a_k \vee a_k \prec a_{k-1}\right)$,

Первое условие обеспечивает, что локально мы имеем дело с линейно-упорядоченным в обычном смысле множеством. В частности, если $\prec$ есть отношение строгого порядка <, то ЛУМ$_1$ совпадает с ранее данным определением. Никаких ветвлений, отклонений в сторону, бифуркаций локально не допускается. Второе условие соответствует аксиоме ТК$_5$ и исключает ситуацию, при которой могли бы возникнуть два или более никак не связанных между собой множеств. Например, две параллельные прямые, на которых на каждой введен свой порядок, а вот согласовать порядки на разных прямых мы позабыли. Для исключения такой неприятности и вводится ЛУМ$_2$, согласно коему изо всякой точки можно посредством конечного числа интервалов добраться до каждой точки. Так как каждый интервал линеен в силу ЛУМ$_1$, то обеспечивается линейность всего (U, $\prec$).

Главное различие между линейно-упорядоченным в смысле < множеством и линейно-упорядоченным в смысле $\prec$ множеством в том, что они, вообще говоря, ГОМОТОПИЧЕСКИ РАЗЛИЧНЫ. Второе допускает замкнутые цепочки, поэтому (U, $\prec$) может оказаться неодносвязным. Нетрудно убедиться, что при выполнении аксиом ТК$_{1—3,6,7}$ для универсума (U, $\prec$) остаются две возможности он гомеоморфен либо R, либо окружности S^1 (т.е. R *(mod 1)).*

На базе $\prec$ введем два отношения, Одно двуместное:

$$a \mid b :\Leftrightarrow a \prec b \vee b \prec a \vee a = b \tag{4.3.1}$$

Оно читается «точка *a,* близка точке *b*». Другое трехместное, называемое по-прежнему «отношением между», но определяемое не через $a \prec b \,\&\, b \prec c$, а чуть-чуть тоньше:

$$abc :\Leftrightarrow \left(a \in \left(a, c\right) \vee b \in \left(c, a\right)\right) \tag{4.3.2}$$

Нетрудно проверить, что тогда в линейно-упорядоченном универсуме (*U*, $\prec$) выполняются (4.2.1—4) и (4.2.6—7), а вместо (4.2.5) имеет место:

$$a \neq b \,\&\, b \neq c \,\&\, c \neq a \,\&\, a \mid b \,\&\, b \mid c \,\&\, c \mid a \Rightarrow abc \vee bca\ cab \tag{4.3.3}$$

Кроме того в линейно-упорядоченном универсуме (*U*, $\prec$) выполняются следующие формулы:

$$abc \Rightarrow a \mid c \tag{4.3.4}$$

$$abc \,\&\, abd \Rightarrow c \mid d \tag{4.3.5}$$

$$axb \,\&\, y \mid a \,\&\, y \mid b \Rightarrow x \mid y \tag{4.3.6}$$

Заметим, что при наличии замкнутой цепочки $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n \prec a_1$, весь линейно-упорядоченный универсум оказывается компактным, а потому невозможно, чтобы $U = a^- \cup a \cup a^+$ хоть для одной точки $a \in U$. Ведь $a^- \cup a \cup a^+$ — некомпактное множество. Поэтому для всякой $a \in U$ найдется $a \in U$, $a \neq a$, которая не связана с *a* ни отношением $a \prec a$, ни $a \prec a$, поэтому, невозможно $\rceil\ a \mid a$. Однако такую пару точек в отличие от случая строгого порядка неудобно называть «ахронной». Это ДАЛЕКИЕ друг от друга точки. В малой окрестности их нет.

4°. Три версии локальной причинности. Отношение локального следования, как сказано, интерпретируется нами как локальная причинность, когда причинная обусловленность не может «простираться очень далеко». Термин «очень далеко» употреблен здесь в качественном смысле, ибо ведь никаких масштабов, линеек, мер, часов — у нас еще нет. Просто если в случае строгого порядка «раздувание интервала» не знало границ и «в пределе» из последовательности объемлющих интервалов получался весь универсум: — в случае локального следования таким супремумом интервалов явится некоторое замкнутое множество, уже не оказывающееся интервалом (его концами будут как раз взаимнодалекие точки) и не покрывающее всего универсума. Взаимодействия между названными концами, парой далеких точек, — нет. «Вассал моего вассала — не мой вассал» — вспоминается средневековое правовое изречение. Сам универсум может состоять из нескольких таких множеств. И тут открываются три возможности.

Первая из них наименее интересна математически. Локальное следование может быть задано на бесконечной прямой, где нет замкнутых цепочек. Например, на R вводим $\prec$ условием

$$x \prec y : \Leftrightarrow 0 < y - x < 1 \qquad (4.4.1)$$

Тогда интерпретационно причинное воздействие как бы «истощается», «иссякает» за промежуток времени единица. Но ничто не мешает переопределить здесь $\prec$ на строгий порядок <, положивши

$$x < y :\Leftrightarrow \exists x_1,...,x_n x_1 = x \,\&\, x_n = y \,\&\, \left(1 < k < n \Rightarrow x_{k-1} \prec x_k\right) \quad (4.4.2)$$

Ведь в первичном $\prec$ нет замкнутых цепочек, поэтому формула (4.4.2) корректна и дает антисимметричное транзитивное отношение.

При второй и третьей возможностях уже существуют замкнутые цепочки, поэтому формула (4.4.2) неприменима, и $\prec$ не удается свести к «укорачивающему» <. Эта вторая возможность реализуется примером, когда на отрезке [0, 4] при отождествлении по модулю 4 мы задаем отношение $\prec$ условием.

$$x \prec y : \Leftrightarrow \exists k \in N \; \exists y' \in R \qquad y - x = 4k + y' \,\&\, 0 < y' < 1 \qquad (4.4.3)$$

Если при отсутствии замкнутых цепочек мир, грубо говоря, представляется как ВЧЕРА, СЕГОДНЯ, ЗАВТРА, то при наличии их мир состоит из ВЧЕРА, СЕГОДНЯ, ЗАВТРА, а также еще ПОСЛЕЗАВТРА, которое может во всем совпадать с ПОЗАВЧЕРА. Причинное воздействие в этом примере, как и в (4.4.1), по-прежнему «истощается» «угасает» на отрезке длины единица, но в (4.4.3) появляется нечто новое, чего нет в первом, бесконечном, случае. Можно задаваться вопросом о «длине» всего замкнутого времени, хотя масштаба по-прежнему нет. «Длина» может выразиться через наименьшее число отрезков, которыми покрывается «все время». Здесь оно равно четырем, можно доказать, что оно всегда не меньше двух. Как бы возникают естественные «эры», «эпохи», «зоны», которые, впрочем, переходят одна в другую незаметно, без локальных изменений—зацепок—потрясений. Но та взаимодействия, которые обуславливают причинность в одном «эоне», не действуют в другой «эре». Этим снимается «парадокс путешественника, встретившего самого себя». Покамест я сознаю себя КАК ЦЕЛЬНУЮ ЛИЧНОСТЬ, я нахожусь в пределах одного зона, т.е. в области действия отношения $\prec$ из одной точки a, и никаких петель в этой области не может существовать. Когда же возникает «петля» $a \prec b \prec c \prec a,$ то где-то между b и c разрывается воздействие a на события вблизи c: единства личности уже быть не может, мы имеем дело с объектами, принадлежащими к двум или более «зонам».

Третья возможность схожа со второй, но у «эонов» появляются «граничные точки», «сингулярные точки», отсутствовавшие во втором случае». Именно, на том же отрезке [0, 4] при том же отождествлении по модулю 4 задаем порядок $\prec$ так. Говорим, что $x \prec y,$ если найдутся такие представители x' , y' этих чисел по модулю 4, что сразу выполнены два условия: $x' < y'$ и такая дизъюнкция четырех конъюнкций:

$$(0 < x' \le 1 \;\&\; 0 < y' < 2) \vee (1 < x' \le 2 \;\&\; 1 < y' \le 3) \vee$$

$$\vee (2 < x' \le 3 \;\&\; 2 < y < 4) \vee (3 < x' \le 4 \;\&\; 3 < y' < 5) \qquad (4.4.4)$$

Тогда точки 0, 1, 2, 3 и 4 (= 0) оказываются выделенными. Любой интервал, начинающийся в точках между 0 и 1, кончается (в смысле предельной точки) в точке 2. Разные интервалы — в одной и той же. Тут для некоторых пар точек $x \prec y$ выполняется $x^+ \prec y^+$, что всегда верно для строгого порядка, но не имеет места ни для какой пары при упорядочении (4.4.3). Математически это самый неудобный вид упорядочения, но зато он философски-интерпретационно позволяет как бы осмыслить «стирание» причинности в определенных событиях.

5º. Различие между цикличностью и периодичностью. Довольно распространена путаница понятий «цикличность» и «периодичность». Периодический процесс — будь то излучение осцилятора, будь то переход от иоса от пассионарности к стагнации — есть сопоставление каких-то характеристик, параметров x процесса с некоторой (чаще всего календарной) переменной t. Процесс описывается в виде связи $f : t \mapsto x$, так что подразумеваются две области: область задания функции f (где находится переменная t) и область значения функции f (где находится переменная x). Повторение значений x через правильный интервал, т.е. $\exists \omega \ f(t + \omega = f(t)$ — вот что такое «периодический процесс». Конечно, возможны нюансы. Например, повторение пятен на Солнце происходит с периодом $\omega = 11$ лет, но сам период со подвергается случайным флуктуациям. В гумилевской периодичности «стадий этноса» вообще нет количественных переменных, о повторении можно говорить только качественно. Но при всех названных и других вариациях общее для периодичности то, что при повторении значения параметра x переменная t считается разной, сдвинутой на один или несколько периодов: $t, t + \omega, t + k\omega$.

Совсем иное дело, когда речь идет о ЦИКЛИЧНОСТИ ВРЕМЕНИ, Тогда, собственно, нет ни функции f, ни двух областей, с нею связанных. Остается только область задания t, а никаких внешних переменных x к рассмотрению привлекать не следует. Просто по истечении, начиная от t, какого-то промежутка ω мы попадем не в новую дату $t + \omega$, а в прежнюю дату t. Разумеется, если присутствуют какие-то внешние характеристики x, то они полностью повторяются при $t + \omega = t$. Но суть «циклического времени» не в повторении этих характеристик, а в повторении самих дат *t,* самих событий из области задания.

Существует точка зрения [2], [15], будто античная цивилизация не знала концепции бесконечного времени, а жила в парадигме циклического времени. Обоснованность этой концепции сомнительна, и даже если она верна, то факт, что отношение локального следования в тех цивилизациях развито не было. Бесспорным сторонником цикличности времени был Ницше с его идеей «вечных возвращений».

6º. О «течении времени». Слово «время» в разговорном языке употребляется в сотнях различных значений, иногда и во множественном числе. Мы, естественно, не будем перебирать всех значений-смыслов, тем более, что в разных живых языках семантические поля этого слова не совпадают (например, английское имеет значение «раз», совершенно отсутствующее в русском). Мы предложили линейно-упорядоченную структуру для экспликации чистой непрерывной длительности, лишенной пространственной протяженности и каких-либо иных внешних характеристик, зато снабженной «направлением». При этом мы показали, что в принципе возможны две такие модели: одна отвечает «бесконечному времени», а другая — «времени циклическому». Из исследований культурологов известно, что форма циклического, замкнутого времени была довольно распространенной в истории человечества, Чаще всего цикличность времени бывала сопряжена с мистицизмом и катастрофизмом. Это естественно, если вдуматься, что логически такое представление сводилось к попыткам описывать ОКРУЖНОСТЬ посредством обычного СТРОГОГО СЛЕДОВАНИЯ, т.е. к исходно противоречивой задаче. Ведь никто не ослаблял аксиому транзитивности в понимании причинных связей до нашей формулы (1.2.1). Идея замкнутого времени возобновилась в XX веке на совсем иной основе — «машина времени».

Если понимать линейно-упорядоченное множество как «время», то философски это отвечает так называемому «субстанциальному времени». Здесь в роли «субстанции» выступает само множество. Так как по определению у нас ничего другого пока нет, кроме линейно-упорядоченного множества ($U, \prec$), то нельзя и говорить про соотнесенность этого «времени» с «миром», с чем-то совершающимся. Мы промоделировали «время само по себе», «априорно заданное время». Это — та модель, которая присутствует — хотим мы того или не хотим — во всяком рассуждении о времени, но в некоторых рассуждениях может присутствовать еще нечто «постороннее», «добавочное». Например, в том виде, как об этом говорилось в предыдущей рубрике, или как в § 14.

Часто произносят фразу «течение времени». Сама по себе она бессмысленна — ведь «течение» является ДВУМЕСТНЫМ предикатом, а не одноместным: вода в речке течет ОТНОСИТЕЛЬНО берегов реки. Если время «течет» то по отношению к чему? Однако за этой логически-грамматической бессмыслицей стоит нечто, что на таком же разговорном языке лучше всего передавалось бы выражением «течение во времени», точнее, «течение (чего-то подразумеваемого) во времени». Именно «течении? во времени» соответствует переход от «раньше» к позже». Наличие такого перехода — непременный атрибут идеи времени, он и «зашифрован» в «течении времени».

Не во всяком мыслимом универсуме присутствует «раньше—позже». Например, «биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке», «Пересекаются»? Или «пересекались»? Или «пересеклись»? Или «пересекутся»? Что чему предшествует: точка ли пересечения биссектрисам, или биссектрисы — точке их пересечения? Какие две биссектрисы пересеклись раньше, чем третья прошла через эту точку? Безразлично. Идеи перехода от «раньше» к «позже» нет в тригонометрии[4]. Напротив, в линейно-

---

[4] Не надо смешивать тригонометрию и доказательств теорем: в тригонометрии. В

упорядоченном множестве ЕСТЬ не только ПЕРЕХОД от более раннего события, *a* к более позднему событию *b,* но есть даже ОБЯЗАТЕЛЬНОСТЬ такого перехода применительно к паре близких событий: либо $a \prec b$, либо $b \prec a$. Это и соответствует «течений» от *a* к *b.*

Особенно наглядно видно это на втором уровне рассмотрения. Тогда $(U, \prec)$ оказывается одномерным многообразием, а тот конус, о котором писалось в § 2.1, превращается в выделенный касательный луч к этому многообразию. Иными словами, на *U,* возникает ОРИЕНТАЦИЯ, ибо $U = R'$ или $U = S^1$. «Течение времени» отвечает «ориентации многообразия», тому «току», который по дифференциально-топологическим теоремам всегда присутствует, коль скоро задано такое невырожденное векторное поле. Множество с ориентацией, с направлением, притом одномерное — вот что такое «время». При этом такая ориентация должка быть СУЩЕСТВЕННЫМ атрибутом. К примеру, можно бы мысленно расположить все рассматриваемые предмету по их весу, сравнивая, что больше чего весит. Но даже если выкинуть все «лишние» предметы, оставив ровно по одному одного веса, то все равно переход от более тяжелого к более легкому (или переход мысли от более легкого к более тяжелому) был бы произвольным, не обязательным. Переход же мысленного внимания от более раннего события к более позднему — обязателен, имманентен идее времени.

В линейно-упорядоченном множестве нет «одновременных событий» — только одно событие дает «метку» мгновению. Всякое отличное от него событие уже либо раньше него, либо позже, либо так удалено, что в рамках локальной причинности несопоставимо. Линейно-упорядоченному

доказательствах упорядоченность фраз весьма важна, там присутствует идея «раньше—позже». Этот аспект доказательств принадлежит логике, в которой само отношение импликации $A \supset B$ (из A вытекает B) есть транзитивное отношение. Попутно заметим, что было бы полезно построить логику, в которой импликация была бы лишь локально-транзитивна, так сказать, логику ползучего эмпиризма, недоверчивого к умозаключениям, или, пользуясь криминалистически-психологическим термином, логику полевого мышления.

множеству хорошо отвечают идеи «будущего», «прошлого». Тут оказывается почти без разницы, говорим ли мы о «будущем точки» или просто о «будущем» — в определенном смысле эти смыслы сливаются. Для бесконечного времени вообще происходит идеально простое расщепление: миг, прошлое, будущее — вот всё время!

Ни про какие масштабы времени, ни о каком численном измерении промежутков времени, ни про какие часы пока нельзя говорить.

§ 5. ВРЕМЯ В УНИВЕРСУМЕ

1º. Функциональное время. Для практики недостаточно понятия времени «как чистой длительности», хотя оно и породило глубокие и еще не оконченные размышления философов. Посредством времени обычно как-то датируются некие вещи, не вмещающиеся сами по себе во времени: ср. § 4.5 о периодичности. Математически возможна такая модель.

Рассматриваем ДВА универсума. Один — это введенный в § 4 линейно упорядоченный универсум: обозначаем его L (от линейности), а порядок в нем $\prec$ (он может быть как строгим порядком, так и локальным следованием). Затем рассматриваем еще универсум $(U, \{<\})$, который состоит, возможно, из нескольких множеств $(M_i, <_i)$, как описано в § 1.3. Предполагаем, что $(U, \{<\})$ удовлетворяет аксиомам ТК$_{1—7}$ и формулируемой далее ТК$_8$, $(L, \prec)$ удовлетворяет аксиомам ТК$_{1—3,\ 6,\ 7}$ и ЛУМ$_{1—2}$. Первый универсум $(L, \prec)$ называем временем, второй $(U, <)$ — просто УНИВЕРСУМОМ. Содержательно мыслится, что универсум это и есть «то, что нам на самом деле предлежит» (в мыслях, в ощущениях, в интуиции), а время есть нечто априорное, оно сравнительно субъективно пристраивается нами самими.

Возможны случаи $L \subset U$ и $L \cap U = \varnothing$. Второй — это когда L и U совершенно разной природы, например, U состоит из космологическифизических событий, а L — из вещественных чисел. В этом случае и сравнивать L с U нельзя. Но даже в случае $L \subset U$ допускается возможность того, что $\prec$ и $<_i$ суть совершенно разные порядки. Но и случай, когда $\prec\ = <_i$ также не исключается с порога. Рассматриваются отображения из U в L, т.е. L^U, причем, поскольку как в L, так и в U имеется своя топология, постольку можно говорить о непрерывности отображений. Ограничиваемся раз навсегда топологическими морфизмами, т.е. непрерывными $f \in L^U$. Главную роль из них будут играть морфизмы упорядоченных структур, т.е. изотонные непрерывные отображения из L^U.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Говорим, что $f : U \Rightarrow L$ является ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ВРЕМЕНЕМ, если f непрерывно и из $x <_i y$ следует $f x \prec fy$.

В дальнейшем функцию f, удовлетворяющую этому определению, стандартно обозначаем буквой t, Итак, по определению, функциональное время есть морфизм порядка между универсумом и избранным субстанциальным временем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. ДАТОЙ t_x СОБЫТИЯ $x \in U$ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРЕМЕНИ $t \in L^U$ называем значение функционального времени t на x, т.е. $t_x = tx$.

С математической точки зрения прежде всего возникают вопросы о существовании такого отображения. Ясно, что при упорядочении (1.3.1) не существует функционального времени из $(U, \{<\})$ ни в какое линейно-упорядоченное множество $(U', \prec)$. Этот факт согласуется с принятой нами в § 3 терминологией, согласно котјрой (1.3.1) есть темпорально-неориентируемый универсум. Учитывая теорему 1, не будет поэтому ограничением общности даже в глобальных рассуждениях, если мы вместо $(U, \{<\})$ станем рассматривать только случай $(U, \prec)$ с аксиомой ЛУМ$_2$ вместо ТК$_4$. Но и в этом случае при неудачном выборе субстанциального времени

$(i,\prec)$ может не существовать функционального времени (см. § 8.5). Например, пусть универсум $(U,\prec)$ — это цилиндр из примера (1.2.2), а за субстанциальное время принято множество вещественных чисел с естественным порядком безо всяких факторизации. Тогда отображение цепочки $a \prec b \prec c \prec a$ с соблюдением $t_a < t_b < t_c < t_x$ невозможно. Но, если здесь за L принять $R(mod2)$ с соответствующим отношением локального следования, то отображение становится возможным.

Бывают случаи, когда отображение $t : U \Rightarrow L$ не сюръективно, а инъективно, т.е. $t(U) \neq L$. Это попросту означает, что мы в качестве субстанциального времени выбрали слишком большое множество. Достаточно взять часть его $t(U) \subset L$, чтобы получить возможность описать функциональным временем и датами весь универсум U. Наиболее яркий тому пример доставляет современная физическая космология: она исходит из старомодных представлений о времени как о заданном на всей оси (-∞; ∞), тогда как все ее модели умещаются на полуоси (0, ∞), а точка ноль вообще не влезает ни в одну физическую модель без сингулярности. Другой пример. Скажем, мы априори предположили цикличность времени $(L, \prec)$, но при отображении t оказалось, что U отображено не на все L, а лишь на его собственное подмножество $L' \subset L$. Тогда, поскольку мы работаем только со связным временем (аксиома ТК$_7$), постольку ${}^{L}\!/_{L'}$ оказывается лишним, а в L' уже не существует замкнутых цепочек. Следовательно, мы напрасно априори предполагали время цикличным, вполне можно в этом случае обойтись бесконечным временем может быть, слегка переопределив исходное $\prec$, на манер формулы (4.4.2).

Другой доставляющий беспокойство случай, когда область задания для t не совпадает со всем U т.е. когда функциональное время задано лишь на подуниверсуме $d_{\mathrm{om}}\, t \subset U$, а не на всем универсуме U, где оно задано быть не может. В этом случае говорят, что время t задано локально, а при $d_{\mathrm{om}}\, t = U$

говорят «глобально».

На втором уровне изучения функциональное время t предстает как функция с положительным (в смысле § 2.1) градиентом dt. Чаще всего именно такую функцию выбирают в качестве первой координатной функции, различая записью t с одной стороны, и x, y, z — с другой. Фундаментальность отношения порядка $<$ здесь проявляется в подразумеваемых допустимых изменениях координат. Если повороте (переименовании) координатных осей неравенство $x < x'$ заменяется на $x > x'$ или то же происходит с y, z, то к этому относятся как к координатному артефакту, безразлично. Но замена $t < t'$ на $t > t'$ представляется уже физически недопустимой, неравенству $t < t'$ придается значение большее, нежели простому координатному соотношению.

2º. Часы и их реградуировка. Здесь мы ограничимся бесконечным субстанциальным временем $(L,<)$, причем выберем его в специальной форме $L = R$ вещественных чисел или связного его подмножества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. ЧАСАМИ называется отображение $t : (U, <) \mapsto (R, <)$, если оно непрерывно и сохраняет порядок: $x < y \Rightarrow t_x < t_y$.

Содержательно: часы есть некоторый инструмент, посредством которого мы приписываем событию — число. Следовательно, это «функция». Но не всякая функция (как и не всякий инструмент) может быть часами. В чем отличие, скажем, часов от термометра? Начинается некоторая реакция, в начале и конце которой я замеряю время и температуру. Так вот, значение температуры в конце реакции МОЖЕТ быть меньше, чем значение температуры в начале реакции, но значение времени (дата) в конце реакции всегда должно быть БОЛЬШЕ, чем в начале реакции: разность значений времени в предписанном порядке как раз равна «длительности реакции», а это ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ число. Требование изотонности функции как раз отвечает интуитивному представлению о различии «времени» (часов) и «температуры» (термометра).

Итак, часы — частный случай функционального времени. Для одного и того же универсума U, можно по-разному задать отображение в (на) L, а L можно по-разному взаимно-однозначно и вэаимно-изотонно сопоставить с R. Это означает, что на одном и том же универсуме U можно задать РАЗНЫЕ ЧАСЫ. Собственно, вопрос о том, СКОЛЬКО разных часов (т.е. сколько функционально независимых функций- морфизмов порядка) можно задать на универсуме, — принадлежит к основным для классификации темпоральных универсумов вопросов. Сейчас мы ограничимся рассмотрением лишь одного его аспекта: преобразованием $\varphi : R \mapsto R$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. РЕГРАДУИРОВКОЙ ЧАСОВ (реградуировкой темпоральной шкалы) называется изотонное сюръективное отображение $\varphi : R \mapsto R$ (или $\varphi : (\alpha, \beta) \mapsto (\xi, \eta)$, но это по сути одно и то же).

Отсюда следует, что φ обладает обратным φ^{-1}, что обратное изотопно, что φ и φ^{-1} непрерывны, а потому φ есть гомеоморфизм. На втором уровне изучения, когда R рассматривается как гладкое одномерное многообразие R^1, отображение φ является ориентированным диффеморфизмом, $\alpha\varphi > 0$. Тогда $\alpha t > 0$ и $\alpha\tau > 0$ и, конечно, $\alpha\tau = \alpha\varphi\alpha t$.

Мы рассмотрим три примера градуировки: логарифмическую, чернодырную и космологическую.

Первая встречалась в биологии [1] и в космологии [6]. Она состоит в переходе

$$t \mapsto \tau = \tau_0 \log \frac{t}{t_0} \qquad (5.2.1)$$

где t_0 и τ_0 суть некоторые константы физической размерности времени.

Это преобразование $(0, \infty) \mapsto (-\infty, \infty)$, причем отрезок $(0, t]$ переходит в бесконечный луч $(-\infty, 0]$. Биологически-психологическая мотивировка перехода от t к τ дается законом Фехнера: количество ощущений пропорционально не количеству раздражений, но ОТНОСИТЕЛЬНОМУ количеству раздражений (т.е. числу раздражений, деленному на общее число пережитых до того раздражений). Математически это выглядит:

$$\Delta y = \frac{\Delta N}{N} \qquad (5.2.2)$$

Если, грубо говоря, считать раздражения ΔN — не зависящие от ощущающего субъекта — пропорциональными общему ходу времени Δt, а ощущения Δy считать пропорциональными «собственному», «индивидуальному», «субъективному» времени $\Delta\tau$, то сразу интегрированием (5.2.2) получим с точностью до констант (5.2.1). Бакман на богатом биологическом (экологическом и эмбриологическом) материале показал, в каком широком диапазоне оказывается плодотворным такое преобразование шкалы биологического времени. Милн в своей космологической модели (не исходящей из общей теории относительности) рассуждал похожим образом. За промежуток Δt времени распадается количество ΔN урана, пропорциональное не Δt, но отвечающее закону $\frac{\Delta N}{N} \approx \Delta t$, где N — общее количество урана. Иными словами, $N \approx e^t$. Ну, а если градуировать время τ не по долям распавшегося урана, а по абсолютной массе его (наличного или распавшегося — это безразлично, ибо получается изменением знака), то тогда $\Delta t \approx \Delta N$ и связь t и τ дается той же формулой (5.2.1). Милн также показал, к каким далеким и глубоким последствиям приводит эта реградуировка шкалы времени. В этой связи он поставил математически разумные вопросы о реградуировке и получил важные ответы-теоремы, см. [6]. Однако следует подчеркнуть, что в отличие от Бакмана [1], теория Милна даже в той своей части, которая занимается только связью между t-временем и τ-временем, не сводилась к преобразованиям $R \mapsto R$, а предполагала более сложные модификации t и τ на уровне понятия «одновременность», о котором мы еще не говорили. Иными словами, для его теории существенно, что для отображений $t : U \Rightarrow R$ и $\tau : U \Rightarrow R$ из $t_x = t_y$ не следует $t_x = \tau_y$, и наоборот:

см. § 10.3—4.

Вторая реградуировка, названная нами «чернодырной», напротив, в явном виде практически не упоминается, хотя имплицитно всегда присутствует во всех рассуждениях относительно черных дыр. За одно из функциональных времен t тут принимается координатное. Это то время, которое входит в описание самого решения Шварцшильда (или Керра — для наших целей это безразлично). В этом решении описываются орбиты планет: вращающихся вокруг центрального тяготеющего тела, и вообще все те процессы, при которых не происходит безостановочного падения на центр, точнее, на Шварцшильдов радиус $r = \rho$. Другое время τ — это собственное время того наблюдателя, который безостановочно падает на центр. Связь между ними не логарифмическая, а более громоздкая, см. [10], формула (6). Выпишем ее для одного типичного случая:

$$\tau = \int_{r_1}^{r_2} ds = \frac{1}{c}\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r}{\rho}}dr = \frac{2}{3}\frac{r\sqrt{r}}{\sqrt{\rho}}\Big|_{r_1}^{r_2} \qquad (5.2.3)$$

где

$$t + const = 2\rho arth\sqrt{\frac{\rho}{r}} - 2\sqrt{\rho r}\left(1 + \frac{r}{3\rho}\right) \qquad (5.2.4)$$

Любопытно, что асимптотически при $t \Rightarrow \infty$ зависимость между t и τ выражается через e^{-t} и константы, так что эта реградуировка недалеко ушла от логарифмической. Здесь важно следующее качественное наблюдение. Пока безостановочно падающий субъект из $r = r_1$ достигнет $r = \rho$, он согласно (5.2.4) затратит бесконечно много времени $t = \infty$, ибо $arth1 = \infty$. Но интеграл (5.2.3) сходится в $r = \rho$, значит, тот же субъект затратит времени τ конечный промежуток! Наиболее разителен такой мысленный эксперимент. Пусть внешний наблюдатель s, живущий во времени t, посылает световой луч l и материального наблюдателя (геодезического) m по направлению к $r = \rho$. Тогда для самого s пройдет бесконечно много времени $t = \infty$, прежде чем луч l

достигнет $r = \rho$, а для наблюдателя m пройдет небольшой конечный промежуток времени τ, прежде, чем он встретится с последствиями (следами) того, что l пересек $r = \rho$.

Общее, что объединяет логарифмическую переградуировку и чернодырную — это качественное уравнивание конечного с бесконечным. Следующий пример свободен от такого прыжка. В релятивистской космологии известна безразмерная функция $R(t)$, входящая в метрику Робертсона-Уолкера (см. § 10.5). Мыслимо такое преобразование координатного времени t (обычно принимаемого за космологическое время):

$$t \mapsto \tau = \int_0^t \frac{dt}{R(t)} \qquad (5.2.5)$$

Мотивировку этого преобразования см. в § 10.5, она связана с «радарной одновременностью» § 10.1. В большинстве космологических теорий при $t = 0$ функция $R(t)$ тоже обращается в ноль, при этом для малых t асимптотически $R(t) \sim t^{2/3}$ («холодная вселенная»), или $R(t) \sim t^{1/2}$ («горячая вселенная»), или $R(t) \sim t^{1/3}$ («ультраплотная вселенная»). Поэтому во всех названных моделях интеграл (5.2.5) сходится в нуле, а следовательно, конечный промежуток $(0, t)$ преобразуется в конечный же $(0, \tau)$. Но численные величины при этом резко меняются. Например, для случая горячей вселенной известны такие стадии эволюции (в координатном времени t): «адроаная» $0 < t < 10^{12}$ сек., «лептонная» $10^{-6} < t < 10$ сек., «фотонная» $10 < t < 10^{12}$ сек., затем уже современная. При указанной переградуировке в τ-шкале соответственные интервалы могут принять вид: «адронная» $0 < \tau < 10^5$, «лептонная» $10^5 < t < 10^8$, «фотонная» $10^8 < \tau < 10^{13}$. Здесь наиболее значим не сдвиг начала «современной» стадии существования, а то, что во много раз больше времени отводится на начальную стадию. А в большинстве физические реакции (превращений гелия и пр.) крайне чувствительны именно к длительности того промежутка времени, пока они идут. Они идут из-за такой-то плотности вещества, которая остается одной и той ж« в обеих градуировках времени. Значит, достаточно переградуировать часы, чтобы совершенно изменить представления о ходе физических реакций на начальной, предопределяющей стадии развития вселенной. Тем самым полностью изменилась бы интерпретация того, что нам удается наблюдать в настоящее время.

3^o. Время как одномерная ось. Таким образом, мы говорим о времени в универсуме, о времени в мире, когда мы весь многоразличный мир с его пространственными, гравитационными, электрическими, метаболическими, почвенными, генетическими, химическими, психическими, нравственными, магическими, административными характеристиками ПРОЕКТИРУЕМ НА ОДНУ ОСЬ, на линейно-упорядоченную прямую (или окружность). Это сведение, редукция к одномерности — необходимое условие, чтобы можно было говорить о времени.

Но недостаточное. Ибо не всякое сведение к одномерности, не всякая проекция (проектирование) имеет касательство ко времени. Например, на ось абсцисс можно спроектировать «толщину»«, но «время» тут но при чем. Лишь то проектирование, которое имеет отношение к словоупотреблению «раньше—позже», касается термина «время». При этом должны быть согласованы два «раньше»: одно, относящееся следованию событий во внешнем универсуме, и другое, относящегося к следованию событий в избранном нами (т.е. избранном субъектом познания) линейно-упорядоченном множестве.

При ситуации $L \not\subset U$ упорядочивающий субъект $(L_3 = k)$ сам не мыслит себя относящимся к тому миру-универсуму, который он трактует. Внутренняя (психическая или иная) упорядоченность $\prec$ для L никак, может быть, не зацеплена за внешнюю, «объективную» упорядоченность в $(U, <)$. Например, так бывает при воспоминаниях: «То видит он: на талом снеге, как будто спящий на ночлеге, недвижим юноше лежит... То видит он врагов забвенных, клеветников и трусов злых и рой изменниц молодых, и сельский дом...» В реальной жизни Онегина сначала были петербургские враги, клеветники, изменницы, а лишь потом — убитый Ленский, «сельский же дом» был не в конце, но в середине.» Однако его субъективная упорядоченность $\prec$, как и сам поток его мыслей-чувств, не доминируется внешней календарной упорядоченностью $<$ и не вкладывается во внешние события универсума событий из поэмы.

В какой мере «время субъективно», а в какой оно «объективно»? Переводя этот вопрос в термины понятийных конструктов, с которыми только и работаем мы, надо переформулировать его следующим образом. Дан универсум $(U, <)$. Спрашивается, существуют ли такие ОДНОЗНАЧНЫЕ конструкции-операции над $(U, <)$, которые позволили бы (или даже лучше выразиться «заставили» бы) придти к однозначно-определяемому линейно-упорядоченному множеству $(L, \prec)$, где отношение $\prec$ однозначно бы определялось через отношение $<$. Если ответ положительный, то в таком мире-универсуме линейное время и его течение в определенном смысле «объективны». Если ответ отрицательный, то в этом мире выбор времени либо невозможен, либо диктуется какими-то посторонними миру соображениями, т.е. «не объективен». Исторически сложилось так, что математически-точные модели, изучавшиеся в физике XVII—XIX столетий, относились к разряду по сути линейно-упорядоченных моделей (см. § 6), т.е. таких, где ответ на наш вопрос положительный. Поэтому распространилось психологическое убеждение, укоренились традиции преподавания, опирающиеся на презумпцию «объективного существования времени». Возникшая позже «теория относительности» вынуждена была либо бороться, либо считаться с этим предрассудком.

4°. Интервальная датировка событий. Рассмотрим сначала один подслучай намеченного общего вопроса. Пусть дан универсум $(U,<)$ и в нем выделено линейно-упорядоченное подмножество $(L, \prec)$. Спрашивается, можно ли всякому событию $x \in U$ сопоставить событие $x \in L$ в качестве некоторой «даты» с соблюдением упорядоченности; кроме того требуем, что если $x \in L$, то $x = x$.

Возьмем $x \notin L$. Если бы мы определили его дату x так, что она принадлежала бы прошлому для x (т.е. $x \in \bar{x}$), то мы сразу же пришли бы к противоречию. В самом деле, в $L \cap x^{-}$ найдется y при $x < y$. Из того, что $y < x$, следует, что $y < x$, но $y = y$ и, таким образом, $x < y < x$! Следовательно, $x \notin L \cap x^{-}$ и аналогично $x \notin L \cap x^{+}$. Иными словами, если обозначить $p_x = L \cap \partial x^{-}$ и $q_x = L \cap x^{+}$, то все допустимые даты для x лежат в замыкании интервала $\overline{(p_x, q_x)}$. Приходим к такому определению:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. ИНТЕРВАЛЬНОЙ ДАТОЙ $(p, q)_x$ СОБЫТИЯ $x \in U$ в темпоральном потоке $L \in U$ называется

$$(p,q)_x = L \cap (p,q) \qquad (5.4.1)$$

$$p, q \in L \ \& \ x \in (p, q)$$

Вот другое раскрытие того же определения. Пусть $x \in U$. Найдем на L пару событий p, q, в какой-то мере «датирующих» x, именно, следующим образом: $p < x < q$. Это грубая датировка, сообщающая нечто вроде того, что x произошло после смерти императора Нерона и до смерти генералиссимуса Сталина. Кстати, в некоторых моделях уже и такая датировка невозможная, ибо в них $x \notin (p, q)$ при всяких $p, q \in L$, тогда интервальная дата пуста: $(p, q)_x = \varnothing$. см. § 8.5—6. Но если нашлись такие p и q, то интервал $L \cap (p,q)$ может подвергаться уменьшению, т.е. дата может уточняться. Именно, внутри него могут найтись p', q' такие, что $p < p' < x < q' < q$. Скажем, выясняется, что упомянутое выше событие случилось после того, как Сервантес попал в турецкий, плен, но до того, как царевич Алексей Петрович был убит на дыбе. Сужение промежутка почти в 20 по количественным меркам, но в нашей конструкции количественные масштабы отсутствуют. Продолжая неограниченное уменьшение, в силу связности интервала на L придем к тому, что существует предел (пересечение) всех таких интервалов. Этот предел может оказаться одной точкой, тогда по определению $(p, q)_x = x \in L$ причем можно доказать, что в этом случае $x = x \cap L$ (напомним, что $\bar{x}$ есть замыкание точки в интервальной топологии). Этот предел, наконец, может сам оказаться интервалом: $(p,q)_x = \overline{(p_x, q_x)} \cap L$. В этом случае, говоря содержательно, «дат больше, чем нужно».

Случай, когда $(p, q)_x = \varnothing$, отвечает варианту отсутствия глобального времени (при рассматриваемой датировке). Случай, когда $(p,q)_x = \overline{(p_x, q_x)} \cap L$» т.е. случай «размазанной даты», вошел в обиход с распространением специальной теории относительности. В этом случае датировать так, как поставлено в условиях задачи, можно, но, к сожалению, не единственным образом. В качестве претендента на дату события $x \notin L$ годится целый континуум дат $x \in \overline{(p_x, q_x)} \cap L$. Датировка (т.е. функциональное время) делается релятивной, и нет опоры, как из необозримого множества равноправных функциональных времен выделить «абсолютное», «единственное», «объективное». Наиболее удобен, конечно, случай, когда интервальная дата сводится к единственному событию $x = \bar{x} \cap L$. Вот тогда-то можно с уверенностью говорить, что существует абсолютное, инвариантное, объективное, прекрасное время. Оно получается проектированием всего универсума U на L по правилу: $x \mapsto \bar{x} \cap L$, т.е. всякому событию сопоставляется его интервальная дата. В этом и только в этом случае очень естественно и инвариантно следующее определение одновременности:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Говорим, что $x, y \in U$ ОДНОВРЕМЕННЫ, если их даты на L совпадают и сводятся к единственному событию.

Такое определение гораздо инвариантнее, нежели такое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Говорим, что $x, y \in U$. ОДНОВРЕМЕННЫ, если при функциональном времени t совпадают их даты $t_x = t_y$.

Мы не станем пользоваться ни тем, ни другим определением, разве что лишь иногда, в сопоставлении с другими, более удачными определениями.

Заметим, что на третьем уровне изучения, когда имеется абсолютный параллелизм и можно говорить про середину отрезка, появляется техническая возможность приписать событию x $\in$ L точную дату на L даже в том случае, когда его интервальная дата не сводится к точке. Именно, в том случае середину интервала (p_x, q_x) принимают в качестве даты, т.е. $t_x = \frac{1}{2}\left(t_q - t_p\right)$. Чаща всего так поступают, когда L отождествлено с R, причем в соответствие с установкой третьего уровня рассмотрения здесь числа из R определены не с точностью до произвольного упорядоченного гомеоморфизма, а с точностью до изотопного ЛИНЕЙНОГО преобразования. Чем выделяется именно середина отрезка сравнительно с другой внутренней точкой его, объяснено в [11], § 4.2. При такой датировке возникает некоторая избыточность: например, из $t_x = t_y$ следует x < y. Про эту радарную датировку см. [11]. Она уменьшает релятивность датировки, но не устраняет ее.

5º. Материальная точка или точечный наблюдатель. Операция, в некотором роде «обратная» операции проектирования всего универсума U на линейно-упорядоченное время L, заключается в инъектировании этого линейно-упорядоченного времени (темпорального потока) L в универсум U.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. ТОЧЕЧНЫМ НАБЛЮДАТЕЛЕМ l в универсуме (U, $\prec$) при данном линейно-упорядоченном времени (L, $\prec$) называется образ изотонного непрерывного отображения A: $L \mapsto U$, т.е. $l = \{x \in U \mid \exists y \in L \quad x = \lambda y\} = \lambda(L)$, где λ непрерывно $x \prec y \Rightarrow \lambda x \prec \lambda y$.

В геометрических терминах само непрерывное отображение λ: $L \mapsto U$ есть «путь». Рассматриваемое с точностью до произвольной изотонной репараметризации (реградуировки) своей области задания (L, $\prec$), оно в математике называется «кривая». Задание кривой A посредством ее образа $\lambda(L)$, вообще говоря, невозможное в неупорядоченном пространстве, оказывается возможным в упорядоченном универсуме для класса изотопных кривых. В литературе как синонимы понятия «точечный наблюдатель» встречаются и такие термины: «материальная точка», «мировая линия материальной точки», «изотопная кривая», «изотопный путь», «точечная частица», «таксон». Последний термин применительно к геологии (палеонтологии) предложил С.В.Мейен, имея в виду последовательность генетически связанных состояний одного биологического вида и т.п., см. [14].

На втором уровне изучения, когда все рассматриваемые кривые гладкие, т.е. обладают касательной (или кусочно-гладкие, что не меняет картины), соответственные кривые принято выделять не условиями на точки (вроде $x \prec y \Rightarrow \lambda x \prec \lambda y$), а условиями на касательную $\lambda_x p$ в точке P; условия берут в виде $\lambda_x p \in O_p^+$ или $\lambda_x p \in O_p^+$ или т.п. Соответствующие термины суть: «временноподобная кривая», «временная кривая», «каузальная кривая», «кривая с положительным касательным вектором», «временноподобная геодезическая», световая кривая», «нулевая кривая». На третьем уровне рассмотрения говорят: «временнодобная прямая», «инерциальная частица», «инерциальный точечный наблюдатель».

В случае, когда порядок в универсуме задан, как в § 1.3. локально на своих подобластях, изотопная кривая определяется не условием $x \prec y \Rightarrow \lambda x \prec \lambda y$, а более громоздким: она изотонна или антинна на каждой из областей (M_i, $<_i$) задания, а согласованность па пересечении областей делает это определение осмысленным, см. [9].

Технически бывает удобнее рассматривать кривую как заданную не на всем L, а на замкнутом отрезке $\overline{(p,q)} \cap L$. Это связано с тем, что линейно-упорядоченный замкнутый интервал в силу связности компактен, а само L

для случая строгого порядка не компактно. Тут возникают варианты задания $[p, q]$, $[p, q]$, $[p, q]$, но мы не будем входить в технические подробности.

Процедура определения «материальной точки» эксплицирует философскую идею «априори». Именно, мы априори принимаем некоторое линейно-упорядоченное $(L, \prec)$ за время, за темпоральный поток. Затем мы по определению (априори) принимаем, что в других местах, и у других «наблюдателей,» «частиц», «точек» ВРЕМЯ ТЕЧЕТ ТАК ЖЕ КАК в $(L, \prec)$. Это соответствует инъекции $L \mapsto U$. Мы выделяем умозрительно определенные подмножества из мира по образцу и подобию заранее назначенного нами линейно-упорядоченного множества $(L, \prec)$. В этом смысле «время» оказывается «априорной формой» нашего представления о том мире, который описывается словами «материальная точка», «частица», «точечный наблюдатель». Носитель самодовлеющего времени, т.е. чистой длительности $(L, \prec)$, мысленным актом переносит такую же длительность на описание ВСЕХ явлений-процессов вне себя. Живя здесь, на Земле, я полагаю, что на Сириусе (упрощенном до точечного объекта и соответственно обесструктуренном) собственно время течет так же, как и у меня: тут речь идет не о «скорости течения», не о градуировке часов, а исключительно о более первичных «линейной направленности» и «непрерывности» течения. Фраза «существует материальная точка» (или точечная частица) означает теперь, что нечто, связываемое с этой точкой, ДЛИТСЯ, И для любого нарушения длительности (возникновения, уничтожения, отсутствия) сравнительно с МОИМ темпоральным потоком $(L, \prec)$ нужны какие-то конкретный объяснения, требуется предъявить основания.

6^o. Конструкции из материальных точек. Собственно, наличие порядка $\prec$ приводит к тому, что произвольные кривые $\lambda : [0,1] \mapsto U$ распадаются на четыре специальных класса и один класс «общего положения». Первый — это те λ, у которых из $\xi < \eta$ следует $\lambda\xi < \lambda\eta$, т.е. $\lambda\eta \in (\lambda\xi)^+$. Они называются изотонными или временными. На втором уровне ($\lambda_*\xi \in O^+_{\lambda\xi}$) они называются временноподобными.

Второй класс — это те, у которых из $\xi < \eta$ следует $\lambda\xi \leq \lambda\eta$, т.е. $\lambda\eta \in (\lambda\xi)^+$. Они называются каузальными. На втором уровне ($\lambda_*\xi \in O^+_{\lambda\xi}$) они называются гладкими каузальными.

Третий класс — когда из $\xi < \eta$ следует $\lambda\eta \in \partial(\lambda\xi)^+$: они называются граничными (световыми). На втором уровне ($\lambda_*\xi \in \partial O^+_{\lambda\xi}$) они называются светоподобными.

Четвертый класс — те, у которых любые две точки ахронны. На втором уровне им отвечают те, у которых $\lambda_*\xi \notin \overline{O^-_{\lambda\xi} \cup O^+_{\lambda\xi}}$. Они обычно называются «тахионами». Процессы вдоль них распространяться не могут, они моделируют «мгновенное состояние бесконечно тонкого стержня».

Наконец, кривые общего положения — те, у которых для разных пар возможно всё перечисленное. Они обычно не изучаются в теории пространство времени, так как на втором уровне касательный вектор таких кривых должен был бы переходить через положение бесконечно большого импульса, что кажется неестественным. Кривые общего положения — это те, с помощью которых в теории гомотопий строятся группы. Можно думать, что, используя упорядоченные кривые, например, временноподобные, можно придти к упорядоченным группам гомотопий этого пока не делалось.

Первая задача, которая возникает в теории кривых, это вопрос о соотнесенности перечисленных восьми классов друг с другом. Этот вопрос полностью разрешен [11]. Не тривиально тут только одно: существуют гладкие изотопные кривые ($\lambda\xi < \lambda\eta$), у которых, однако, касательный вектор всюду световой ($\lambda_*\xi \in \partial O^+_{\lambda\xi}$). Иными словами, это точечные частицы, у которых мгновенная скорость в любую дату равна скорости света, но которые за коночный промежуток времени либо вовсе на перемещаются, либо перемещаются со скоростью, меньшей скорости света: см. § 10.4. Мы назвали их «вращающиеся фотоны». Наличие их существенно осложняет вариационную задачу в теории пространствовремени.

Следующий вопрос связан с соединимостью точек p и q при $p < q$, (или т.п.) посредством кривой соответствующего класса: с продолжимостью отрезка кривой (дуги) от p до q за q или в обратную сторону за p. Для положительного решения подобных вопросов требуется сверх ранее введенных аксиом ввести еще аксиому:

ТК$_8$. У всякой точки $p \in U$ имеется окрестность V такая, что $\overline{V}$ компактно.

Равносильная формулировка этой аксиомы локальной компактности состоит в требовании, что замыкание достаточно малого интервала компактно. При выполнении аксиом ТК$_{1—8}$ всякие две достаточно близкие точки p, $q \in U$, у которых $p < q$, можно соединить изотопной кривою λ. Всякую изотонную дугу можно продолжать за любой конец. Получив возможность вместо цепочек $\ldots \prec a_1 \prec \ldots \prec a_\mathrm{n} \prec \ldots$ говорить об изотопных или каузальных кривых, мы можем выразить различие между строгим порядком и цикличным локальным следованием как отсутствие или наличие ЗАМКНУТОЙ ВРЕМЕННОПОДОБНОЙ кривой λ. Иногда в литературе отсутствие замкнутой временноподобной называется «хронологическим условием», а отсутствие замкнутой каузальной называется «каузальным условием». Распространено также «сильное каузальное условие» — оно состоит в требовании, что при $\xi < \eta$ невозможно $\lambda\xi \in \overline{(\lambda\eta)^+}$. Фигурирует и «устойчивое каузальное условие», см. [17], а также § 1.4 и § 2.6.

На втором уровне изучения среди» всех гладких каузальных кривых обычно выделяется класс привилегированных кривых «геодезических», но делается это не за счет структуры порядка самой по себе, а за счет добавочных структур метрики и/или связности, см. § 2.3—5.

Философски самая важная конструкция из материальных точек — это «система отсчета». Геометрически она отвечает понятию «конгруэнция», топологически — понятию «разбиение».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. СИСТЕМОЙ ОТСЧЕТА $\wedge$ в универсуме $(L, \prec)$ с линейным временем $(L, \prec)$ называется такое множество $\wedge = \{l\}$ материальных точек $l = \lambda L$, что:

1) $\bigcup\limits_{l\in\wedge} l$ *{J C* является открытым множеством в U, (вариант: $u = Ul$);

2) для всяких различных $l, l' \in \wedge$ выполняется $l \cap l' = \varnothing$:

3) существует такая проекция $\pi : U \mapsto L$ при которой для каждой $l \in \wedge$ выполняется $\pi\,\big|_l \cdot \lambda = id$, т.е. если $x = \lambda t$, то $\pi x = t$).

Заметим, что от этой проекции π мы не требуем, чтобы она была изотонна на $(L, \prec)$: она будет изотонна на каждом $(l, \prec)$. Третье требование попросту предусматривает согласованность параметризаций на разных кривых из $\wedge$. Ведь на каждой из них порознь можно менять параметризацию с большим произволом (см. § 5.2), а для СИСТЕМЫ отсчета полагается систематическая согласованность.

Второй пункт определения позволяет ввести отношение эквивалентности $x \sim y{:}\ \Leftrightarrow \exists l$ и факторизовать U по ~, т.е. по $\wedge$. Результат факторизации $\dfrac{U}{\wedge}$ называется «пространством для универсума U (или для его подобласти Ul) относительно данной системы отсчета $\wedge$. Мы покамест оставляем в стороне вопрос, будет ли это «пространство» каким-нибудь из геометрических или топологических пространств, или всего лишь множеством. Но расщепление универсума U в виде $U = \mathrm{L} \times \left(\dfrac{U}{\wedge}\right)$, т.е.(в виде

ВРЕМЕНИ L и ПРОСТРАНСТВА $\frac{U}{\wedge}$ всегда возможно, коль скоро введена система отсчета.

На втором уровне рассмотрения материальные точки λ обладают касательными положительными векторами λ_*. Таким образом, в U задается неособое векторное поле: часто пользуются терминологией «ток вещества». Обычно на втором уровне рассмотрения систему отсчета так и определяют как невырожденное векторное поле, на области. В этом аспекте очень существенен следующий топологический (и одновременно философский) результат. На всяком псевдоримановом пространства сигнатуры (+ - ... -) и даже на всяком финслеровом пространстве такой сигнатуры СУЩЕСТВУЕТ невырожденное векторное поле. Так как интегральные кривые к нему порождают однопараметрическую группу Ли, то всегда можно удовлетворить третьему условию в определении системы отсчета (за счет выбора параметризации на l, отвечающей параметру группы Ли). Следовательно, пространствовремя обшей теории относительности (и даже в финслеровом обобщении) может быть разложено на собственно время и на собственно пространство. Разумеется, об однозначности этого разложения не приходится и мечтать. Конечно, в темпорально-неориентируемом случае это разложение осуществляется только локально (по областям), да и в темпорально-ориентируемом случае возможны сложности, ибо $\wedge$ может состоять частично из незамкнутых кривых, а частично из замкнутых. И, как уже отмечалось, про геометрические свойства такого «пространства» мы пока ничего хорошего сказать не можем. Ни в коем случае недопустимо сейчас отождествлять это «пространство» с какой-нибудь секущей ахронной поверхностью $t = \mathrm{cont}$ см. § 10.3—6. При всех этих и иных оговорках сохраняется познавательно важный факт, что в принципе такое расщепление возможно.

7º. Карты и координатные преобразования. С системами отсчета часто смешиваются системы координат или, как сейчас говорят, «карты». Что такое карта? Мы уже писали в § 2.1, что заданием гладкости F мы выделаем из всех непрерывных функций $f : M \Rightarrow R$ некоторый подкласс F. Поскольку мы имеем дело с конечномерным топологическим многообразием M_n, то число независимых функций $f_1, f_2 \ldots \in F$ не бесконечно, а равно в точности n. Взяв эти независимые на некоторой области D функции $f_1, \ldots , f_n$ мы видим, что функция-произведение $f_1x, \ldots , xf_n$ отображает D на некоторую $\vee \in R^n$ гомеоморфно. Вот это отображение и называется КАРТОЙ для M_n (область задания этой карты содержит D), а сами функции $f_1, \ldots , f_n$ при этом называются координатными функциями и обозначаются стандартно $x^1, \ldots x^n$. Их поверхности уровня $\{p | x^i (p) = const\}$ называются координатными поверхностями, а кривые пересечения $n - 1$ координатных поверхностей называются координатными кривыми (координатными линиями): вдоль них направлен дифференциал (допуская вольность речи, говорят «градиент») dx^i соответствующей координаты. Переход от одной карты к другой (на пересечении их областей) дается, как известно, невырожденным преобразованием

$$x^i \mapsto f^i\left(x^1,\ldots,x^n\right), \qquad 1 \le i \le n \tag{5.7.1}$$

$$\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^k}\right) \ne 0 \tag{5.7.2}$$

При принятом функциональном подходе (5,7,2) доказывается как теорема, при распространенном подходе, в котором карты принимаются за первичный объект, условие (5.7.2) постулируется. Напомним очень существенное требование: область задания каждой $f \in F$, а, следователь но, всякой x^i, непременно открытая. Обычно принято «новые координаты» обозначать $x^{i'}$ отмечая их новизну штрихом, а производные писать $\frac{\partial_k : \partial}{\partial x^k}$ и обозначать

$$D_k^{i'} := \partial_k f^{i'} \qquad \mathbf{(5.7.3)}$$

В этих обозначениях (5.7.2) выглядит $\det\left(D_k^{i'}\right) \neq 0$.

Соблазн отождествить «карту» и «систему отсчета» возникает следующие образом. Выберем за первую координатную функцию то значение *t*, которое фигурирует в пункте 3 определения 13, а на поверхности *t* = *const* зададим координаты, исходя из пространства $\frac{U}{\wedge}$. Вот и получили карту, совпадающую е системой отсчета в какой-то мере, значит, можно их отождествлять. Позже на примерах § 6.5 и § 10.3—6 вскроется много подводных камней в таком рассуждении. Пока же мы ограничимся тем очевидным соображением, что в произвольной системе координат ни одна координатная линия НЕ ОБЯЗАНА быть линией тока вещества, а в системе отсчета — каждая координатная линия, вдоль которой изменяется только *t,* является линией тока этой системы отсчета. Множество всех «систем координат» гораздо обширнее, нежели множество всех «систем отсчета». Второе отличие этих понятий — на метатеоретическом уровне. Карта (система координат) есть ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ математическое понятие, посредством которого удобно описывать гладкие многообразия, но при сильном желании можно обойтись и без него. Оно не имеет физической интерпретации. Система же отсчета — это математическая экспликация определенных физических ПРОЦЕДУР.

С незаконным отождествлением этих двух понятий и связан так называемый «принцип ковариантности», одно время широко фигурировавший в физике. Дело в том, что все математические объекты, представленные в римановой геометрии, суть векторы и тензоры. Их нельзя задать одним числом или набором чисел, ибо в разных картах им отвечают разные системы чисел. Например, вектор A^c преобразуется по закону:

$$A^i \mapsto A^k D_k^{i'} \qquad (5.7.4)$$

(где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам), тензор g_{ik}, (называемый метрическим) — по закону:

$$\mathrm{g_{ik}} = \mapsto g_{ik} D^{i}_{i'} D^{k}_{k'} \qquad (5.7.5)$$

тензор $R^{i}{}_{jnb}$ (называемый тензором кривизны) — по закону:

$$R^{i}_{jkb} \mapsto R^{i}_{jkb} D^{i'}_{i} D^{j'}_{j'} D^{k}_{k'} D^{l}_{l'} \qquad \mathbf{(5.7.6)}$$

«Принцип ковариантности описания» требовал, чтобы ВСЕ физические переменные, встречающиеся в рассуждениях, и все охватывающие их уравнения преобразовывались бы по такого рода законам. Поскольку те же физики, что говорили о принципе ковариантности, УЖЕ выбрали своим инструментом риманову геометрию, постольку «принцип ковариантности» превращался в требование, чтобы в геометрии фигурировали только геометрические объекты, т.е. в тавтологию «масло масляное». Единственный смысл, который можно усмотреть в принципе ковариантности — это метатеоретическое требование, чтобы физические закономерности описывались бы аппаратом геометрии.

Смешение систем отсчета о системами координат и полная вседозволенность в преобразовании последних породило ошибочное, но распространенное и устойчивое мнение о якобы «равноправии всех систем отсчета». Теории пространстве времени придали нелепое название «теории относительности» Было множество попыток сформулировать «принцип эквивалентности» который разрешил бы считать равноправными любые две системы отсчета. Критические контрпримеры к этим формулировкам привели к тому, что «принцип» сузился до локального, а, строго говоря, ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОГО принципа, суть которого состоит в том, что про одного единственного точечного наблюдателя говорят как о «системе отсчета»: чаще всего фигурирует «падающий лифт». Некорректность такого словоупотребления в том, что точечный наблюдатель (материальная точка) есть понятие ОДНОМЕРНОЕ, а система отсчета есть понятие n-МЕРНОЕ:

она, грубо говоря, состоит из (*n-1*)-мерного множества одномерных наблюдателей.

8º. Частные случаи преобразований — полуримановы геометрии. Применительно к системе отсчета абстрактные пре образования (5.7.1) допускают уточняющую модификацию. Вообще-то в системе отсчета допустимы все карты, которые допустимы в соответствующем многообразии. Но в ней имеется еще класс ПРИВИЛЕГИРОВАННЫХ карт, класс естественно выделенных координатных систем. Именно, это класс тех карт, у которых первая координатная линии x^1 совпадает с мировой линией тока вещества этой системы отсчета, т.е. с t в определении 13. Если обозначить вектор тока A^i, то названный признак равносилен требованию, чтобы в этой координатной системе он имел бы вид A^i = = $(a, 0, \ldots , 0)$, т.е. чтобы координатные линии функции $x^\mu (x^1, \ldots, x^n)$ при $2 \le \mu \le n$ не зависели бы от x^1. Так как не одна карта, а все карты данного класса должны удовлетворять этому требованию, то получаем, что при переходе к другой допустимой координатной системе проекция A^i на плоскость переменных $x^2, \ldots , x^n$ должна сохраняться прежней, т.е. должна оставаться равной нулю: $A^{\mu^1} = 0$ $(2 \le \mu \le n)$, что в силу (5.7.4) означает A^1 $D^{\mu^1} = 0$ и что возможно только при

$$D_1^{\mu^1} = 0 \ \& \ D_1^{\mu} = 0 \qquad (5.8.1)$$

При этих и только этих условиях оказывается возможным, чтобы $\partial_1 x^\mu = 0$ во всех картах данного класса, ибо $\partial_{1'} x^\mu = D_{1'}^{1}, \partial_1 x^\mu + D_1^\nu \ , \partial_\nu x^\mu$. Условиями (5.8.1) выделяются ДОПУСТИМЫЕ (согласованные с током вещества) карты в системе отсчета. Общие формулы см. (12.4.1). Итак, координаты преобразуются по формулам

$$x^1 \mapsto f^1\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$$

$$x^\mu \mapsto f^\mu\left(x^2, \ldots, x^n\right), \qquad 2 \le \mu \le n \qquad (5.8.2)$$

вместо (5.7.1). Математическая задача, возникающая при этом, — изучить объекты и структуры, согласующиеся с преобразованиями (5.8.1—2), в том смысле, в каком векторы-тензоры согласовывались в формулах (5.7.4—6) с (5.7.1), условие (5.7.2) не меняется. Эти объекты получили название «флагтензоров» и похожи на тензоры вплоть до совпадения отдельных формул. В физике в этой связи чаще всего используется терминология «монадный метод» [3], «трехмерный формализм», «хронометрические инварианты» [4].

Объединение аппарата флагтензоров с идеей «метрики» приводит к «полуримановой геометрии» [8]: в разбираемом случае тока вещества это V_4^3, Самостоятельное определение полуримановой геометрии V_n^m будет дано в гл. 4, § 13.1. Сейчас мы изложим один из внешних способов задания ее структуры.

В обычном псевдоримановом пространстве ${}^3V_4$ с метрикой g_{ik} имеем поле A^i тока вещества. Заданием его сразу определяется несколько индуцированных метрикой структур: ОДНОМЕРНАЯ МЕТРИКА $h_{1'}$, получающаяся ограничением g_{ik} на линию тока поля A^i : ТРЁХМЕРНАЯ МЕТРИКА $h_{\alpha\beta}$, получающаяся как метрика бивекторного пространства $A \wedge V$, т.е.

$$h_{\alpha\beta} X^{\alpha} X^{\beta} := \frac{1}{g_{ik} A^i A^k} \left(g_{ij} \wedge g_{kl} A^i \wedge X^k A^j \wedge X^l \right) =$$

$$= -g_{ik} X^i X^k + \frac{A_i X^i A_k X^k}{g_{ik} A^i A^k} \qquad (5.8.3)$$

и ТРЕХМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

$$g_{ik} A^i Y^k = 0 \qquad (5.8.4)$$

векторов Y ортогональных направлению A. (В формуле мы допустили вольность обозначений, записывая $A^i \wedge X^k$ вместо строгого $(A \wedge X)^{ik}$, но она не приведет к недоразумениям.) Как отмечалось в § 5.6, возможна факторизация по интегральным линиям α векторного поля A; эта факторизация здесь оказывается локально-тривиальным расслоением, и все формулы (5.8,1—4) согласуются с этим расслоением. Тензор $h_{\alpha\beta}$ задан в базе расслоения, тензор h_{11} задан в слое. Перечисленная совокупность объектов и есть «полуриманова геометрия V_4^3, а комплект ($h_{\alpha\beta}$, h_{11}, $g_{1\alpha}$) трех объектов называется ее метрическим фпагтензором h_{ik}. Далее вводятся «флагаффинная связность», «флагтензор кривизны» — с чуть другими законами преобразований и свойствами, нежели в § 5.7.

§ 6. НЬЮТОНОВСКИ УПОРЯДОЧЕННЫЙ УНИВЕРСУМ

1. Постулат однозначной датировки. Рассмотрим интервал (a, b) и некоторую материальную точку (кривую λ) l от a до b, Может ли этот точечный наблюдатель, «время которого течет так же», как в объемлющем универсуме (т.е. $< \equiv\prec i$, доставить «время для универсума»? Причем время однозначное? Инвариантное в том смысле, чтобы определение не допускало бы никакого вариирования результата? Иными словами, мы интересуемся, возможна ли интервальная датировка событий из (a, b) на l так, чтобы каждому $x \in$ (a, b) сопоставлялось бы ЕДИНСТВЕННОЕ, событие $\lambda_x = l$. Обращаясь к § 5.4, мы должны сформулировать следующий

НЬЮТОНОВ ПОСТУЛАТ. Пусть $x \in (a, b)$ и $\lambda : [0, 1] \mapsto (a, b) \cup a \cup b$ непрерывно, изотонно и $\lambda_o = a_1$, $\lambda_1 = b$. Тогда найдется число $\xi \in (0, 1)$ такое, что $\forall_y \in (a,b)\ y < x \ \Rightarrow y < \lambda\xi$ и $\forall_y \in (a,b)\ x < y \ \Rightarrow \lambda\xi < y$.

Это очевидно единственное число ξ (или его образ $\lambda_x = \lambda\xi$) будем называть НЬЮТОНОВОЙ ДАТОЙ события x во времени наблюдателя $l \subset (a, b)$. Ясно, что если $x < y$, то $\lambda_x < \lambda_y$, а потому интервальная дата любого события $x \in l$ сводится к единственной точке $x = (p, q)_x = \lambda_x$. Очевидно также, что события x и λ_x, если не совпадают, то ахронны. Нами уже отмечалось, что $x = x \cap l$. Наконец, если выполнен ньютонов постулат, то для всяких пар ахронных событий $x < y$ & $y < x$ справедливо $y \in \bar{x}$ и $x \in \bar{y}$. Этот класс отношения эквивалентности, введенного в § 1.4, заслуживает отдельного наименования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Говорим, что $x, y \in (a, b)$ абсолютно одновременны, если $y \in \bar{x}$.

При ньютоновом постулате точки ахронны тогда и только тогда, когда они абсолютно одновременны. Факторизуем интервал (a, b) по отношению $y \in \bar{x}$ абсолютной одновременности. Нетрудно проверить (см. *[9]),* что верна

ТЕОРЕМА 6. Фактор множество $\frac{(a\,,b\,)}{y \in \bar{x}}$ с фактор отношением порядка $\frac{<}{y \in z}$ является линейно-упорядоченным со строгим порядком множеством, удовлетворяющим аксиома $\text{ТК}_{1—3,6,7}$ «темпорального потока», «субстанциального времени», см. § 4.1. Каноническое отображение $(a\,,b\,) \mapsto \frac{(a\,,b)}{y \in \bar{x}}$ является функциональным временем, см. § 5.1. При последнем отображении всякой дате $t_p \in L = \frac{(a,b)}{y \in \bar{x}}$ отвечает слой событий из $(a,\ b)$, которые взаимно абсолютно-одновременны, т.е. $t_p = \{x \in (a,b)\ |x \in \bar{p}\}$. Это — замыкание точки в интервальной топологии. Как отмечалось в § 1.4, можно взять любую точку из слоя — замыкание будет одинаковым. Для разных дат эти слои, вообще говоря, могут быть разными даже по мощности множеств. Но если они всюду одинаковы, то можно говорить про то, что универсум (ньютонов!) $(a,\ b) \subset U$ является косым произведением времени L на типичный слой t_x, но даже в этом случае еще нельзя говорить, будто U есть прямое произведение $L \times t_x$. Ведь мы умеем приписывать событию $x \in U$

только абсолютную дату t_x, но не «абсолютное положение» в слое t_x.

В случае, когда порядок задан у нас локально, мы при факторизации дополнительно склеиваем (отождествляем) те множества, которые совпадают на пересечении разных порядков в соответствие с ТК$_{4—5}$.

На втором уровне рассмотрения самым главным в определении ньютонова пространствовремени выступает наличие гладкой проекции π универсума $U = M_n$ на линейно-упорядоченное одномерное многообразие: здесь принято считать все слои диффеоморфными. В самом лучшем случае можно говорить о локально-тривиальном расслоении универсума M_n на $(n\text{-}1)$-мерные слои одновременных событий, базой которого (расслоения) служит одномерное время.

2º. Примеры ньютоновых кинематик. Рассмотрим четырехмерное аффинное пространство с координатами (t, x, y, z) и порядком

$$(t, x, y, z) < (t', x', y', z'): \Leftrightarrow t < t', \qquad (6.2.1)$$

см. рис. 3. Собственно-пространственные координаты x, y, z здесь (как и в порядке (1.1.1)) несущественны для выяснения ЧТО раньше, а ЧТО позже. Важна только темпоральная координата t. Время тут R^1 — бесконечно. Слой — трехмерное пространство $\{(x, y, z)\}$. Это простейший случай, который с известной вольностью обозначается R^1_4 как полуэвклидово пространство.

На цилиндре порядок зададим формулой. (1.2.2), см. рис. 8. Напомним, что темпораты отождествляются, например, по модулю 4, как в (4.4.3). Это случай, который локально совпадает с (6.2.1), но глобально отличается устройством времени — оно здесь замкнуто, имея вид $\S'$. Слой для удобства мы выбрали одномерным, но это не существенно. С некоторой вольностью обозначаем этот случай $\S^1_2$ как «полусферическую геометрий», «полуантидеситтеров мир».

Точно той же формулой ньютонов порядок задается на торе, получаемом из предыдущего цилиндра отождествлением $(t, x) \sim (t, x + 3k)$, k

$\in N$. Но этой формулой нельзя ввести никакого порядка $<$ или $\prec$ на листе Мёбиуса, получаемом из R^2 отождествлением $(t, x) \sim (- t, x + 3 k)$. Дабы локально ввести ньютонов порядок на листе Мёбиса, надо поступить аналогично (1.3.1), задавая

$$\begin{aligned} &(t, x) <_1 (t', x') :\Leftrightarrow t < t' \ \&\ 0 < x, x' < 2, \\ &(t, x) <_2 (t', x') :\Leftrightarrow t < t' \ \&\ 1 < x, x' < 3, \\ &(t, x) <_3 (t', x') :\Leftrightarrow t' < t \ \&\ 2 < x, x' < 4, \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

см. рис. 9. Во всех этих случаях ось темпорат t выступает как представитель базы расслоения и условие абсолютной одновременности событий p и q координатно представлено равенством темпорат $t_p = t_q$.

Вот пример, где спой абсолютно одновременных событий криволинеен. В трехмерном пространстве, описываемом полярными координатами (ρ, φ, ν), зададим порядок формулой

$$(\rho, \varphi, \nu) < (\rho', \varphi', \nu') :\Leftrightarrow \rho < \rho' \tag{6.2.3}$$

Тогда радиус-вектор ρ_x точки x оказывается ее темпоратой $t_x = \rho_x$, а сферы с % центром в нуле суть 2-поверхности одновременности. Аналогично можно поступить для более сложного вида поверхностей.

3º. Равносильные формулировки ньютоновости. Мы определили ньютоново упорядочение через вспомогательного наблюдателя на материальной точке. Это такое упорядочение, при котором какой-нибудь наблюдатель l, прибегающий к интервальной датировке, может однозначно датировать все события (и тогда тоже будет верно применительно к любому наблюдателю). Так нагляднее, но логически это введение наблюдателя избыточно. Без доказательств приведем ряд критериев, когда $(U, <)$ является ньютоновым универсумом.

Пусть точки $p, q \in U$ достаточно близки (топологически, т.е., например, содержатся в одном интервале). Оказывается, что Ньютонову Постулату равносилен следующий: ПОСТУЛАТ (ПРИНЦИП) ДАЛЬНОДЕЙСТВИЯ.

Если p и q ахронны, то всякое x, предшествующее p, предшествует q.

Почему это «принцип дальнодействия»? Да потому, что на каузальном языке он означает: если p и q. не связаны причинным воздействием (и, значит$_x$ подразумевается, разделены каким-то конечным пространственным промежутком), то я могу из x при $x < p$ послать воздействие, которое проявится результатом в q, несмотря на то, что промежуток xp произвольно мал (сколь угодно мал, бесконечно мал). Тут «расстояние» между p и q никак не ограничивает возможности воздействия из $x < p$.

Верна и двойственная формулировка: если p и q ахронны, то всякое x, следующее за p, следует за q. Верна и объединяющая формулировка: если p и q, ахронны, то всякий интервал (p', q'), содержащий p, содержит и q. Все три утверждения эквивалентны (при выполнении аксиом ТК$_{1\text{—}3}$) ньютонову постулату.

Из последней формулировки вытекает ужасное для топологии следствие. Интервальная топология T оказывается в ньютоновом мире неотделимой. У точки p нельзя найти окрестности, которая содержала бы p, но не содержала бы ту точку q, для которой $p < q$ & $q < p$. Ведь замыкание $\overline{p}$ точки p состоит не из одной p, а из множества ВСЕХ точек, одновременных p, т.е. $\overline{p} = \overline{p^+} \cap \overline{p^-} \neq p$. Поэтому в ньютоновом упорядочении может существовать такая линейно-упорядоченная последовательыность $\alpha_1 < \ldots , < a_n < a,$ члены которой попадают во всякую окрестность точки ос (хочется сказать «последовательность сходится снизу к α»), но пределом которой в интуиитивном смысле явится точка b, не совпадающая с a. Наглядно эту ситуацию можно представить, изобразив все a, на одной кривой λ, где самой верхней точкой дуги λ будет точка b, но не $a \in \bar{b}$ и $\alpha \notin \lambda$.

Вернемся к термину «одновременно». В ньютоновом упорядочении две точки ахронны $p < q$ & $q < p$ & $p \neq q$ тогда и только тогда, когда они абсолютно одновременны $p \in \overline{p^-} \cap \overline{p^+}$. Поэтому можно говорить про одновременность, не уточняя, «с чьей точки зрения». В § 6.1. говорилось, что множество одновременных точек образует слой при переходе к фактор-пространству: каждый такой слой состоит из замыкания одной точки. Так как абсолютная одновременность есть отношение эквивалентности, то получаем, что ахронность транзитивна. Верно и обратное утверждение: если отношение $p < q \; \& \; q < p$ транзитивно на $(U, <)$, то выполняется ньютонов постулат.

Ньютоново упорядочивание позволяет оперировать терминами «настоящее», «будущее», «прошлое». Именно, в ныотоновом упорядочении не выполняется условие «различимости событий посредством прошлого (будущего)». Это условие, играющее важную роль в каузальной теории, состоит в требовании $\overline{x^+} = \overline{y^+} \Rightarrow x = y$ и/или двойственном. Но в ньютоновом мире для абсолютно одновременных x и y будет $x^+ = y^+$ и $x^- = y^-$. Поэтому сделалось столь привычным в выражении «будущее события p «опускать аргумент p, говоря просто «будущее». Пересечение прошлого и будущего, конечно, пусто для всякой $p \in U$ из-за антисимметрии отношения порядка, но пересечение замыканий прошлого и будущего данной точки» в ньютоновом упорядочении совпадает с замыканием ее, со слоем проекции. Такое хорошее множество $\bar{p}$ заслуживает отдельного наименования: естественно назвать его «настоящим события p». Опять же, оно сразу является настоящим НЕ ТОЛЬКО для p, но и для ВСЕХ x, одновременных p, т.е. для $x \in \bar{p}$. Следовательно, в каждую дату t_x ньютонов универсум распадается в сумму $x^- \cup \bar{x} \cup x^+$ «прошлого», «настоящего» и «будущего» ОТНОСИТЕЛЬНО ДАННОЙ ДАТЫ, а не относительно СОБЫТИЯ x, ибо ничего не изменится при замене x на y, если $t_x = t_y$. Уравнением $t = t_x$ задается «поверхность начальных данных», которая естественно отождествляется с «пространством», понимаемым как «мгновенное состояние универсума». Это очень простое — психологически — устройство мира. Именно таким образом понимал «пространство» Паладь (1901) и вслед за ним

Эйнштейн, тогда как Пуанкаре был ближе к пониманию «пространства» через систему отсчета, как говорилось выше.

В специфически топологических терминах сказанное можно выразить следующим образом. Рассмотрим $U \times U$ с топологией $T \times T$, где T интервальная, и рассмотрим множество $A = \{(x, y) \mid x < y\}$.

ТЕОРЕМА 7. Если универсум (A, <) упорядочен ньютоновски, то подмножество $A \subset U \times U$ всюду плотно в ($U \times U$, $T \times T$).

4°. Время и часы в ньютюновом мире. Функциональное время (см. § 6.1, есть изотонное непрерывное отображение $U \mapsto L$, а часы $U \mapsto R$. Из $x < y \Rightarrow fx < fy$. по непрерывности для предпорядка ≤ (см. § 1.4) следует, что $y \in \overline{x^+} \Rightarrow fx \leq fy$, а по определению одновременности в ньютоновом случае получается: если x и y. одновременны (ахронны), то $fx = fy$. Это означает, что всякие часы в ньютоновом универсуме согласуются с проекцией универсума при факторизации его по одновременности $U \mapsto \frac{U}{p \in q} =$. Отсюда вытекает, что любое время, любые часы в ньютоновом случае сводятся ко времени, к часам над фактор-универсумом $\frac{U}{p \in q} =$, а последний — линейно-упорядочен. Следовательно, все богатство часов в ньютоновом мире сводится к функции от одной переменной — к функций от темпораты, к реградуировкам § 5.2, а «пространственные координаты» остаются незначимыми для часов и проблемы времени. Как будет видно в § 8.9, для эйнштейнова случая ситуация противоположная.

Все возможные изменения часов в ньютоновом универсуме сводятся к реградуировке $R \Rightarrow R$. Отсюда, в частности, вытекает, что на втором уровне рассмотрения дифференциалы (в точке) часов образуют одномерное пространство (функции одной переменной). Говоря технически, конус (клин)

O_p^+, имеющийся в ньютоновом случае, раздувается до полупространства, опирающегося на положительно ориентированную сторону той гиперповерхности, о которой говорилось в последнем примере § 6.2. Функции же, положительные относительно конуса, это те, линии уровня которых являются опорными для конуса. Клин, совпадающий с полупространством, допускает единственную опорную плоскость — ту, на которую это полупространство опирается. Это и есть единственная (с точностью до тривиальных растягиваний) положительная функция в ньютоновом случае.

Так мы второй раз (первый — неотделимость интервальной топологии) сталкиваемся с НЕУДОБСТВОМ ньютонова упорядочивания для сугубо математических конструкций. Неудобство состоит в том, что для многомерного (например, четырехмерного) случая существенными оказываются функции только ОДНОЙ переменной: математически это подпадает под разряд «вырождения», а потому не может быть трактовано РЕГУЛЯРНЫМИ средствами (аппаратами), и остается за гранью привычного изучения, тогда предполагается невырожденность якобианов или т.п. Но так как психологически и исторически случай сей крайне важен, то изучение его сделалось добычей дилетантов и соединяется со множеством нелепых домыслов.

5º. Система отсчета в ньютоновом мире и полуриманова геометрия. Возвращаясь к определению системы отсчета из § 5.6, рассмотрим семейство $\wedge$ отображений $\lambda : (0,1) \mapsto U$, покрывающее всё U без пересечений.

В силу ньютонова постулата каждому событию $x \in U$ отвечает на каждой $l = \lambda\ (0,\ 1)$ однозначно некоторая дата l_x; она получается пересечением l с «поверхностью одновременности $\bar{x}$». Поэтому третье условие в определении системы отсчета выполнено автоматически. Как мы упоминали, результат факторизации U по кривым $l \in \wedge$ естественно принять за «пространство». И здесь нас поджидает математическое крушение. Из-за неотделимости интервальной топологии для ньютонова мира НИКАКОЙ разумной топологии в фактор-универсуме $\frac{U}{\wedge}$ не образуется. Точнее, фактор-топология возникает, но в ней единственно» открытое множество — это все пространство $\frac{U}{\wedge}$. Такая «антидискретная» топология бесполезна. Поэтому в ньютоновом мире «пространство» остается множеством, не наделенным никакой структурой, естественно проистекавшей бы из структуры порядка и только из нее. Структурой, которая не была бы «навязана извне произволом». Тот же самый неутешительный результат получили бы мы, если бы за «пространство» захотели бы принять «мгновенное состояние мира», «сечение его поверхностью $t = t_0$». Ведь эта поверхность находится во взаимно-однозначном соответствии с фактор-универсумом $\frac{U}{\wedge}$— соответствие осуществляется кривыми l, каждая из которых пересечет $\bar{x}$ в единственной точке. И так как эта поверхность совпадает с $\bar{x}$, то на ней также порождается только антидискретная топология. Исторически, впрочем, это отождествление «собственно пространства» с гиперповерхность $t = t_0$, было психологически сделано и сыграло — и играет — важную роль в осмыслении физических результатов, а что топологию сюда привлекают постороннюю, произвольно, внешним образом — не замечалось.

На втором уро вне рассмотрения ньютонов случай выглядит так. Это n-многообразие M_n, для которого определена проекция π: $M_n \mapsto M_1$, причем в касательном пространстве T_pM выделено одно полупространство, называемое положительным. В системе отсчета дополнительно задан вектор $X_p \in T_pM$ — касательный к кривой $l \in \wedge$, которая проходит через $p \in M$. Этот вектор направлен в положительное пространство. Говоря в модернистских терминах, проекция π задает (*n* - *1*) — распределение (интегрируемое), а X_p задает 1-распределение, трансверсальное (n - 1) — распределению.

Естественно, возникает желание уметь измерять как «промежутки времени» вдоль кривых *l*, так и «расстояния» в слоях $\overset{-1}{\pi}(\pi p) = \overline{p}$ (здесь $\overset{-1}{\pi}$ обозначает полный прообраз того, что справа). И тут видна неодинаковость «времени» и «пространства». В сипу теорем об интегральных кривых и их однопараметрических группах первому желанию удовлетворить легко и результат практически однозначен с точностью до незначительной реградуировки. Второму также можно удовлетворить в силу существования положительно определенной метрики на любом гладком многообразии — но ни о какой ОДНОЗНАЧНОСТИ сей метрики речи быть не может. Мы уже при переходе от первого уровня рассмотрения ко второму уровню произвольно приписали множеству одновременных событий какую-то хорошую ТОПОЛОГИЮ и ГЛАДКОСТЬ, а сейчас еще должны и выбрать МЕТРИКУ произвольно, среди богатого класса всех метрик.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Метризованной системой отсчета для ньютонова универсума называется система отсчета плюс метрики в базе и в слоях расслоения — при расслоении по абсолютной одновременности.

Преобразования координат, согласующиеся с расслоением *π*, таковы:

$$\begin{cases} x^1 \mapsto f^1\left(x^1\right) \\ x^2 \mapsto f^2\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \\ .... \; .... \; .... \; .... \\ x^n \mapsto f^n\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \end{cases} \qquad (6.5.1)$$

Ограничения на допустимые преобразования в обозначениях (5.7.3) выглядят так:

$$D^{1'}_{\mu} = 0 \,, \qquad D^{1}_{\mu'} = 0 \qquad (6.5.3)$$

что полезно сравнить о похожими, но другими (5.8.3). Общее для всех преобразований требование (5.7.2) приводит поэтому к двум новым:

$$D_1^{1'} \neq 0\,, \qquad \det\left(D_{\upsilon'}^{\mu}\right) \neq 0 \quad 2 \leq \mu, \nu \leq n \qquad (6.5.3)$$

Общие формулы см. (12.4.1). Мы видим, что часы (первая координата $x^1 = t$) преобразуется отдельно, независимо от пространственных координат.

Совокупность трех объектов: одномерной метрики g_{11} $\left(dt = \sqrt{g_{11}dx^1dx^1}\right)$, ($n$-1)-мерной метрики g_{μ}, $2 \leq \mu, \nu \leq n$ $\left(dt = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}\right)$ и компонент $g_{1\mu}$ (задающих (n-1)-распределение $dx_1 + g_{1\mu}dx^{\mu} = 0$) при преобразованиях (6.5.1—2), называется МЕТРИЧЕСКИМ ФЛАГТЕНЗОРОМ g_{ik} полуримановой геометрии V_n^1. Указанное в нем распределение имеет четкий физический смысл — это поле скоростей тока вещества в универсуме. В гладком случае касательные к кривым, предусмотренным определением 13 системы отсчета, существуют: следовательно, это поле есть. Обозначим $\alpha_{\mu} = g_{1\mu}(p)$, $2 \leq \mu \leq n$, $a = (1, a^{\mu})$. Итак, метризованная ньютонова система отсчета совпадает с полуримановой геометрией V_n^1 : ср. § 5.8 и § 13.1. Только подчеркнем, что класс допустимых координат выбирается здесь согласованным с абсолютной одновременностью (отношением порядка), а не как в § 5.8 согласованным с током вещества. Также отметим, что компоненты a_{μ} не вполне произвольны, а удовлетворяют требованию, аналогичному условию ковариантной постоянности метрического тензора, именно

$$\nabla_{\nu}a_{\mu} + \nabla_{\mu}a_{\nu} = 0\,, \qquad 2 \leq \mu \leq n \qquad (6.5.4)$$

На третьем уровне рассмотрения весь универсум обогащается аффинно-векторной структурой. База расслоения снабжается масштабом, а слои — эвклидовой (трехмерной) метрикой. Кроме того, в каждой точке $p \in U = A_{\mathrm{n}}$ существует 4-вектор выделенного («предпочтительного», «привилегированного») движения вещества — это вектор, касательный к мировой линии материальной точки из системы отсчета. В силу математического устройства полуримановой геометрии (см. § 13.1) компоненты a_μ не обязаны быть константами даже в случае абсолютного параллелизма, а условие (6.5.4) при замене ковариантного дифференцирования на обычную частную производную соответствует течению a жидкости без растяжения (без деформации: иногда $\partial_\mu a_\nu$ называют тензором малой деформации). Поэтому «система отсчета» в ньютоновом случае может быть достаточно общим течением вещества. Рассмотрим три примера.

Первый — «стационарная система» или «инерциальная система», когда ток вещества происходит по параллельным временноподобным прямым. Единственный параметр, описывающий систему — вектор $a = (1, a^\mu)$, которым задается пучок параллелей. Полуримановы параметры суть: $g_{11} = 1$, $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ и $g_{1\mu} = \frac{-1}{a^\mu}$. Собственно «пространство» есть результат факторизации аффинного пространства A_n по вектору a, причем удобнее среди всех изоморфных представлений этой факторизации взять бивекторное пространство $\alpha \wedge E_n$, где E_n — векторное пространство аффинного A_n. Главная проблема для разных инерциальных систем — это переход от одной системы к другой в зависимости от значения параметра α. Эти преобразования имеют вид:

$$\begin{cases} t \mapsto t + t_0 \\ x^\mu \mapsto \vee \mu t + x_0^\mu + Oy_\nu^\mu x^\nu \end{cases} \qquad (6.5.5)$$

где t_0 и x_0^μ — константы, Oy_ν^μ — группа эвклидовых вращений в (n-1)-мерном эвклидовом пространстве, а $\vee^\mu = \overline{a^\mu} - a^\mu$, когда a^μ и $\bar{a}^\mu$ суть и параметры одной и другой преобразуемых инерциальных систем. Другая проблема, связанная с системой отсчета, — это вопрос о группе ее собственных автоморфизмов: очевидно, что инерциальная система отсчета обладает *в* точности группой эвклидовых движений: вращений, переносов и отражений.

Терминологически очень важно различать между ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ ОТСЧЕТА и ИНЕРЦИАЛЬНОЙ ТОЧЕЧНОЙ ЧАСТИЦЕЙ. Последняя — это одна частица, т.е. линейно-упорядоченное множество. Первая — это система таких частиц, покрывающая мир. К сожалению, по той причине, что стационарная (инерциальная) система однозначно задается указанием одной единственной инерциальной частицы, принадлежащей этой системе, а также в силу большой распространенности именно стационарной системы в физике, — в литературе установилась неграмотная, но влиятельная традиция безбожно путать эти разные понятия. Считается, например, возможным указать ОДНУ материальную точку, например, свободно падающий лифт, чтобы рассуждать, как это ошибочно делал Эйнштейн, про «падающую систему отсчета». Все эти рассуждения с недоопределенными системами отсчета не обладают никаким доказательным значением.

Второй пример — «взрывная система» или, «раздувающаяся система. Здесь ток вещества задается тоже системой временных прямых, но не параллельных, а проходящих через фиксированное общее событие $0 \in A_n$. За универсум принимается лишь множество, покрытое полупрямыми после этой точки.

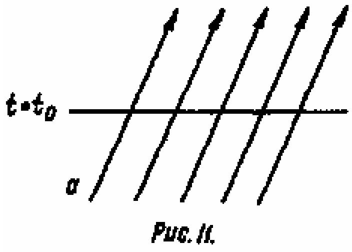


Рис.11.

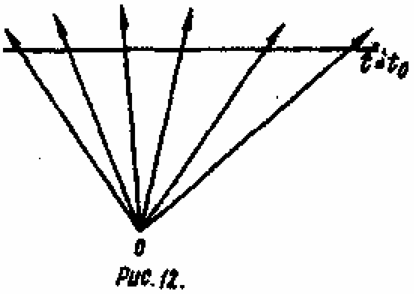


Рис.12.

Таким образом, мир в этой системе отсчета имеет очевидное событие «творения» (точку 0), когда «случился взрыв» и «началось разбегание». Никакого «центра мира» (выделенной прямой) или чего подобного не имеется. Группа автоморфизмов этой системы отсчета тоже совпадает с эвклидовой группой движений (в чем нетрудно убедиться, установив взаимно однозначное соответствие между сечением $t = t_0 > 0$ и множеством прямых, проходящих через О, посредством самих этих прямых). Эта система не обладает никакими параметрами, кроме самой точки О, а при изменении О меняется сам универсум, система же по сути не меняется. Таким образом, о переходах между разными взрывными системами речи идти не может.

Здесь важно следующее выходящее в область философии обстоятельство. Расстояние между двумя «точками « пространства» в этом случае — это параметр между двумя пересекающимися в O прямыми: он отвечает так называемому полуэвкпидову углу — углу на полуэвклидовой плоскости R_2^1. Нагляднее (и с некоторой утратой строгости) этот параметр отвечает разности скоростей для этих двух материальных точек $v_2 — v_1$. Это расстояние для двух фиксированных точек пространства СОХРАНЯЕТСЯ НЕИЗМЕННЫМ. Таким образом, «со своей колокольни» взрывная система почитает себя стационарной. И еще Пуанкаре поставил вопрос, который в переводе на наш пример звучит: как внутренним образом отличить взрывную, раздувающуюся систему от инерциальной, стационарной? Он пришел к выводу, что внутренних средств к такому различению НЕ ИМЕЕТСЯ. Правда, одно и то же явление в разных системах описывается по-разному. Скажем, движение по прямой $x^\mu = O$ описывается в инерциальной системе с параметром $x^\mu = O$ как покой: в инерциальной системе с параметром $a^\mu \neq 0$ как равномерное прямолинейное движение со скоростью — α: во взрывной системе это будет падание точки из бесконечности на точку $v = 0$, замедляющееся падение по закону $\frac{x^\mu}{t}$. Но какое из этих описаний — «верное»? Ну, для инерциальных систем мы установили преобразование (6.5.5), устраняющее различие между покоем и прямолинейным равномерным движением. Но и в инерциальной системе можно рассматривать движение по закону $\frac{x^{\mu}}{t}$, а в расширяющейся системе можно образовать покоящуюся материальную точку... Как выбрать «правильное»? Что происходит «на самом деле»? Пуанкаре ответил: в данном случае это вопрос КОНВЕНЦИИ. «Конвенция « же предполагает наличие социального субъекта, тех «тридацати сыновей лейтенанта Шмидта», которые заключают между собой конвенцию. Так Пуанкаре вышел на указание роли научных школ (мафий, содружеств) в решении вопросов, кажущихся объективными, Милн, с учетом этого, очень тщательно изучил взрывную систему как ПРОТИВО- и СОПОСТАВЛЯЕМУЮ инерциальной системе: об этом см. § 10.3—4.

Третий пример — вращающаяся система отсчета. Простоты ради рассмотрим ее в трехмерном случае, т.е. в координатах *(t, x, y*). Образуем следующую двупараметрическую (параметры ρ и α) конгруэнцию:

$$(t, x, y) = (t, \rho\cos(\alpha + \omega t), \rho\sin(\alpha + \omega t))$$

$$0 < \rho < \infty, \qquad -\infty < \alpha < \infty \ (mod\, 2\pi) \qquad (6.5.6)$$

с добавлением частицы (*t, 0, 0*). Здесь параметром всей системы является «угловая скорость» ω (в четырехмерном случае это был бы вектор, ось, которого у нас взята вдоль оси *z*). Никакие две винтовые пинии (6.5.6) нельзя совместить при разных значениях параметра ρ, поэтому данная система отсчета не обладает группой переносов (трансляций). Она обладает центром (осью) симметрии — частица (*t, 0, 0*) — и однопараметрической группой вращений вокруг этого центра. Ради устранения недоразумений обратим внимание на сбивающее с толку сходство. Пока речь идет о точках на 2-плоскости, параметры ρ и α воспринимаются законно как обыкновенные полярные координаты. Но когда речь идет о винтовых линиях в 3-пространстве, то о и *oi* суть параметры (координаты) этих винтовых линий, а разные винтовые линии не совмещаемы — в отличие от точек. Следовательно, пространство вращающейся системы отсчета, состоящее из винтовых линий (6.5.6) с координатами *(ρ, α),* не обладает эвклидовой группой автоморфизмов двумерного пространства, следовательно, не является эвклидовым. В спора Беркли с Ньютонам и в последовавшем полтора века спустя «решении» спора Махом это существеннейшее обстоятельство — НЕЭВКЛИДОВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА — было незамечено, а потому и «решение» оказалось не по существу.

6°. Автоморфизмы ньютонова темпорального универсума. Мы рассмотрели автоморфизмы некоторых наиболее значимых в истории физики систем отсчета в ньютоновом универсуме. Их не надо смешивать с автоморфизмами самого универсума, т.е. с автоморфизмами $(U, <) \mapsto (U, <)$. Рассмотрим два варианта таких автоморфизмов, причем ради простоты Изложения оба возьмем на первом уровне рассмотрения.

Первый — когда собственно пространство $\overline{p}$ не метризовано и не топологизованно. Тогда любое преобразование

$$\begin{cases} t \mapsto f(t) \\ x^\mu \mapsto h^\mu\left(t, x^2, \ldots, x^n\right), \qquad 2 \le \mu \le n \end{cases} \qquad (6.6.1)$$

где f — произвольная гладкая изотонная функция, а (h^μ) при всяком t обеспечивает взаимно-однозначное отображение множества R^{n-1} на себя, — сохраняет структуру порядка и является изотонным автоморфизмом.

Второй — когда собственно пространство $(x^2, \ldots, x^n)$ метризовано эвклидовой метрикой, а на времени введен масштаб. Тогда любое преобразование

$$\begin{cases} t \mapsto t + t_0 \\ x^\mu \mapsto h^{\wedge}(t) + Oy^\mu_\nu x^\nu \end{cases} \qquad (6.6.2)$$

где (h^μ) произвольная гладкая векторная функция $R \mapsto E_{n-1}$, а константы Oy^μ_ν определяют группу эвклидовых движений, как в (6.5.5), — является автоморфизмом, т.е. сохраняет структуру порядка и метрические структуры.

Для многих неожиданными выглядят НЕЛИНЕЙНЫЕ слагаемые в послед ней формуле. Они привыкли к «галилеевым преобразованиям

$$\begin{cases} t \mapsto t + t_0 \\ x^k \mapsto \vee \mu t + x_0^\mu + O y_\nu^\mu x^\nu \end{cases} \qquad (6.6.3)$$

Но последние — лишь частный случай преобразований (6.6,2). Дело в том, что в ньютоновом мире инерциальные частицы ничем не выделены среди прочих материальных частиц. Автоморфизмами (6.6.2) ньютонова упорядочения можно — даже при сохранении собственно пространственной метрики — совместить любые две материальные точки. Это обстоятельство не следует смешивать с совместимостью систем отсчета. Вообще говоря, нет автоморфизмов, при которых можно было бы совместить каждую материальную точку одной системы отсчета с какой-нибудь материальной точкой другой системы отсчета. Но эти разные вещи часто смешиваются. Инерциальные системы отсчета так привычны, так хороши, и для них верно (6.5.5), вот почему преобразования (6.6.2) малоизвестны.

Стоит обратить внимание на распространенное недоразумение, которое восходит к стилю мыслить — ОТДЕЛЬНЫМИ принципами, а не СИСТЕМАМИ аксиом-принципов, куда какой либо специально обсуждаемый принцип входит составной частью. Например, «принцип эквивалентности» (который не может быть сформулирован корректно для произвольных систем отсчета, но который хорошо работает для инерциальных систем) предусматривает возможность перейти от одной инерциальной системы к л (о бой другой инерциальной же так, что в описании мира ничего не меняется кроме значений конфетных параметров-имен). Нередко в поисках *х* противоречий в теории относительности рассматривают нечто вроде такого цилиндра: *{(t, x)}* при отождествлении *(t, x) ~ (t, x + 3)* и с порядком (1.2.2). Тогда материальная точка (*t, 0*) и материальная точка (*t, t*), имея общее событие (*0, 0*), встретятся в событии (3, 3) ~ (3, 0), а отсюда легко придти к противоречию, например, насчет собственных длин у «движущейся» и «покоящейся» частицы. Но это рассуждение некорректно. Галилеевы (и лоренцовы) преобразования выведены в предположении, что универсум гомеоморфене R^n, а тут фигурирует $R^{n-1} \times S^1$ (или $R^1 \times S^{n-1}$). У этих топологических объектов разные группы гомотопий. Или, говоря старинным языком: равноправие инерциальных систем отсчета утверждается в предположении, что «пространство однородно, изотропно и бесконечно», а тут нарушается последнее требование (и, в другом варианте, предпоследнее).

Еще одно замечание. В расслоенном многообразии $\pi : M_n \mapsto M_1$ при каждом t_0 в слое $t = t_0$. Задается метрика. Философски важен такой вопрос (который в иных терминах обсуждался Пуанкаре): пусть в каждом слое эта метрика $g_{\mu\nu}$ эвклидова, т.е. допускает координаты, в которых $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Одинаковы ли метрики в разных слоях? Меняются ли, иными словами, масштабы и транспортиры с течением времени? Можем пи мы заметить такие изменения? (Подчеркнем, что система отсчета здесь никакая не вводится. Рассматривается пространствовремя без фиксированного тока вещества.) В рамках обычной римановой геометрии ${}^3V_4$ ответить на этот вопрос невозможно. Но в рамках полуримановой геометрии V_4^1 условие $\nabla_1 g_{\mu\nu} = 0$ оказывается инвариантным при преобразованиях (6.5.1—2), хотя в привычной римановой геометрии бессмысленно приравнивать нулю выделенный набор компонент. Поэтому для ньютонова универсума, описываемого через V_n^1, МОЖНО отличить случай, когда $g_{\mu\nu}$ зависит от t, от случая, когда не зависит от x. Таким образом, здесь ответ на вопрос Пуанкаре утешителен для разума: можно соорудить понятийный конструкт, в котором постоянство эвклидова масштаба (при ньютоновости времени) отличимо от непостоянства.

7°. ***Еще о градуировке часов.*** Ни в ньютоновом универсуме, ни в ньютоновой системе отсчета невозможно «выбрать правильные часы». Часы всегда определяется с точностью до произвольного изотонного $f : R \mapsto R$. Исторически с этой трудностью оправлялись двумя разными путями. Один — эмпирический. За «правильное время» принималось календарное, астрономическое, атомное время. О том, какие умозрительные трудности возникают при «атомном подходе», мы уже писали в § 5.2. Эмпирики эти трудности игнорируют. Другой подход — концептуальный, через динамику. Именно, считалось, что уравнение свободной частицы

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad (6.7.1)$$

или частицы, движущейся под действием силы

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F \qquad (6.7.2)$$

верно, Т.е. говоря математически, принимается в качестве аксиомы. Тогда любое преобразование времени $\vartheta = f(t)$ нарушило бы уравнение (6.7.1), превратив его в

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{d\vartheta}\frac{d^2f}{dt^2} \qquad (6.7.3)$$

и аналогично (6.7.2). Только линейные преобразования ничего не изменили бы. Таким, образом, выделенная шкала времени возникала в традиционной физике как та шкала, в которой верны динамические уравнения.

В этой связи полезно напомнить, что Милну удалось связать инерциальную и взрывную системы отсчета не только кинематическими, но и динамическими формулами перехода. Именно, пользуясь своим логарифмическим переходом (5.2.1), он показал, что частицы, которые движутся во взрывной системе отсчета в f-времени по ньютолову закону

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = F \qquad (6.7.4)$$

будут двигаться в инерциальной системе в XT-времени по закону.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t}\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t^2} + \frac{t}{t_0}F \qquad (6.7.5)$$

причем для «фундаментальных», «главных» материальных тел $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$. Поэтому в теории Милна уравнение $x = 0$ сохраняется, в отличие от (6.3.7), для фундаментальных тел. Этим результатом его теории вера в единственность формы динамических законов, в их каноничность существенно подрывается. Кроме того, могли бы априори возникнуть и возражения вроде таких, что мы же ничего не знаем о настоящем значении силы F: может быть, ее «правильное» значение как раз то, которое получится после перевода вроде (6.7.3).) (Во избежание недоразумений уточню, что сам Милн все свои рассуждения вел не в ньютоново м универсуме, а на базе специальной теории относительности. На ньютонов язык его формулы перевел я.)

§7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВРЕМЕНИ У КОНКРЕТНОГО ОБЪЕКТА

1°. Некоторые понимания «биологического времени». С возрастом любой биологический организм — будь то клетка, будь то человек — претерпевает какие-то физиологические (метаболические) перемены. Сами эти изменения нередко принимаются за временной показатель применительно к данному объекту (или группе особей). Неважно, как по календарному счету выросла борода — в десять или в тридцать лет — признак ее появления или всё—еще—отсутствия и принимается за «возраст». Тут возраст не обязательно понимается как количественная мера, а, например, «младенческий», «зрелый», «старческий». Примерно такой же взгляд существует и в геологии: в определенных аспектах не важны абсолютные хронологические длительности палеонтологических процессов Наличие или отсутствие соответствующих остатков в стратах само по себе принимается за «геологическое время». В принципе, это одна из возможных и вполне правомерных «градуировок» часов у материальной точки, причем эта последняя на биологическом языке называлась бы «особь», или «популяция», или «таксон», или «живущая клетка в организме». Но иногда сторонники такого словоупотребления заходят дальше и — приводя действительно разительные примеры несовладения календарного времени с таким физиологическим — начинают настаивать на том, что, мол, вообще говорить о календарном (они предпочитают выражаться «физическом») времени не имеет смысла в биологии. Что в биологии, мол, свое собственное биологическое время. Нам кажется, что тут полезно проводить терминологическое различение. Целесообразно говорить не про «биологическое время», а про «биологическую градуировку времени (про шкалу времени) или даже еще точнее про «биологическую градуировку времени у данной особи» или «у данного таксона» (т.е. у линейно-расположенных в биологически-причинной последовательности палеонтологических остатков).

Мне неизвестны примеры, когда бы «биологическое время» b обращало бы ход событий сравнительно с «календарным временем» t, т.е. переставляло бы события в их последовательности, т.е. при $t(x) < t(y)$ было $b(x) > b(y)$. Поэтому «время» в смысле § 5.1 остается одним и тем же. Если же при этом физиологическая градуировка b_A у особи A отличается от физиологической же градуировки $b_в$ у особи B, так что $b_B(y) - b_B(x) \neq b_A(y) - b_A(x)$ для одновременных $t(x) = t(x)$ и $t(y) = t(y)$, то тут ничего неожиданного и сверхъестественного нет, Ведь в отличив от физики, где материальную точку мы мыслим всего лишь как длящееся точечное тело (плюс масса, плюс заряд, плюс и т.д.), в биологии особь A обычно недостаточно мыслить как просто некоторый длящийся и четко отличный от других предмет с какими-то параметрами. Для биологии важен еще АКТИВНЫЙ характер этого «предмета», который своим присутствием «преображает» окружающее (и свои собственные параметры при этом). Если бы можно было говорить о «биологическом пространстве» (см. § 14), то любая особь (клетка, таксон и т.п.) в нем представлялась бы как «оператор» *A,* воздействующий на состояния этого пространства и переводящий их в другие состояния. Это и проявляется в таких симптомах, как половая горманация, рост бороды и пр. Некоторые «выходы», «значения» этого оператора временноподобны, вот тогда-то для краткости их именуют «биологическим временем».

Нередки случаи, когда такие преобразования календарного времени t для особи A при условиях α во временноподобную величину ϑ удается выразить каким-нибудь интегральным оператором

$$t \mapsto \vartheta = \int^{t} f(A, \alpha, t)dt \qquad (7.1.1)$$

Собственно, такие преобразования возможны и физике тоже. Например, можно измерять промежуток времени объемом вскипевшей в чайнике (котле) воды при фиксированном напряжении электроплитки (стационарном режиме котельной). Точно так же промежуток физиологического времени измеряют числом (объемом, интенсивностью) протекших физиологических процессов. И с той же обоснованностью, о какой в последнем случае говорят, что «время у человека во сне течет иначе, чем в «состоянии бодрствования», можно говорить, что «время у чайника течет при напряжении 200 вольт иначе, чем при напряжении 100 вольт».

Иногда оператор $\frac{A}{t} \mapsto \vartheta$ оказывается обратимым. Это весьма существенно. Так, если ϑ — определенный показатель концентрации химических реагентов в клетке, то наличие обратной функции $t(\vartheta)$

гарантирует, что метаболические процессы могут играть роль «биологических часов», что по ним можно ВОССТАНОВИТЬ календарное время.

В принципе такие *A*-преобразования суть частный случай реградуировки часов, рассмотренной в § 5.2. Но там царил полный произвол $f : R \mapsto R$, а тут мы имеем дело с конкретным $f_A : R \mapsto R$. Эта зависимость градуировки от конкретного оператора *A* (т.е. от биологического организма в его длительности, от геологического процесса в его диахронном разрезе) порождает совсем иные чувства к реградуировке. В § 5.2 она представала как стихийная помеха, от которой не знаешь, как избавиться, а здесь она выглядит «объективным результатом воздействия объекта *A*», каковой и надо изучать, и имеются надежды разобраться.

Отношение $\frac{d\vartheta}{dt}$ естественно назвать «скоростью физиологического процесса у объекта *A* по отношению к хронологическому (календарному) времени». Здесь также в литературе распространена сбивающая с толку аббревиатурность, когда пишут просто «скорость», а по отношению к чему — не упоминают.

2°. Один геологический пример. Иногда отношение одновременности словно бы навязывается самой природой изучаемого объекта. Так обстоит дело со стратами (слоями) в геологии. То, что встречается в одном и том же, явно не смещенном и без следов перемешивания слое, хочется назвать — и называют — одновременным. При этом возникают трудности с экспликацией вот какого рода. В последовательных стратах обнаруживаются как собственно геологические останки, так и биологические (палеонтологические). По ним идет датировка — отдельно геологическая, отдельно биологическая. В нашей терминологии, вроде бы, универсум снабжается двумя часами *b* и *g*:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[dd, leftrightarrow, "?"] \\ U \arrow[ur, "b"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd} \tag{7.2.1}$$

И вот эмпирически оказывается, что иногда между показаниями этих часов нет соответствия, нет сохраняющего порядок перехода от показаний геологических часов g к показаниям биологических часов b: иногда $g(p) < g(q)$, но $b(p) > b(q)$. Как эксплицировать это обстоятельство? Ведь получаемым ЛОГИЧЕСКИМ противоречием ставится под сомнение ПРИМЕНИМОСТЬ схемы (7.2.1). Разбирая ситуацию, мы проследим логику авторов книги [14], из которой мы почерпнули сей пример, но еще раньше мы дополнительно заострим ситуацию на воображаемом примере.

Рассмотрим ОДНОГО человека, и возраст его будем мерить двояко: в одних часах числом сношенных им рубашек, а в других часах — числом его встреч с милиционером. Может пи случиться, что в момент p он износил 500 рубашек и 12 раз встретился с милиционером, но в момент q он сносил уже 550 рубашек, а с милиционером встретился всего 9 раз? Нет, решительно ответим мы. Это противоречило бы логике, арифметике. А может ли подобное встретиться в стратиграфии? За счет чего? Если бы компоненты слоя представляли собой итог линейно-упорядоченного процесса, как придуманный нами человек, то и в стратиграфии быть такого не могло бы: ошибкою следовало бы счесть эмпирические данные. Наблюдатель («таксон») как он определен в § 5.5. — линеен. Но если мы мыслим образование слоя как итог МНОГИХ линейных процессов, т.е. как результат некоего «тока вещества» («система отсчета»), где слой возникает как «срез» этих линейных процессов, этого тока вещества на какую-то дату, — то открываются новые логические возможности. Имеется остаток какой-то ракушки p, который датируется $g(p)$ геологически, и ракушки p', датируемой

$b(p')$ биологически. И имеется отпечаток лепестка q, который датируется $g(q)$ геологически, и отпечаток q', датируемый $b(q')$ биологически. При этом p и p' одновременны, и q и q' тоже одновременны. Может ли случиться при этом, что

$$g(p) < g(q) \;\&\; b(p') > b(q'). \qquad (7.2.2)$$

При ньютоновском упорядочении универсума, когда имеется абсолютное время (хотя бы с точностью дореградуировки) когда есть абсолютная одновременность, так что во всяком календарном времени $t(p) = t(p') < t(q) = t(q')$, а потому и в биологическом $b(p') < b\ (q')$, и в геологическом $g(p) < g(q)$ и противоречия (7.2.2) случиться не может. Если бы оно случилось, то в теорию, математическую теорию, вошло бы противоречие, чего математики не допускают. Поэтому НЬЮТОНОВ УНИВЕРСУМ НЕ ПОЗВОЛЯЕТ ЭКСПЛИЦИРОВАТЬ упомянутых находок. На этом основании К.В.Симаков (стр.252—270 книги [14]) и отчасти С.В.Мейен (стр. 209—219) склоняются к допущению, что, дескать, в экспликации эмпирической стратиграфии надлежит пользоваться БОЛЕЕ СЛОЖНЫМИ темпоральными конструкциями, нежели ньютонова. Как на подходящие в этих обстоятельствах они указывают, на модели специальной и даже общей теории относительности. Да, в таких моделях МОЖНО объяснить конъюнкцию (7.2.2), поскольку там одновременность не обладает свойством транзитивности. Но привлечение идеи A-оператора позволяет найти искомое объяснение проще, сохраняя ньютоновость мира для малых его размеров и медленно текущих процессов. Ведь как-то неестественно думать, что для описания современных биологических процессов, для описания современных медленно текущих на поверхности Земли литологических процессов нам вполне хватает ньютоновой модели пространствовремени, — а вот для описания таких же процессов в прошлом, скрытых для нас и протекавших в еще меньшем объеме, — уже нужно прибегать к не ньютоновским представлениям.

Именно, события p и q расположены на мировой линии таксона A, а события p' и q' — на мировой линии таксона B. Измеренный у A по геологическим признакам показатель ϑ_g (A, p) — это и есть «геологическое время события p в календарную, дату t_p для процесса A». Аналогично, ϑ_g (A, q) — геологическое время события q в календарную дату t_q для того же A, а ϑ_g (B, p) и ϑ_g (B, p') — то же для процесса B. Измеряемый по биологическим показателям у A и B соответственно, ϑ будет равен ϑ_b (A, p) и ϑ_b (B, p') в дату $t_p = t_{p'}$ и равен ϑ_b (A, q), ϑ_b (A, q') в дату $t_q = t_{q'}$. И если для одного и того же геологического процесса, для одного и того же палеонтологического таксона неизбежно ϑ_g $(A, p) <$ ϑ_g (A, q) и ϑ_b $(B, p') <$ ϑ_b (B, q') совершенно ничто не связывает взаимных величин ϑ_g (A, p) и ϑ_g (B, q'), или ϑ_g (B, p') и ϑ_b (A, q). Вполне возможно, что ϑ_g $(A, p) <$ ϑ_g (B, q'), но ϑ_b $(A, p') >$ ϑ_b (B, q), а p и p' попадут в одну страту («одновременны»), тогда как q и q' попадут в другую общую страту. Парадокс снят, исчерпан, и для его преодоления не потребовалось прибегать к релятивистским искривленным моделям. В терминах поясняющего примера: один человек мог сносить 500 рубашек и повстречать милиционера 12 раз за тот самый календарный промежуток времени, за который с другой человек, его ровесник, сносил 550 рубашек, повстречавши милиционера всего 9 раз. И оба они попаяй в одну братскую могилу.

Конечно, рассмотрение при этом делается более громоздким. Но почему, когда мы хотим делать выводы на основании СОВМЕСТНОГО рассмотрения последовательности ракушек (таксон A) и последовательности отпечатков бабочки (таксон B), мы надеялись бы на простое рассмотрение? Пока мы описываем движение одного автомобиля как перемещение геометрической точки по плоскости, мы можем достичь простоты описания. Но когда мы разбираемся в столкновении трех автомобилей, обусловленном и марками машин, и марками бензина, и износом шин, и укосом шоссе, и дозой принятого водителями алкоголя, — с чего ожидать простоты? Конечно, связанное с эмпирикой описание будет еще более громоздким, нежели наши переменные $\vartheta_b (A, q)$.

Гл.3. БЛИЗКОДЕЙСТВИЕ И СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ

§ 8. ОТДЕЛИМОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

1°. Определение «эйнштейнового темпорального порядка». Собственно, Эйнштейн никогда б явном виде не вводил такого упорядочения, он вообще-то был невнимателен к этому направлению мысли. Основные идеи тут восходят к Роббу, Эддингтону и А.А.Маркову мл.; историографию см. в [9]. Но так как главный пример такого упорядочения дается специальной теорией относительности, которую ввел в научный оборот именно Эйнштейн, мы будем называть соответствующий способ упорядочивания «эйнштейновым».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Говорим, что выполнен постулат близкодействия, если для всяких двух ахронных точек x и y (т.е. $x \leq y$ & $y \leq x$) найдутся p и q при $p \in x^{-}$ & $p \not\in y^{+}$.Точка p предшествует точке x, но из p нельзя воздействовать на y, симметрично для q.

Содержательно это означает; на преодоление «расстояния» от x до y произвольно малых «промежутков времени» (p, x) и (x, q) недостаточно. Воздействие не может передаваться «со сколь угодно большой скоростью». Способ упорядочения, удовлетворяющий нашим аксиомам ТК$_{1—8}$ и постулату близкодействия, будем называть ЭЙНШТЕЙНОВЫМ ТЕМПОРАЛЬНЫМ ПОРЯДКОМ, а универсум с таким порядком — ЭЙНШТЕЙНОВЫМ.

ТЕОРЕМА 8. Для того, чтобы универсум был эйнштейновым, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in U \overline{x^{+}} \cap \overline{x^{-}} = x$.

ТЕОРЕМА 9. Для того, чтобы универсум был эйнштейновым, необходимо и достаточно, чтобы интервальная топология была отделима, т.е. у всяких $x, y \in U$ найдется окрестность точки x, не содержащая y.

Отсюда следует в сипу наших аксиом, что интервальная топология регулярна. Переформулировкой теоремы 8 является такая:

ТЕОРЕМА 10. Для того, чтобы универсум был эйнштейновым, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $x \in U$ единственное абсолютно одновременное x событие (см. § 6.3) было само x.

Мы видим, что эйнштейново упорядочение является крайним, противоположным ньютонову, случаем. В ньютоновом упорядочении фактор-универсум по отношению абсолютной одновременности оказывался САМЫМ БЕДНЫМ из возможных (одномерным), тогда как в эйнштейновом — САМЫМ БОГАТЫМ из возможных, ибо фактор-универсум совпадает с самим универсумом.

Поэтому бессмысленно здесь вводить понятие «настоящее для события x, ведь оно совпало бы с самим $x = \overline{x}$ и не распространилось бы на «весь мир». Если $\overline{x^+} = \overline{y^+}$, то выполняется $x = y$, так что эйнштейново пространствовремя оказывается различимым из будущего (и из прошлого). Два разных события всегда имеют разные прошлые (и будущие).

2°. Один критерий отличия ньютоновости от эйнштейновости. Темпоральный универсум с абсолютной одновременностью (т.е. ньютоново пространствовремя) можно разными способами (разными аксиомами) отличить от темпорального универсума с близкодействием (эйнштейнового). Мы приведем один критерий, который и сам по себе неожидан и имеет, как нам кажется, определенный философский смысл.

Сначала несколько слов о некоторых сугубо математических объектах, не затрагивая вопроса «существуют ли они физически». Известно [16] что существуют кривые вроде кривой Пеано. Эта кривая, вполне подпадающая под математическое, точнее, тополого-геометрическое определение кривой, покрывает всю плоскость или, если говорить о ее дуге, — то весь квадрат, В трехмерном случае известны кривые, называемые «зонтиком Пеано». Это гомеоморфный образ отрезка, но такой, что кривая проектируется на квадрат — без пропуска каких бы то ни было точек. Некоторые из таких кривых дополнительно обладают еще свойствами, на первый взгляд кажущимися либо невозможными, либо крайне ограничительными.

Спрашивается, могут ли существовать «на самом деле» подобные кривые? Что означает этот вопрос метатеоретически? Поскольку кривая — понятийный конструкт, постольку существовать ока может только в том или ином классе понятийных же конструктов. В узко геометрическом классе — где отношение порядка не фигурирует — такие кривые существуют. Существуют ли понятийные конструкты, имеющие отношение к механике или к кинематике, в которых такие кривые были бы возможны? И тут, оказывается, имеет место

ТЕОРЕМА 11. В темпоральном универсуме с абсолютной одновременностью любая топологическая кривая (в том числе и пеановские) может быть траекторией для некоторой материальной точки. В темпоральном универсуме с постулатом близкодействия ни кривая Пеано, ни зонтик Пеано, ни им подобные кривые Серпиньского или Менгера не могут являться траекториями какой бы то ни было материальной точки: в этом случае всякая материальная точка (и ее траектория) описывается липшицевой функцией порядка единица.

3°. Система отсчета как пространство. Мы видели в § 6.5, что при ньютоновом упорядочении пространство данной системы отсчета, понимаемое как результат факторизации универсума по линиям тока вещества в системе отсчета, фактически не оказывается топологическим пространством. Топология в нем антидискретная. Совсем не так в эйнштейновом случае.

Во множестве ${}^{U}\!/_{\wedge}$ вводится фактор-топология. Это значит, что $A \in {}^{U}\!/_{\wedge}$ открыто, если его прообраз в U открыт. Если $\alpha \in {}^{U}\!/_{\wedge}$, то прообразом ее является некоторая кривая $\lambda \in \wedge$, т.е. замкнутое в U множество: это вытекает из отделимости нашей интервальной топологии T. Поэтому, если $a \neq b$ и $a, b \in U/_{\wedge}$, то множество $\left(U/_{\wedge}\right)/_{a}$ оказывается открытым в фактортопологии множеством, содержащим b и не содержащим α. Следовательно, фактортопология удовлетворяет постулату отделимости. На самом деле, как правило, имеет место даже более сильный результат. Ведь мы изучаем только универсумы со счетной базой топологии, а обычно изучаются даже только конечномерные пространствовремена. В этом случае топология T, как можно установить, обязательно нормальная, а тогда фактортопология эйнштейнова универсума также будет, как известно, нормальной.

Философски это крайне важный результат. Монизм конструкций при эйнштейновом упорядочении достигает предела: из одного лишь порядка (каузальности) возникает структура топологического СОБСТВЕННО ПРОСТРАНСТВА для системы отсчета. Структуру пространства не надо вводить ДОПОЛНИТЕЛЬНО, ВНЕШНИМ ОБРАЗОМ. Более того, ее и нельзя вводить внешним образом по произволу: необходимо, чтобы введенная извне топология согласовывалась бы с фактор топологией, а поскольку та отделима и чаще всего нормальна, то это очень сильное требование. Конечно, покамест в полученном топологическом пространстве нет метрики, как нет ее пока ни в универсуме ни в системе отсчета. Известно, что при данной топологии можно ввести сколько угодно согласующихся с нею пространственно подобных метрик. Сколько угодно равномерных структур (структур окружений). Даже на втором уровне рассмотрения, когда дополнительно задана гладкость, можно ввести сколько угодно гладких римановых метрик сигнатуры (+ … +), которые будут согласовываться с имеющейся топологической гладкой структурой.

Часто провозглашают «принцип эквивалентности» как требование равноправия всех систем отсчета. Подчеркнем, что ни в ньютоновом, ни в эйнштейновом случаях, вообще говоря, системы отсчета неравноправны. Точнее, две конгруэнции кривых на одном и том же топологическом пространстве не всегда могут быть переведены одна в другую каким-нибудь автоморфизмом этого пространства, В гладком случае, например, нельзя перевести диффеоморфизмом то векторное поле, которое обладает предельными циклами, в поле без циклов или т.п. Таким образом, введение «принципа эквивалентности» привело бы к значительному сужению допустимых к рассмотрению темпоральных универсумов.

*4^o. **Основной пример эйнштейнова упорядочения.*** Рассмотрим самый принципиальный пример на третьем уровне, т.е. при наличии абсолютного параллелизма. Для простоты восприятия опишем его в трехмерном случае. Имеем аффинное пространство A_3 в координатах (t, x, y). На плоскости $(1, x, y)$ выделим произвольную выпуклую фигуру Ω, содержащую начало координат $(1, 0, 0)$; см. рис. 13. В четырехмерном случае Ω, было бы телом, а не фигурой. Вектор (t, x, y), выходящий из начала координат, называем «положительным» (или «временнопопобным»), если

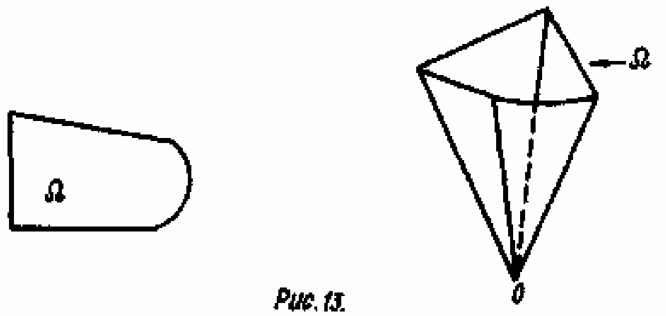


Рис. 13.

определяемый им луч пересекает плоскость $t = 1$ во внутренней точке фигуры Ω. Говорим, что событие (t, x, y). И предшествует событию (t', x', y')если вектор $(t' - t, x' - x, y' - y)$ положителен.

Так как всякое выпуклое тело в указанных условиях описывается какой-то (несимметричной, вообще говоря) нормой $\|...\|$: $R^{n-4} \mapsto R$ (т.е. положительно-однородной выпуклой невырожденной функцией), то введенный нами порядок выражается через формулу так:

$$\left(t,\vec{x}\right) < \left(t',\vec{x'}\right) \Leftrightarrow t'-t > \left\|\vec{x'}-\vec{x}\right\| \qquad (3.4.1)$$

Граница конуса положительных лучей задается формулой:

$$t = \left\|\vec{x}\right\| \qquad (8.4.2)$$

Она соответствует «световому конусу», т.е. предельному каузальному воздействию, о чем подробнее в следующей рубрике.

Специальная теория относительности, точнее, пространствовремя ее, возникает, когда вместо ПРОИЗВОЛЬНОГО выпуклого тела берется сфера, т.е. в (8.4.1—2) вместо произвольной нормы $\left\|\vec{x}\right\|$ берется эвклидово расстояние $\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{\vec{x}^2}$. Иными словами, когда дополнительно предполагается очень высокая симметрия, когда действует эвклидова груша вращений, когда все «направления» равноправны, т.е. «пространство изотропно». В этом случае в описании обычно фигурирует еще константа, т.е. вместо $t = \left\|\vec{x}\right\|$ пишут $ct = \left\|\vec{x}\right\|$. Эта константа называется «скоростью света» и (8.4.2) принимает вид уравнении фронта световой волны:

$$ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (8.4.3)$$

В общем же случае ОДНОЙ константою обойтись нельзя, что соответствует содержательно тому, что «скорость света различна по разным направлениям», о чем подробнее в следующей рубрике.

Этот пример упорядочения — фундаментальный. При переходе на второй уровень рассмотрения указанный общий конус задается уже не в самом пространстве *M*, а в касательном T_pM. Если указанное в описании конуса выпуклое тело Ω ость шар, то получаем случай инфинитезимально изотропного пространствовремени: этот случай описывается римановой (точнее псевдоримановой) геометрией.

Если выпуклое тело не приводится к внутренности сферы, то получаем случай инфинитезимально анизотропного пространствовремени: он описывается финслеровой (точнее псевдофинслеровой) геометрией. Чаще говорят короче: «риманова кинематика», «финслерова кинематика».

На первом уровне рассмотрения, где нет и касательного пространства» где в каждой точке $p \in M$ можно говорить только про будущее p^+ и прошлое p^-, а также про их границы ∂p^+ и ∂p^-, сохраняется одно очень важное свойство рассматриваемого упорядочения. Именно, множество $\overline{p^+ \cup p^-}$ связно уже в силу наших аксиом ТК$_{1-3}$. Но эйнштейново упорядочение выделяется среди всех прочих тем, что $\overline{p^+ \cup p^-}\big/p$ не связно. Из замыкания прошлого $\overline{p^-}$ в замыкание будущего $\overline{p^+}$ можно перейти ТОЛЬКО через точку p.В ньютоновом же упорядочении не так, можно пройти через любую точку $g \in \overline{p^+ \cup p^-}\big/p$, отличную от p.

5°. Необычные материальные точки. В ньютоновом случае, как отмечалось в теореме 11, никаких ограничений на функции, описывающие материальную точку (или ее траекторию), не налагается. В случае эйнштейнова упорядочения в силу (8.4.1) на материальную точку $(t, f(t))$, где $f : R \mapsto R^{n-1}$, налагается (помимо непрерывности) еще условие $\Delta t > \|\Delta f\|$, так что скорость любой материальной точки (или ее предела) подчиняется неравенству:

$$\left\|\frac{df}{dt}\right\| \le 1 \tag{8.5.1}$$

В изотропном случае и при явном введении параметра скорости света это условие выглядит так:

$$|f'(t)| \le c$$

Вытекающие из этих условий различия в устройстве материальных точек (точечных наблюдателей) описываются следующими теоремами:

ТЕОРЕМА 12. В ньютоновом универсуме возможно перемещение по любой траектории, которая в топологическом смысле является кривою (путем). Возможно перемещение с нулевой мгновенной скоростью в том смысле, что скорость как производная материальной точки существует почти везде (за вычетом множества меры нуль) и всюду, где существует, скорость равна нулю, но точка не стоит на месте, а перемещается монотонно в одном и том же направлении на конечный отрезок за всякий конечный промежуток времени.

ТЕОРЕМА 13. В эйнштейновом универсуме оба утверждения теоремы 12 не имеют места. Возможно перемещение по любой абсолютно-непрерывной траектории, и только по таким траекториям. Существует материальная точка, обладающая почти всюду (за вычетом счетного множества точек) мгновенной скоростью, причем всюду, где эта скорость существует, она равна скорости света С, но за всякий конечный промежуток времени Δt материальная точка перемещается на $\|\Delta\ x\| < c\Delta t$, причем движение происходит вдоль одного и того же одномерного, направления, но взад-вперед. В изотропном эйнштейновом n-мерном универсуме при $n \geq 3$ (т.е. собственно пространство имеет размерность не менее двух) существует гладкая материальная точка (т.е. имеющая мгновенную скорость всюду), мгновенная скорость которой всюду равна скорости света, но за всякий конечный промежуток времени Δt эта точка перемещается на $|\Delta\ x| < c\ \Delta t$: средняя (интегральная) скорость такой точки может стремиться к нулю.

Материальные точки из третьего утверждения называются ДИКИМИ ЧАСТИЦАМИ, а из четвертого — ВРАЩАЮЩИМИСЯ ФОТОНАМИ.

ТЕОРЕМА 14. И в ньютоновом и в эйнштейновом универсумах существует материальная точка, у которой ускорение (в смысле второй производной) существует почта везде (за вычетом множества меры нуль) и всюду, где существует, оно равно нулю, но скорость не постоянна, а является непрерывной переменной функцией.

6º. Деситтеров и антидеситтеров мир. Перейдем к разнообразным темпоральным упорядочениям, варьирующим основной пример. Специализируем основной пример § 8.4, выбрав выпуклое тело об в виде шара, но повысим размерность, так что положительный вектор задается теперь условием $t > \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + u^2}$. Рассмотрим те выходящие из начала координат (*0, 0, 0, 0, 0*) лучи, на которых выполняется $t^2 - x^2 - z^2 - u^2 < 0$: они заведомо не положительны, их называют «пространственно-подобными лучами» или «пространственноподобнымиг направлениями». Для луча точное значение координат (*t, x, y, z, u*) но существенно, а важно лишь их отношение $t : x : \ y : \ z : \ u$. В частности, корректно рассмотрение величины

$$\bar{t} = \frac{t}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - t^2}} \qquad (8.6.1)$$

Аналогично вводим $t, \ x, \ y, \ z$ и u. При этом очевидно

$$t^2 - x^2 - z^2 - u^2 = -1 \qquad (8.3.2)$$

Теперь по определению введем для наших лучей отношение строгого порядка формулой

$$(t, \ x, \ y, \ z, \ u) < (t', \ x', \ y', \ z', \ u') : \Leftrightarrow t' - t > \qquad (8.6.3)$$

$$> \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 (z' - z)^2 (u' - u)^2}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Множество лучей (8.6.2) с отношением (8.6.8) называется миром де Ситтера. См. рис.14.

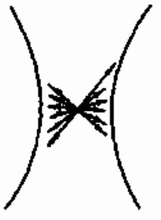


Рис. 14.

Вот несколько других, эквивалентных описаний того же мира де Ситтера. Отталкиваясь от (8.5.2), изображаем его в виде однополостного гиперболоида

$$t^2 - x^2 - z^2 - u^2 = - R^2 \qquad (8.6.4)$$

на котором порядок введен наследственным образом из объемлющего псевдоэвклидова пространства ${}^4R_5$ с метрикой $\sqrt{t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}$. В частности, прямолинейные образующие гиперболоида являются сразу и световыми объемлющего пространства ${}^4R_5$ и световыми мира де Ситтера ${}^3S_4$.

Тем, кто легче мыслит в рамках проективно-метрических представлений, например, модели Клейна с абсолютом в виде сферы, удобнее такое представление. Пересечем гиперболоид (8.8.4) плоскостью $t = \alpha > 0$. Тогда верхняя половина ($t > 0$) гиперболоида точно представляется внешностью шара (эллипсоида в аффинном пространстве A_SX; на рис.15 показана внешность круга. Итак, геометрия Лобачевского дается внутренностью шара, а геометрия де Ситтера — внешностью шара (точнее — овала в проективном пространстве, но в эти уточнения мы не входим). Из каждой точки p выходят две касательные к этой окружности-абсолюту и всякая точка p', лежащая между этими касательными и соответствующей дугой абсолюта, — лежит в будущем для p. Наглядно видно, что, например, для указанных на рисунке точек p и q их будущие p^+ и q^+ не пересекаются — в отличие от случая эвклидова (в специальной теории относительности), где $\forall p \forall q \quad p^+ \cap q^+ \neq \varnothing$. Двумерный мир де Ситтера в проективно-метрических терминах описывается как случай, когда на прямых

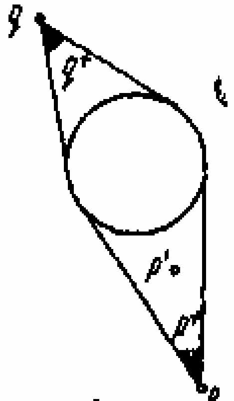


Рис.15.

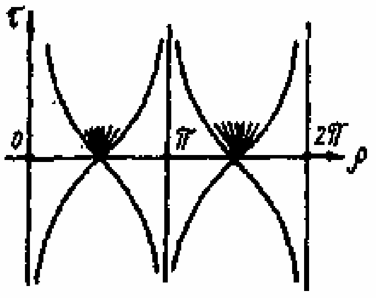


Рис.16.

задано гиперболическое мероопределение, а на углах — эллиптическое, но это не вполне полное описание.

Тем, кто легче мыслит в рамках «геометрий на сфере» с невещественным радиусом, естественно воспринимать де-ситтеров мир как симбиоз сферической и Лобачевской геометрий: именно, «лобаневской» по временноподобным направлениям и «сферической» по пространственноподобным. В известных для такого подхода «три-прямоугольных координатах» (обобщающих декартовы) r, ρ будет $-\infty < r < \infty$, а ρ берется по модулю $2\pi R$. Рисунок 16 показывает, что световые, выходящие из точки $\left(0, \frac{\pi R}{2}\right)$, асимптотически приближаются к прямым $\rho = 0$ и $\rho = \pi R$ (все прямые $\rho = const$ здесь перпендикулярны к прямой $\tau = 0$). Тут хорошо видно, что посредством интервальной датировки событий на прямой $\rho = \frac{\pi R}{2}$ можно охватить только полосу $0 < \rho < \pi R$, а не весь мир.

В космологии распространен вариант, когда мир де Ситтера рассматривается не как «сферический», а как «эллиптический», именно, когда дополнительно производят факторизацию по отношению $(t, x, y, z, u) \sim (-t, -x, -y, -z, -u)$. Тогда сфера-сечение, о которой шла речь выше, делается эллиптическим пространством. Но в этом случае отношение порядка, если его задавать по (8.6.3), некорректно: наглядно это видно на рис. 15. Ведь при отождествлении диаметрально-противоположных направлений (и при отождествлении параллелей в одну «бесконечно удаленную точку) между конусами pab и $qa'b'$ нет никакой разницы. Дабы здесь ввести локальный порядок, надо разрезать универсум на три области, как мы поступали в § 1.3. Получится темпорально не ориентируемый универсум. Полная длина (пространственноподобной) прямой здесь равна πR, а не $2\pi R$. Впрочем, иногда факторизацию производят по отношению $(t, x, y, z, u) \sim (-t, -x, -y, -z,$

- *u)*: тогда на всем получающемся универсуме можно ввести единое отношение строгого порядка.

Аналогичным образом строится и антидеситтерово упорядочение. Поясним его на двумерном примере в переменных $-\infty < \rho < \infty$, $0 \le r \le 2\pi R$ причем последняя по модулю $2\pi R$. Локальное следование вводим формулой:

$$(\tau,\rho)\prec(\tau',\rho') :\Leftrightarrow tg\frac{\tau'-r}{R} > th\frac{|\rho'-\rho|}{cR} \qquad (8.6.5)$$

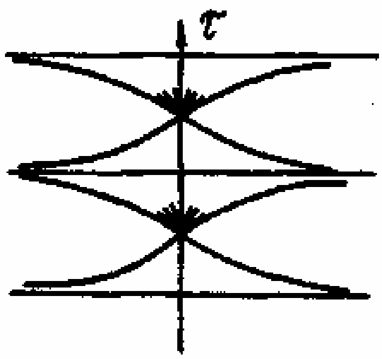


Рис. 17.

при условии, что $r' - \tau < \frac{2}{3}\pi R$, ср. (1.2.2). На рис.17 сохранены обозначения рис.16. В этой модели отчетливо видны «барьеры для будущего» — ни одно воздействие из события (τ,ρ)не продлится дольше даты $\tau + \frac{2}{3}\pi R$.

7º. ***Шварцшильдово упорядочение.*** Рассмотрим двумерное пространство в координатах $0 < \rho < \infty$, $-\infty < \lambda < \infty$. Нам удобно будет представлять его «нарезанным на полосы» $k\pi < \lambda < k\pi + \pi$ и $k\pi - \frac{\pi}{2} < \lambda < k\pi + \frac{\pi}{2}$, каждая шириною в π. Отношение порядка вводим формулой:

$$p < q :\Leftrightarrow \rho_p \cos\lambda_p < \rho_q \cos\lambda_q \ \& \ \rho_p \sin\lambda_p < \rho_q \sin\lambda_q \qquad (8.7.1)$$

Эта формально одна формула на деле объединяет счетное число отношений локального порядка для *2k* названных полос. Видно, что на пересечениях областей задания *k*-отношение на полосе $(k\pi, k\pi + \pi)$ и «сдвинутое на $\frac{\pi}{2}$» *k*-отношение на полосе $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ совпадают. Точно так же сдвинутое *k*-отношение совпадает с несдвинутым (*k +1*) — отношением на пересечении их областей задания. Световые кривые при этом принимают вид одного из следующих уравнений:

$$\lambda = \frac{\pi k}{2}$$

$$\rho\left|\sin\lambda\right| = \alpha \qquad\qquad \alpha > 0 \qquad\qquad (8.7.2)$$

$$\rho\left|\cos\lambda\right| = \alpha$$

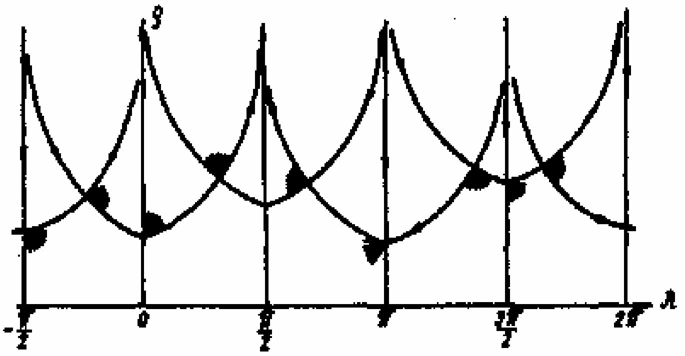


Рис.18.

см. рис. 18. Но направленность этих световых не одинаковая, а чередующаяся то в направлении к $\rho = 0$, то к $\rho = \infty$ в силу чередования знаков синуса-косинуса. Связь координат λ и ρ с привычными для метрики Шварцшильда координатами t и r дается формулами:

$$\lambda \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow tg\left(\lambda - \frac{\pi}{4}\right) = th\frac{t}{2m} \qquad (8.7.3)$$

$$\lambda \in \left(k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \pi\right) \Rightarrow ctg\left(\lambda - \frac{\pi}{4}\right) = th\frac{t}{2m} \qquad (8.7.4)$$

$$\rho^2 \sin 2\lambda = \left(1 - \frac{r}{m}\right)\exp\frac{r}{m}$$

и подробнее описана в [10]. Полоска $\frac{\pi}{2} < \lambda < 0$, как и полоска $\frac{\pi}{2} < \lambda < \pi$, соответствует «внешнему решению Шварцшильда» $r > m$, а полоса $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$ отвечает «внутреннему решению в виде черной дыры» $r > m$, тогда как полоса $\pi < \lambda < \frac{3\pi}{2}$ отвечает «внутреннему решению в виде белой дыры».

Мы видим, что «черная дыра» содержится в будущем для «внешнего мира», т.е. у всякого события в черной дыре найдется предшествующее ему событие во внешности (в обеих внешностях). Точно так же внешность содержится в прошлом по отношению к черной дыре, т.е. для всякого бытия во внешности найдется следующее за ним события черной дыре. При этом не надо, конечно, думать, будто бы любые два события — одно во внешности, другое в дыре — связаны отношением порядка.

Полезно отметить, что в таком упорядочении нет ничего особенно парадоксального. Похожее имеет место в мире де Ситтера также. Действительно, глядя на рис.16, образуем два множества: глобальное прошлое l^- для наблюдателя l на мировой линии $\rho = \frac{\pi}{2}R$, т.е. $l^- = \left\{ \left(\tau, \frac{\pi R}{2} \right)^- \tau \in R \right\}$ и глобальное будущее m^+ для наблюдателя m на мировой линии $\rho = \frac{3\pi R}{2}$, т.е. $\left\{ \left(\tau, \frac{3\pi R}{2} \right)^+ \tau \in R \right\}$. Очевидно, что эти два множества не пересекаются, разделены световыми и совместно со световыми покрывают весь мир де Ситтера (длины $2\pi R$). При этом ясно, что $l^- \subset (m^+)^-$ и $m^+ \subset (l^-)^+$. Иными словами, l^- играет роль «внешнего мира», а m^+ — роль «черной дыры». Истинная парадоксальность шварцшильдовых «черных дыр» не в том, что в них, дескать, «всё пропаливается» и оттуда ни на что во внешнем мире повлиять невозможно, а в ином. В деситтеровом упорядочении ВЕСЬ универсум мыслится как ОДНО решение, как один физический мир. В шварцшильдовом же упорядочении за привычный физический мир в обычных координатах (t, r) принимается ТОЛЬКО одна полоска $\frac{\pi}{2} < \lambda < \pi$: другая полоска $\frac{3\pi}{2} < \lambda < 2\pi$ оказывается ее «ненужным дубликатом». Если «дубликат» неустраним, то возникает истинная парадоксальность: ведь всё то, что происходит на полоске $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ должно — в силу физических уравнений — в точности повторяться на полоске $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$. Это значит, что плоскость координат (*t, r*) мы должны мыслить в двух несвязных (ни в топологическом, ни в причинном смыслах) экземплярах. Наличие этого двойника — если он неустраним — вот в чем истинная парадоксальность шварцшильдова упорядочения (мы ведем речь на дометрическом уровне, а парадоксы, связанные с длинами, частично затронуты в § 5.2).

От двойника можно попробовать избавиться посредством факторизации-склеивания по модулю π. Тогда $\lambda=\frac{\pi}{2}$ и $\lambda=\frac{3\pi}{2}$ отождествились бы, как и $\lambda = 0$ с $\lambda = \pi$. Остался бы только один экземпляр и внешности и черной дыры.

Прекрасно, Но так как на прямых $\lambda = 0$ и $\lambda = \pi$ направления (в смысле порядка 8.7.1) прямо противоположные, то такая факторизация оказывается невозможной. Дабы корректно произвести эту факторизацию, потребуется переопределить отношение порядка, вместо (8.7.1) введя его модификацию в виде (1.3.1), т.е. ввести локальный порядок. Полученный универсум будет темпорально неориентируемым, в нем будут присутствовать замкнутые временноподобные (циклические наблюдатели). Физику такого рода конструкции пугают, поскольку нарушают разного рода традиционные постулаты (условия) причинности. Поэтому такая факторизация оказывается неприемлемой. Следующая возможная факторизация — по модулю 2π. Тогда все отношения порядка согласуются безо всяких обращений, замкнутых временноподобных не возникает: фактически это делается у физиков на «диаграмме Крускала», которая от наших координат (ρ, λ) отличается тем, что Крускал стягивает прямую ρ = 0 в одну точку. Но при этом, как отмечалось, внешнее решение возникает в ДВУХ совершенно одинаковых, но разных экземплярах. А ведь физически важно, что КАЖДЫЙ из этих двух экземпляров ВЛИЯЕТ на происходящее в черной дыре, а также на каждый из внешних экземпляров влияет белая дыра, ср. § 11.

Заметим также, что другие, кроме кос кратные π, склеивания-факторизации невозможны с сохранением структуры порядка. Например, если факторизовать по $\frac{\pi}{2}$, то так как *sin* и *cos* ведут себя по-разному при добавлении $\frac{\pi}{2}$ нарушится само определение (8.7.1). Если, как поступают в теории «червоточин», «перемычек», взять два экземпляра внешнего мира $\frac{\pi}{2} < \lambda < \pi$ и склеить по $\lambda = \frac{\pi}{2}$, то обнаружится, что в месте склеивания световые направлены навстречу друг другу, так что и такое склеивание невозможно. Дополнительно заметим, что в традиционно изучаемых черных и белых дырах в диаграмме Крускала полоски $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: и $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ еще уменьшены сравнительно с нашими — обычно выбрасывают области $\rho^2 sin2\lambda > 1$, но для наших целей это несущественно, а обсуждать, почему такое выбрасывание неоправданно, — здесь неуместно,

8º. Вырезание части пространствовремени. Последние два примера темпорального упорядочения *относились ко второму* уровню рассмотрения — наличие гладкости предполагалось. Теперь изучим пример, в котором даже гладкость нарушается: для простоты сконцентрируем это нарушение в одной точке.

Рассмотрим обычную плоскость R^2 в координатах *t, x* с исходным порядком (8.4.1) с обычной эвклидовой нормой $\|(x)\| = |x|$. Этим порядком, как отмечалось, однозначно задается угол между временноподобными прямыми $x = at + b$, $a > 1$: см. формулы (2.2.1) и (2.3.4). Фиксируем значение α и вырежем по обе стороны от оси темпорат *t* симметрично по углу α.

Формально — выбрасываем множество:

$$M := \left\{ (t,x) \;\middle|\; t > 0 \,\&\, \frac{|x|}{t} < th\alpha \right\} \qquad (8.8.1)$$

Обозначим граничные для этого множества лучи: l_1 с уравнением $x = - t\ th\ \alpha$ и l_2 уравнением $x = t\ th\ \alpha$. Затем склеим $R^2\!/_{M}$ по l_1 и l_2, следя, чтобы отождествляемые на лучах l_1 и l_2 точки имели бы равные темпораты:

$$(t,x) \sim (t',x') :\Leftrightarrow t = t' \,\&\, |x| = t\ \ th\alpha \qquad (8.8.2)$$

В полученном множестве $U = \frac{\left(R^2\!/_{M}\right)}{-}$— вводим отношение порядка формулой:

$$(t,x) < (t',x') :\Leftrightarrow (t' - t > |x' - x| \vee$$

$$\vee\ \exists t_0 > 0 \left(t_0 - t = x - t_0 th\alpha \,\&\, t' - t_0 > |x' + t_0 th\alpha|\right) \vee \qquad (8.8.3)$$

$$\vee\ \exists t_0 > 0 \left(t_0 - t = x + t_0 th\alpha \,\&\, t' - t_0 > |x' - t_0 th\alpha|\right)$$

Рис.18.

Наглядно этот порядок изображен на рис.18. Если на исходной плоскости R^2 интервал $((t,x)(t',x'))$ никак не задевал границ выреза l_1 и l_2, то порядок на новом множестве U. прежний. Если же задевает, то тогда световая из *(t, x)* пересекает, скажем, l_2 в точке $(t_0, t_0 th\alpha)$. Ее продолжение по другую сторону выреза берется в виде световой, выходящей из той точки на l_1, которая при склеивании совпадала с $(t_0, t_0 th\alpha)$, т.е. из $(t_0, -t_0 th\alpha)$. Нетрудно убедиться, что получается эйнштейново упорядочение.

С точки зрения дифференциальной топологии здесь существенно следующее. Естественно, мы хотим ввести на U гладкую структуру F так, чтобы все те прямые на R^2, которые не попадают в вырез M, остались бы гладкими в (*U*, *F*). Но ломаная (т.е. не гладкая функция) $\lambda = (-l_1) \cup l_2$ по самому построению совпадает с прямой (т. е. гладкой) $l = (-l_1) \cup l_1$. В то же время прямая l является пределом для очевидной последовательности прямых, проходящих через точку (*0, 0*) и приближающихся к l по часовой стрелке. Следовательно, ломаная λ должна была бы быть пределом таких прямых — что очевидно невозможно. Внимательное рассмотрение покажет, что во всех других точках, в том числе и на полупрямой $l_1 \sim l_2$, кроме точки (*0, 0*), можно пользоваться гладкостью $F = R^2$ без противоречий. А в точке (*0, 0*) мы неизбежно должны расширить класс допустимых функций, включив в них наряду с прямыми еще ломаные (т.е. наряду с линейными функциями еще кусочно-линейные): этого сделать без нарушения аксиом гладкости невозможно, хотя мы и пользовались для наглядности аффинными понятиями. Таким образом, получается структура *(U, F),* где *F* — унаследованная от R^2 гладкость, заданная всюду, кроме точки (*0, 0*), каковая называется «особенной». Наглядно видно, что множество касательных векторов в точке (*0, 0*) существенно меньше, нежели множество векторов двумерного векторного пространства: отсутствуют все те векторы, которые входили бы в вырез. Используя аналогичным образом сохранившуюся в каждой точке, кроме особой (*0, 0*), линейную структуру, мы можем определить понятие «кривизна» для (*U*, <). Для этого вовсе не надобно вводить на *U* никакой римановой структуры. Именно, как показано на рис. 19, проведем прямые pq и pq', где $q \sim q'$. Получим то, что называется «двуугольник», подобный ломтику между двумя меридианами на сфере. Сумма углов этого двуугольника и есть то, что называется «кривизной области», а в данном случае «областью» является двуугольник pqq'. Если бы внутри него не содержалась особая точка (*0, 0*), то мы имели бы дело с псевдоэвклидовой геометрией и кривизна равнялась бы нулю, да и сам «двуугольник» вырождался бы в отрезок. Если же (*0, 0*) находится внутри двуугольника, то кривизна его, как легко видеть на рисунке, равна 2 α. По определению кривизной в точке называется предел отношения кривизны области к площади области, когда область стягивается в точку: очевидно, что в точке (*0, 0*) этот предел будет равен $\frac{2\alpha}{0} = \infty$. Таким образом, темпоральный универсум (U, $<$) при наследственной (где можно) гладкости и наследственной (где можно) метрике оказывается пространством, которое в окрестности всякой точки, за исключением одной единственной (*0, 0*), устроено как ${}^{1}R_{2}$ (пространствовремя специальной теории относительности), а в этой особой точке не имеет касательного пространства и обладает бесконечно большой кривизной.

В некотором смысле эта модель позволяет эксплицировать феномен «тяготения». Две материальные точки pq и pq', начав сначала удаляться друг от друга со скоростью $th\ \beta$, потом перестают разбегаться и начинают падать друг на друга: при встрече в событии $q = q'$ они имеют относительную скорость (импульс) $th(2\alpha - \beta)$. То же можно сказать о паре взаимно покоившихся материальных точек (параллельных прямых). Конечно, этим отнюдь не моделируется ньютонова гравитация, но эта модель является качественным указанием на связь между «тяготением» и «вырезыванием куска пространствовремени». Вырезанием из пространства сферы можно промоделировать искривление геодезических вблизи массивного тела. Если надрезать ${}^{1}R_{2}$ и по линии надреза вклеить избыточный угол, то моделировалось бы «отталкивание», «разбегание», «отрицательная масса». Технический вопрос заключается в том, чтобы найти подходящие вырезы-вклейки, при которых достигается количественное соответствие с известным феноменом тяготения.

9^{o}. Трансляционные кинематики. Наконец, приведем пример еще одного класса темпоральных структур, хотя и не укладывающегося в наши аксиомы ТК, но достаточно интересного, чтобы о нем упомянуть. Речь идет о «трансляционных кинематиках», как их назвал В.Я.Крейнович, которому и принадлежит большинство результатов о них. В этих структурах нарушается ТК$_7$, требующая связности интервала (см. § 4.1). Например, на плоскости (t, x) зададим порядок формулой:

$$(t,x) < (t',x') :\Leftrightarrow t'-t > |\sin(x'-x)| \qquad (8.9.1)$$

Тогда световые оказываются синусоидами, см. рис.5. Поэтому трансляционными «тематиками можно моделировать те нелинейные теории, в которых «скорость света меняется со временем» (касательные к синусоиде в разных точках не параллельны). Из-за несвязности интервала (p, q) получается, что имеются события q, на которые как-то повлиять из p можно, но невозможно добраться из p в q никаким связным (непрерывным) процессом: причинное воздействие как бы испытывает кое-где (не везде) «скачки». На пути такого рода воздействия нельзя «поставить экрана» — оно его «перепрыгнет».

10^o. Гладкие кинематики. Как уже отмечалось, постулату близкодействия на втором, дифференциальном уровне рассмотрения отвечает ситуация, когда в касательном пространстве задан конус (8.4.2) с невырожденной нормой. Последнее означает, что конус не вырождается ни в конус меньшей размерности, ни в произведение конуса меньшей размерности па прямую. Эти геометрические условия эквивалентным образом переговариваются па языке условий для изотопных функций; в данной гладкости F.

Именно, введем главное понятие в этой аксиоматике — СИЛЬНО-ИЗОТОПНАЯ ФУНКЦИЯ f. Это та функция $f \in F_p$, дифференциал df которой имеет в кокасательном пространстве: $T_p * M$ такую окрестность W (т.е.$df \in W \subset T_p * M$), что из $dg \in W$ следует, что g является изотопной функцией, какова бы ни была $g \in F_p$. Заметим, что не требуется, чтобы а была сильно-изотопной. Аксиомы теперь формулируются так:

ГК₁. Множество дифференциалов всех сильно-изотонных функций непусто (следовательно, имеет непустую внутренность относительно векторной топологии в $T_p * M$).

ГК₂. Если $df = lim\ dg_{\text{н}}$ и $df = lim\ dh_k$, а функции g_k и - $h_{\text{к}}$ являются сильно-изотопными, то $df = 0$. (Функция h_k называется сильно-антитонной.)

Аксиоматику можно варьировать и, в частности, относить FK_2 не к одной точке $T_p * M_n$, а к области $d_{om}f$ задания f. Тогда заключение в аксиоме будет гласить $f = const$.

ТЕОРЕМА 15. При выполнении аксиом $ГК_{1—2}$ множество дифференциалов сильно-изотопных функций, обозначаемое O_p^{*+}, образует в $T_p * M$ открытый выпуклый конус с точечной вершиной в нуле. Сопряженный к этому конусу конус градиентов $O_p^+ \subset T_p * M$ тоже открыт, выпукл и имеет точечную вершину, т.е. описывается уравнением вида (8.4.2).

Этой теоремой уточняется сказанное в § 2.1 насчет конуса O_p^+. Ею же дается критерий для отличия на гладком уровне рассмотрения темпоральных универсумов с аксиомой близкодействия от ньютоновых универсумов или универсумов электродинамики в гл. 4. Универсум, удовлетворяющий аксиомам $ГК_{1—2}$, обычно называется ГЛАДКОЙ КИНЕМАТИКОЙ. Среди всех гладких кинематик выделяется распространенный класс «римановых кинематик», для чего формулируется аксиома:

ГК₃. Пусть в каждой точке $p \in M_n$ задана псевдогруппа $\wp$. диффеоморфизмов $f : U \mapsto \vee$, где $p \in U \cap \vee$ и $U, \vee \in T$, обладающая следующими двумя свойствами: (А) если функция f сильно-изотонна, то $f \circ j$ также сильно-изотонна. (Б) если функция f не сильно-изотонна, но $Df = lim\ df_k$, где f_k суть сильно-изотонные функции! и то же верно относительно функции g, то найдется $j \in \wp$. Для которого $dg = df\, dj$

ТЕОРЕМА 16. При выполнении аксиом ГК$_{1—3}$ конус O_p^+ является сферическим конусом, а $d\wp$ — группой Лоренца, домноженной на гомотетии.

Содержательно глубокий смысл этой теоремы в том, чтя ни о какой метрике в аксиомах ТК$_{1—8}$ и FК$_{1—3}$ речи не было, А появление группы Лоренца равносильно появлению некоторой метрики, правда, согласно теореме 16 лишь с точностью до множителя. Содержательно «римановы кинематики» отвечают так называемому «конформному подходу к теории относительности».

§ 9. ТЕМПОРАЛЬНАЯ МЕТРИКА И АССОЦИИРОВАННЫЕ СТРУКТУРЫ

1º. Темпоральная или кинематическая метрика. При ньютоновом упорядочении, отталкиваясь от фиксированного функционального времени t для любой пары событий $p < q$ из универсума получают некоторую численную меру $\tau(p, q)$, называемую промежутком времени между p и q, или «длиной интервала (*p, q*)». Именно:

$$\tau(p, q) : = t_g - t_p \qquad (9.1.1)$$

Такой способ измерения очень удобен, потому что при сложении самих интервалов $(p, r) = (p, q) \cup q \cup (q, r)$ соответствующие промежутки времени складываются:

$$\tau(p, r) : = \tau(p, q) + \tau(q, r) \qquad (9.1.2)$$

независимо от выбора исходной функции *t*. Это свойство называется аддитивностью и характерно именно для ньютонова упорядочения. Ведь, если выполняется (9.1.2), то для всех точек интервала (*p, r*) выполнен постулат однозначной датировки из § 6.1, следовательно, упорядочение ньютоново.

Поэтому для ситуации, в которой выполняется постулат близкодействия, равенство (9.1.2) не может иметь места, и нет никаких оснований надеяться на существование универсального времени. Поэтому понятие «промежуток времени между p и q, (при $p < q$)» вводят независимо от фиксации какого бы то ни было функционального времени. Обычно (см. [9]) пользуются такой дефиницией:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Функцию $r : U \times U \Rightarrow R$, удовлетворяющую аксиомам

КМ$_1$. $x < y \Leftrightarrow \tau(x, y) > 0$ (9.1.3)

КМ$_2$. $y \in \partial x^+ \Leftrightarrow \tau(x, y) = 0$ (9.1.4)

КМ$_4$. $x < y \;\&\; y < z \Rightarrow \tau(x, z) \geq \tau(x, y) + \tau(y, z)$ (9.1.5)

называют КИНЕМАТИЧЕСКОЙ (темпоральной) МЕТРИКОЙ на $(U, <)$.

Приведем несколько примеров темпоральных метрик. Для специальной теории относительности это

$$\tau\left(\left(t, \vec{x}\right), \left(t', \vec{x}'\right)\right) = \sqrt{(t' - t)^2 - \left(\vec{x}' - \vec{x}\right)^2} \qquad (9.1.6)$$

Для деситтерова мира

$$\tau(p,q) = R_{arch} \frac{t_p t_q - x_p x_q - y_p y_q - z_p z_q - u_p u_q}{\sqrt{t_p^2 - x_p^2 - y_p^2 - z_p^2 - u_p^2}\sqrt{t_q^2 - x_q^2 - y_q^2 - z_q^2 - u_q^2}} \qquad (9.1.7)$$

Для анизотропного мира (8.4.1) возможна метрика

$$\tau\left(\left(t, \vec{x}\right), \left(t', \vec{x'}\right)\right) = \sqrt{(t' - t)^2 - \left\|\vec{x'} - \vec{x}\right\|^2} \qquad (9.1.8)$$

но см. также § 9.5—8.

Имеет место теорема, согласно которой при выполнении аксиом ТК$_{1-3,6}$ на $(U, <)$ всегда существует кинематическая метрика τ. Для $(U, \prec)$ и $(M_i, <_i)$ она вводится локально на областях, подчиняемых условиям согласования на пересечениях. Не до конца исследован вопрос о степени произвола в задании τ на одном и том же (*U*, <). Не изучен и такой принципиальный вопрос: на втором уровне изучения заданием порядка ОДНОЗНАЧНО фиксируется угловая структура (см. § 2.2): что соответствует ей на первом уровне изучения?

В математике хорошо известна метрика Фреше, иначе «пространственная метрика» $\rho : M \times M \mapsto \rho$, для которой (9.1.3—4) и смысла не имеют, ибо порядок на *M* не введен. Более того, ρ определена на всем $M \times M$, а τ лишь на части $U \times U$ и не задана для пар ахронных точек. Вместо (9.1.5) метрика Фреше удовлетворяет обратному неравенству (неравенству треугольника):

$$\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) \qquad (9.1.9)$$

Так что это две разные, хотя чем-то схожие, структуры. Начать с того, что ρ определяется на произвольном топологическом пространстве, а τ только на упорядоченном. Далее, произвол в задании ρ на одном и том же пространстве существенно выше, нежели произвол в задании τ. Поскольку τ должна согласовываться с уже заданной структурой порядка, каковое требование для ρ отсутствует. На гладком уровне рассмотрения это различие было проиллюстрировано в § 2.5. По пространственной метрике τ однозначно строится равномерная структура, а по темпоральной метрике τ никакой равномерной структуры, вообще говоря, построить нельзя. Если сферы $\{x | \rho(a,x) < \varepsilon\}$ с центром в точке *a*, и радиусом ε можно принять за системы окрестностей (базис топологии), то для темпоральной метрики τ такое невозможно, ибо всегда $a \in \partial\{x | \tau(a,x) < \varepsilon\}$. На паре ахронных точек $x, y \in U$, кинематическая метрика либо (чаше всего) вовсе не задана, либо (тоже распространено) ей приписывают мнимое значение, отталкиваясь от формулы (9.1.6), либо приписывают значение «минус бесконечность» (при работе с аппаратом вогнутых функций), — но во всех случаях это значение нерегулярно, тогда как ρ определена и имеет вещественное, даже неотрицательное, значение на любой паре точек $x, y \in M$.

Тем не менее, пользование этой метрикой плодотворно. Среди всех мыслимых морфизмов $(U, <) \times (U, <) \Rightarrow (R, <)$ для приписывания числа «промежутку времени» выделяется (посредством аксиом $КМ_{1—3}$) некоторый класс функций, с которым можно работать.

2º. Структуры, порождаемые темпоральной метрикой. Как только введена кинематическая метрика τ, так сразу же можно обогатит и конкретизовать абстрактное рассмотрению темпорального универсума $(U, <)$. Именно, если имеется изотонная кривая (материальная точка § 5.5) $\lambda : [0,1] \mapsto U$, то на ней можно теперь ввести ДЛИНУ ДУГИ — промежуток «собственного» или «личного» времени этого наблюдателя:

$$arcl \quad (\lambda ;0 ,1):=$$

$$=\inf\left\{\sum_{i=1}^{m} r(\lambda s_{i-1},\lambda s_i) \;\middle|\; 0=s_0<s_1<\ldots<s_m=1\right\} \qquad (9.2.1)$$

этот инфиум берется по всем разбиениям параметрического отрезка [*0, 1*]. Доказывается, что он не зависит от выбора параметра, что при сложении дуг их длины складываются. Поэтому можно принять формулу (9.2.1) за инвариантное определение длины дуги — промежутка длительности материальной точки (наблюдателя) от мига λ0 до мига λ1. При этом вместо трудного понятия «точной нижней границы можно говорить о простом пределе

$$arcl \quad (\lambda ;0 ,1):= \lim \sum \tau\,(\lambda\, s_{i-1}, \lambda\, s_i) \qquad (9.2.2)$$

при $s_i - s_{i-1}$, стремящейся к нулю. Среди всех материальных точек теперь можно выделить ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ точки (подчеркиваем, что не «инерциальную систему отсчета», а «инерциальную материальную точку»).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Кривая $\lambda : [0,1] \mapsto U$ называется

ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ, а соответственно материальная точка $l = \lambda[0,1]$ называется ИНЕРЦИАЛЬНОЙ, если

$$\tau(p,q) = arcl\ (\lambda;p,q) \qquad (9.2.3)$$

для всякой пары точек $p < q$ на этой кривой.

Примеры антндеситтерова мира § 8.6 и выреза § 8.8 показывают, что две и парциальные частицы, выйдя из общего положения *p,* могут снова встретиться в событии *q*. Поэтому, вообще говоря, нельзя рассуждать про инерциальную систему отсчета (см. § 5.6), т.е. про такую систему отсчета, ВСЕ линии тока в которой являются инерциальными материальными точками. Максимум на что можно надеяться, — что такая система существует локально, хотя, впрочем, и это еще не доказано в общем случае.

Следующее понятие, которое удается ввести, когда имеется метрика τ, это аналог ортогональности (перпендикулярности):

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Пусть $l = \lambda[0,1]$ — инерциальная материальная точка, $p = \lambda 0$, $q = \lambda 1$ и $p \in A$. Говорим, что множество *A* ортогонально *l* в *p,* если *A* совпадает со множеством $\{x|\tau(x,q) = \tau(p,q)\}$.

Геометрический смысл этого определения в том, что сфера ортогональна своему радиусу, хотя оно и нуждается в некоторых третьестепенных математических оговорках. В частности, ортогональное множество не обязано являться поверхностью в дифференциально-геометрическом смысле, см. § 10.1.

Далее, метрика позволяет определить углы. Мы не будем задерживаться на этом определении. Возможны разные его варианты. Один из них предложен в 9, но на его основе удается доказать крайне мало теорем. Главная же проблема, связанная с углами, еще не решена: ведь из общих соображений (см. § 2.2) напрашивается, что структурой порядка уже сразу должна была бы однозначно задаваться и некоторая угловая структура — без каких бы то ни было дополнительных метрик. Мы же — на первом уровне рассмотрения — не умеем этого делать без привлечения метрики τ. Коль скоро углы введены (например, на втором уровне), а также введено понятие площади, можно, отталкиваясь от двуугольников, определить (ср. § 8.7) понятие кривизны.

3º. Темпоральная метрика в простейшем случае. На третьем уровне рассмотрения, т.е. при наличии абсолютного параллелизма, кинематическая или темпоральная метрика хорошо известна. Она задается равенством (9.1.6) и часто называется «псевдоэвклидовым расстоянием», «метрикой Минковского», «лоренцовой метрикой». Иногда по физическим соображениям координата t домножается на скорость света c, а иногда на c делят пространственные координаты x, y, z. На границе конуса (8.4.3) эта метрика обращается в нуль, так что аксиома КМ$_2$ выполнена. Аксиома КМ$_3$ проверяется несложными математическими выкладками, опираясь на неравенство Минковского. Аксиома КМ$_1$ выполнена в том смысле, что для ахронных пар точек формула (9.1.8) дает чисто мнимое число, а не вещественное. Как уже объяснялось в § 2.3—4, при одном и том же порядке < можно ввести много метрик (9.1.6), отличающихся друг от друга масштабными множителями λ.

На примере этой простейшей метрики видно, как сильно отличается сфера $r = 1$ от пространственной сферы $\rho = 1$. В самом деле, уравнение $\tau(0, x) = R$ для (9.1.6) задает одну половину двуполостного гиперболоида

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2R^2, \qquad t > 0 \qquad (9.3.1)$$

и даже, если бы мы согласились на естественные расширения областей переменных, мы» лишь добавили бы еще вторую половину $t < 0$ этого гиперболоида и его границу

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = -c^2R^2 \qquad (9.3.2)$$

так что «шар» $\tau \le R$ оказался бы некомпактным множеством, состоящим из трех компонент, разделенных конусом $\partial O^+ \cup \partial O^-$. Тем не менее, известно, насколько удобной оказывается эта метрика для решения конкретных задач специальной теории относительности.

Длина дуги (9.2.2) временноподобной кривой *A* относительно метрики (9.1,6) выражается интегралом вдоль этой кривой

$$arcl(\lambda; p, q) = \int_p^q \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)} \qquad (9.3.3)$$

Кривые без особенностей распадаются на классы: с положительной длиной дуги, с нулевой и с чисто мнимой длиной. Последние обычно полагаются не имеющими физического смысла. Объясняется это тем, что всякие две точки такой кривой оказываются ахронными: они не связаны друг с другом никаким «раньше—позже», кроме произвольно привносимого извне параметра этой кривой, допускающего обращение его ориентации на противоположную. Указанное различение: «вещественная длина», «мнимая длина» весьма удобно для экспликации того, что называют «физическая размерность». Расстояния, измеряемые вещественными числами, имеют размерность «секунда», а расстояния, измеряемые мнимыми числами, имеют размерность «метр». Никакими преобразованиями, сохраняющими (9.1.6), невозможно совместить вещественное расстояние с мнимым, что отвечает идее несводим ости пространственного масштаба к временному, и обратно.

4°. Темпоральная метрика на уровне гладкости — риманов случай. На втором уровне рассмотрения простейшим, случаем оказывается такой, когда за кинематическую метрику принимается следующая конструкция. В каждой точке $p \in M_n$ в касательном пространстве T_pM вводится метрика τ_p вида (9.1.6); метрики в разных точках гладко соотнесены. Такая метрика, выраженная не в специализированных координатах, а в произвольно-общих, имеет вид

$$\tau_p(X) = \sqrt{g_{ik}(p) X^i X^k}\,, \qquad X \in T_pM\,, \qquad (9.4.1)$$

где

g_{ik} — тензор сигнатуры (+ - ... -).

Как и в (9.1.6), метрика эта удовлетворяет аксиомам кинематической метрики КМ$_{1—3}$ при каждом фиксированном *p*. Дополнительно к этим трем аксиомам метрика (9.4,1), как и метрика (9.1.6), удовлетворяет следующим специальным условиям (свойства кинематической ВЕКТОРНОЙ метрики). Она положительно однородна по переменным $X \in T_p M$, она имеет вторые производные по переменным $X \in T_p M$, причем $ran\left(\frac{\partial^z \tau}{\partial X^i \partial X^k}\right) = n-1$. Кроме того, она гладкая по $p \in M$.

ТЕОРЕМА 17. Из определения (9.4.1) вытекает

$$g_{ik}(p) = \frac{1}{2}\frac{\partial^z {\tau_p}^2}{\partial X^i \partial X^k} \qquad (9.4.2)$$

По метрическому тензору g_{ik} известным образом вводится длина дуги временноподобной кривой

$$arcl(\lambda; p,q) = \int_p^q \sqrt{g_{ik} \lambda_*^i \lambda_*^k} \qquad (9.4.3)$$

где λ_* — касательная к кривой λ; вводится темпоральное расстояние $\tau(p, q)$ между точками $p < q$ по формуле

$$\tau(p,q) = \sup\{arcl\,(\lambda;\, p,q)\ |\lambda\} \qquad (9.4.4)$$

причем можно проверить, что $\tau\ (p,\ q)$ удовлетворяет КМ$_{1\text{-}3}$; вводится аффинная связность, тензор кривизны и т.п.

С физической точки зрения и формула (9.3.3), записываемая в виде

$$L = \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \qquad (9.4.5)$$

и формула (9.4.3) толкуются как выражения для «действия» или «лагранжиана» — в простейших случаях одной незаряженной точки.

Геометрически очень важно, что посредством g_{ik}, удается ввести отношение ортогональности

$$X \;|Y \Leftrightarrow g_{ik}(p)X^i X^k = 0, \qquad X, Y \in T_p M \qquad (9.4.6)$$

которое физически истолковывается как отношение одновременности. Говорят, что событие g, одновременно событию p относительно наблюдателя $X \in T_p M$, если p и q. лежат на одной гиперповерхности, ортогональной X. Подробнее об этом см. в § 10.

5º. Темпоральная метрика на уровне гладкости — финслеров случай. Уровень гладкого рассмотрения не исчерпывается римановым случаем. Общий случай конуса O_p^+. в касательном векторном пространстве, как отмечалось в § 8.4, — это случай несферического (неэллиптического) конуса с уравнением (8.4.1—2). Для такого конуса нельзя подобрать координат, в которых, он задавался бы уравнением (8.4.3) или уравнением $g_{ik}X^i X^k = 0$, где g_{ik} был бы тензором (т.е. не зависел бы от X). Но функция τ_p : $T_p M \to R$, удовлетворяющая описанным в предыдущей рубрике свойствам векторной кинематической метрики, всегда существует в каждой $p \in M_n$, хотя конечно, она не единственная при заданном $O_p^+ \subset T_p M$. При этом формула (9.4.2) модифицируется на первый взгляд очень мало:

$$g_{ik}(p, X) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tau_p{}^2}{\partial X^i \partial X^k}$$

так что компоненты g_{ik} становятся функциями не только от точки $p \in M_n$, но и от вектора $p \in O_p^+ \subset T_p M$. Но математические последствия этой «малой модификации» крайне обширны.

Сначала уточним, что на самом деле, как выясняется, зависимость g_{ik} от X в (9.5.1) оказывается зависимостью из от ВЕКТОРА X, а от НАПРАВЛЕНИЯ λX. Технически это выражается формулировкой: g_{ik} суть однородные степени ноль по векторному переменному функции. И это вполне соответствует тому, что в примере § 8.4 мы имеем дело с КОНУСОМ, различающемся ПО НАПРАВЛ2НИЯМ. Таким образом, на уровне физической интерпретации рассматриваемая темпоральная модель отвечает анизотропности пространствовремени, отвечает зависимости его параметров от направления.

Зависимость g_{ik} от X превращает тензор g_{ik} в «финслеров тензор», который является объектом уже не над *TM,* а над *TTM* и исходные формулы преобразований координат иные. Соответствующие формулы написаны в [11], они громоздки, и мы не станем их тут повторять. При каждом фиксированном значении $X \in O_p^+$ сигнатура квадратичной формы $g_{ik}(p, X)Y^iY^k$ та же, что в римановом случае, т.е. (+ - … -). Многие формулы финслерова аппарата похожи внешне на римановы, но с существенным отличием. Например,

$$\tau_p{}^2(X) = g_{ik}(p, X)X^iX^k, \qquad X \in O_p^+ \qquad (9.5.2)$$

но величина $g_{ik}(p, X)Y^iY^k$ НЕ ИМЕЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СМЫСЛА. Например, ортогональность возможна в привычном смысле: «Y ортогонален X в точке p», что означает $g_{ik}(p, X)X^iY^k = 0$. Тогда высказывание «Y ортогонален X» неравносильно высказыванию «X ортогонален Y». Но конкурентоспособна и формулировка: «Y ортогонален X относительно Z в точке p», что означает $g_{ik}(p, Z)X^iY^k = 0$. Угол (быстрота) φ между временноподобными векторами X и Y и выражается формулой:

$$\varphi = -arsh\,\frac{g_{ik}(p, X)Y^iZ^k}{\sqrt{g_{ik}(p, X)Y^iY^k}\sqrt{-g_{ik}(p, X)Z^iZ^k}} \quad (9.5.3)$$

где

Z — вектор, ортогональный X на двумерной плоскости $X \wedge Y$ в надлежащей ориентации.

По метрическому финслерову тензору g_{ik} строится финслер-аффинная связность ($\Gamma^i_{jk}, C^i_{jk}, N^i_k,$). Этими компонентами определяется параллельный перенос, горизонтальная и вертикальная ковариантные производные, горизонтальные геодезические, финслеровы тензоры кривизны (их три штуки) и прочее, см. [11].

С точки зрения философской очень неприятно, что в анизотропном случае ортогональность никак не выражается через конус ∂p^+ в противоположность тому, что сказано в § 2.3 (кроме как в двумерном случае, когда про анизотропию направлений говорить нелепо, поскольку остается одно единственное направленно). На физико-философском языке это приводит к постановке проблемы: считать ли понятие «одновременности» понятием КАУЗАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ (т.е. оно сводится к <) или же считать его понятием СТРУКТУРЫ ЛАГРАНЖИАНА? См. также § 10.1.

Новым в финслеровом случае оказывается, что для одного и того же конуса O$^+$ можно задать совершенно разные темпоральные метрики, финслеровы тензоры коих не приводятся к один к другому умножением на масштабный скаляр. Например, в координатах ξ^n , … , ξ^n при n ≥ 3 конус O$^+$ зададим условием

$$\xi^1 > 0 \ \& \ \xi^2 > 0 \ \& \dots \& \ \xi^n > 0 \qquad (9.5.4)$$

Это «симплициальная кинематика», ибо конус здесь — симплекс в пространстве лучей. В этой кинематике можно ввести векторную темпоральную метрику τ любой из двух следующих формул:

$$\tau = \sqrt{\left(2\sum_{k=1}^{n}\xi^k - n\min_k\{\xi^k\}\right)n\min_k\{\xi^k\}} \qquad (9.5.5)$$

или

$$\tau = \sqrt[n]{\xi^1 \cdot \ldots \cdot \xi^n} \qquad (9.5.6)$$

Исходя из (9.5.1), элементарными выкладками устанавливается, что финслеровы тензоры g_{ik} для (9.5.5) и (9.5.6) различны и не пропорциональны. См. подробнее [11], формулы (1.2.5), (1.2.7), (2.2.7) и (3.6.2).

6º. Орициклическая или финслер-шварцшильдова метрика. Один случай, в котором при одном и том же конусе финслеровы метрики существенно различны, заслуживает отдельно го внимания. Возьмем сферический конус, и пусть g_{ik}(р) —обычный риманов тензор для этого конуса. Метрику же $\sigma(p, X)$ на внутренности этого конуса мы зададим формулой

$$\sigma(p,X)=\left(g_{ik}(p)A^iX^k\right)^\beta\left(g_{ik}(p)X^iX^k\right)^{(1-\beta)/2} \qquad (9.6.1)$$

где $0 \leq \beta < 1$, а вектор $A(p)$ взят так, чтобы $g_{ik}A^iA^k = 0$, т.е. $A\in\partial O_p^+$. Тогда из (9.5.1) получим для метрического финслерова тензора $\sigma(p, X)$, отвечающего $h_{ik}(p, X)$, следующее выражение:

$$h_{ik}(X)=\sigma^2\left((1-\beta)\tau^2g_{ik}+\beta a_ia_k-2\beta(1-\beta)(x_i-a_i)(x_k-a_k)\right) \qquad (9.6.2)$$

где обозначено

$$\tau^2=g_{ik}X^iX^k \qquad (9.6.3)$$

$$a_i=\frac{g_{ik}A^k}{g_{ik}A^iX^k} \qquad (9.6.4)$$

$$x_i=\tau^{-2}g_{ik}X^k \qquad (9.6.5)$$

Здесь подразумевается зависимость всех величин от p. Очевидно, что тензоры g_{ik} и $h_{ik}(X)$ не связаны соотношением $h_{ik}=\lambda g_{ik}$.

Метрика (9.0.1) доставляет контрпример к одному философскому замыслу. А.Д.Александров выдвинул программу получить «всю теорию относительности» из одного только отношения рода порядка — хотя бы с точностью до объема или множителя, как сформулировано в теореме 4 в § 2.4. Но, как мы видим, эта программа может быть реализована только в априорном предположении (презумпции, ограничении), что ищется РИМАНОВА метрика. Снявши это ограничение и допустив И ФИНСЛЕРОВУ, мы сразу обнаруживаем, что МЕТРИКА НЕ ВЫВОДИМА ИЗ ПОРЯДКА.

Метрика (9.6.1) приобретает также обсервационное значение, если вместо g_{ik} подставить конкретно шварцшильдову (или керрову) риманову метрику, а вектор A выбрать в направлении на центр $r = 0$. По-видимому, такая модель точнее эксплицирует феномен тяготения. Ведь при тяготении ИМЕЕТСЯ ВЫДЕЛЕННОЕ НАПРАВЛЕНИЕ — все шары биллиардного стола скатываются при наклоне в одну сторону. Оно имеется даже в бесконечно малом, и никакой вариант «принципа эквивалентности» не может отменить того экспериментального обстоятельства, что РАЗНЫЕ тела скатываются по направлению К ОДНОМУ И ТОМУ ЖЕ центру. Риманова модель учесть этого обсервационного факта не может, потому что в бесконечно малом в римановой геометрии все направления равноправны. В этом качественное преимущество финслеровой метрики (9,6.1) перед римановой. Подробное рассмотрение [11] ее показывает, что все орбиты планет с радиусом от одной астрономической единицы и выше в этой модели неотличимы от обычных щварцшильдовых: все световые эффекты качественно в точности совпадают со шварцшипьдовыми. Различие между этими моделями может — и то вроде бы за пределами экспериментальной точности — проявляться лишь в разных допплеровых эффектах по разным направлениям. Следовательно, обсервационно эта модель не хуже шварцшильдовой. Различие между двумя моделями делается заметным на расстояниях, близких шварцшильдову радиусу, а особенность в $r = m$ оказывается в финслеровой модели истинной, а не координатной. Поэтому в этой модели нет «черных дыр» $(0 < r \leq m)$, а тем самым нет и проблем, обсуждавшихся в § 5.2 и в § 8.7.

Технически различие между шварцшильдовым и финслершварцшильдовым решениями в том, что в шварцшильдовом решении в касательном n-мерном пространстве действует группа Лоренца. В финслер-шварцшильдовом (9.6.1) действует та ее подгруппа, которая сохраняет неподвижным луч λA. Она изоморфна орициклической (орисферической) подгруппе группы движений (n-1)-мерного пространства Лобачевского, т.е. группе подобных преобразований (n-2)-мерного эвклидова пространства.

7º. Проблема согласования порядков. Коль скоро имеется метрический тензор $g_{ik}(B, X)$ сигнатуры (+ - ... -), им однозначно определяется конус

$$g_{ik}(p, X)X^i X^k > 0 \qquad (9.7.1)$$

в касательном пространстве. Можно, по крайней мере локально, из двух половинок, этого конуса одну отметить как выделенную. Как описывалось в §2.3, эта выделенная половина совпадает с конусом O_p^+, получаемым посредством выделения изотопных функций среди всех гладких функций. Но и традиционном изложении не вводят на M_n заранее никакого порядка <, а определяют самый порядок через метрику, точнее, через выделенную половинку конуса (9.7.1). Именно, если вроменноподобная кривая выходит из p и приходит в q, то (при выполнении известных условий и локально) говорят, что p предшествует q, что обозначим p —| q соответственно говорят, что в некоторой окрестности задан строгий порядок —|. Аксиомы ТК$_{1—4}$ при этом выполняются.

Поэтому, если мы начинаем с (U, <), то возникает следующая проблема. По < мы посредством аксиом ГК$_{1—2}$ из § 8.10 построили тензор g_{ik} (с точностью до множителя λ), по тензору g_{ik} построили далее —|. Как соотнесены < и —|? Совпадают ли они? Которое из двух отношений сильнее? Совсем ли они различны? Ответы на эти вопросы получены. При выполнении аксиом ТК$_{5—8}$ и последующих двух аксиом ГК$_{4—5}$ отношения < и —| всегда локально совпадают.

ГК$_4$. У всякой точки $U \in M$, имеется окрестность U такая, что для любых $p,\ q \in U$ из $p \leq q$ & $q \leq p$ вытекает существование сильно-изотопной функции f на U с $f_p < f_q$. Иными словами, любые ахронные p и q, можно РАЗДЕЛИТЬ сильно-изотонной функцией f.

ГК$_5$. Если точки p и q, можно соединить изотонной кривой, то p и q, можно соединить также дифференцируемой изотопной кривой.

В отношении аксиом ТК$_7$ и ГК$_4$ доказана их независимость. Независимость аксиомы ГК$_5$ проблематична. Неоднозначность тензора $g_{ik}(p, X)$при решении этой задачи оказывается несущественной, ибо по условию у всех возможных g_{ik}

конус O_p^+ один и тот же.

8º. Проблема случайных метрик. Вернемся к первому уровню рассмотрения. Мы исходили из заданного ЧЕТКОГО отношения порядка: запись $p < q$. имела только два логических значения «истинно» или «ложно». Таким же образом и темпоральную метрику τ мы определяли как ТОЧНО заданное число $\tau\ (p,\ q)$ при заданных $p < q$. Но практически всегда вмешивается ШУМ, и сказать, следует ли q за p (равносильно, установить $\tau\ (p,\ q) > 0)$ можно лишь с некоторой степенью вероятности. Поясним на примере анизотропного упорядочения из § 8.4. Фронт световой волны там $t = \left\|\vec{x}\right\|$. Это — некоторое выпуклое тело, возможно, с ребрами и плоскими участками. В него можно вписать шар (эллипсоид) и вокруг него можно описать шар. Если взять средний между вписанным и описанным шарами, то мыслима такая идеология: на самом дела фронт световой волны не $t = \left\|\vec{x}\right\|$, а обычный круговой $t = \left|\vec{x}\right|$, тогда как отклонения от сферичности (от среднего шара) СЛУЧАЙНЫ и раскиданы с дисперсией, соответствующей толщине слоя между внутренним и внешними шарами. Хотелось бы получить математический аппарат, который работал бы с распределениями вида

$P(\tau(p,q) \geq \xi)$ давал бы результаты, при вырождении распределений в хэвисайдовы приводил бы к обычным «детерминированным» моделям. Это, тем более желательно, что для метрики Фреше такая теория построена [20]. Но, увы, для τ и < ничего содержательного нет.

§ 10. ОТНОШЕНИЕ ОДНОВРЕМЕННОСТИ

1º. Локальное определение одновременности. Отношение одновременности, которое в ньютоновом упорядочении так легко задавалось формулой x ∈ $\overline{p}$ (см. § 6.1), вырастает в непростую проблему для случая эйнштейнова упорядочения, т.е. когда выполняется постулат близкодействия, (см. § 8.1) и $\overline{p} = p$. Теперь точечный наблюдатель *l* не в силах интервально датировать происходящие не у него события ОДНОЗНАЧНО. Не давая пока точных дефиниций, опишем возникающие идеи и трудности. Для наглядности изложения начнем с третьего уровня как самого богатого.

Чем характеризуется одновременность в ньютоновом случае? Да тем, например, что если мысленно поменять местами прошлое и будущее, т.е. $p^+ \to p^-$, то множество событий, одновременных *p*, не изменится: $\overline{p} \mapsto \overline{p}$, ибо всякая точка из $\overline{p} = \overline{p^+} \cap \overline{p^-}$ остается на месте. Говоря технически, речь идет об антиавтоморфизме $\omega\colon U \mapsto U,$ при котором $p < q \Leftrightarrow \omega q < \omega p$ и сохраняются еще некоторые структуры, в частности, масштаб на прямой *l*. Эта идея, в превращенном виде, принимается за основополагающую к в эйнштейновом случае. Здесь приходится различать изотропный случай, когда корректность определения очевидна, и анизотропный, когда приходится громоздко обосновывать корректность определения. Читатель может пропустить эти обоснования, представляющие узко технический интерес.

В изотропном случае, как мы знаем, эйнштейново упорядочение <

порождает некоторую псевдоэвклидову метрику q_{ik} с точностью до множителя λ. Сама метрика допускает антиавтоморфизм $< \to >$, а при фиксации масштаба на l никаких гомотетий не остается, так что беспокоиться о множителе λ не приходится. Так как при $< \to >$ из $p \to q$ следует, что $p^+ \mapsto p^-$, то оправданно определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Говорим, что $x \in l$ РАДАРНО ОДНОВРЕМЕННО событию $y \notin l$ относительно наблюдателя l, если $\exists p \in l y \in \partial p^+$ и $\exists p \in l y \in \partial p^-$ и y есть середина отрезка pq.

Содержательно это определение соответствует следующей процедуре датирования. В дату t_p наблюдатель l посылает электромагнитный сигнал, который в событии y отражается и возвращается к l в дату t_q. Тогда событию y приписывается дата $t_y = t_x = \frac{1}{2}\left(t_p + t_q\right)$, т.е. середина того интервала, который отвечает «интервальной датировке» события y (см. § 5.4). В вышеприведенном определении x и y фигурируют несимметрично (из-за условия $x \in l$ и $y \notin l$), но на представляет никакого труда переформулировать определение, сделав его более громоздким, так, чтобы x и y стали симметричными. Тогда автоматически проверится, что так данное определение обеспечивает радарной одновременности свойства симметрии и транзитивности (при фиксированном наблюдателе l): геометрически последнее означает, что множество событий, радарно одновременных событию $L \in i$ относительно l, составляет гиперплоскость.

В анизотропном случае тоже можно принять определение 21 — оно однозначно определит радарную одновременность и тем самым оно корректно. На языке антиавтоморфизмов оно равносильно следующему громоздкому определению:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Говорим, что y радарно одновременно x относительно наблюдателя l, если при отображении $\omega : A_n \mapsto A_n$, $\omega x = x$, обладающем тремя свойствами а), б) и в), оказывается, что y принадлежит инвариантному множеству. Означенные свойства таковы; а) масштаб на l не меняется: б) всякая двумерная плоскость, проходящая через l, переходит при ω в себя: в) $p < q \Leftrightarrow \omega q < \omega p$, т.е. $p^{+} \mapsto p^{-}$.

Уже в изотропном случае возникает трудность с транзитивностью одновременности: если x и y радарно одновременны относительно наблюдателя l_1, а y и z радарно одновременны относительно наблюдателя l_2, то x и z вообще говоря не одновременны радарно ни относительно l_1 ни относительно l_2 (кроме случая, когда l_1 и l_2 взаимно неподвижны, т.е. прямые l_1 и l_2 параллельны). Гораздо хуже обстоит дело в анизотропном случае. В каждой двумерной плоскости инвариантное множество существует и является прямой линией. Все эти прямые проходят через общую точку. Однако в общем случае они не образуют плоскости. Поэтому отношение одновременности делается нетранзитивным даже по отношению к одному и тому же наблюдателю: p радарно одновременно q, относительно l, q, радарно одновременно r относительно того же l но p и r не одновременны радарно относительно l. Множество событий, одновременных данному (относительно наблюдателя), оказывается негладким в дифференциально-топологическом смысле многообразием (в смысле вложенного многообразия), т.е. геометрически это но «поверхность». Правда, это пространство по-прежнему имеет размерность n-1 и разделяет два n-мерных подпространства. Но на нам уже нельзя ввести гладкой системы координат, которая согласовывалась бы с гладкостью объемлющего A_n. Наконец, при определениях 21—22 выполняется следующая парадоксальная теорема:

ТЕОРЕМА 18. Если упорядочение эйнштейново и существенно не изотропное, а одновременность понимается в радарном смысле, то опыт Майкельсона приведет к умозаключению об изотропности светового конуса. Иначе: радарным образом НЕВОЗМОЖНО обнаружить анизотропию.

Фактически эта теорема (но явно на сформулированная, а выдвигаемая в виде отдельных примеров, зачастую некорректно поданных) была фундаментом для нападок тех анизотропистов, которые стремились отвергнуть—опровергнуть теорию относительности. Как бы ни относиться к их намерениям, теорема является веским доводом в пользу того мнения, что радарное определение нецелесообразно принимать как ЕДИНСТВЕННОЕ, как «однозначное», как «абсолютное», «как самое верное».

При переходе с третьего на второй уровень рассмотрения возникают дополнительные сложности. Если в каждой точке $p \in M_n$ конус $O_p^+ \subset \mathrm{T_pM}$ изотропен, то множество радарно одновременных нулю относительно вектора $\mathrm{x} \in O_p^+$ событий является (n-1)-плоскостью в $E_n = T_pM$ и потому может рассматриваться как гиперплоскость, касательная к некоторой гиперповерхности. В случае, если векторное поле X («система отсчета» как она определялась для второго уровня рассмотрения в § 5.6) удовлетворяет известным условиям, то меню говорить про «поверхность одновременности для данной системы отсчета». В анизотропном же случае это множество негладко в нуле для каждого T_pM, а потому единственным объектом, который мог бы возникнуть на этом пути в виде аналога «поверхности одновременности», оказывается НИГДЕ НЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ топологическое (n-1)-мерное пространство. Ведь ни в одной его точке не может существовать касательной гиперплоскости!

Такого рода аналитические трудности заставляют склоняться к определению одновременности через ортогональность (9.4.6) вместо радара. Для изотропного случая оба подхода равноправны и эквивалентны, но в анизотропном случае они существенно различны. Отмеченные в § 9.5 трудности приводят к тому, что отношение одновременности, которое в классическом галилеево-ньютоновом случае было отношением двуместным (p одновременно q), в эйнштейновом изотропном случае было отношением трехместным (*p* одновременно *q* относительно наблюдателя *l*), делается в анизотропном случае отношением четырехместным: *p* одновременно *q* относительно наблюдателя *l* по отношению к *X*, что формулой будет:

$$g_{ik}(p, X)\lambda^i_* Z^k = 0, \qquad l = \lambda[0, 1] \qquad (10.1.1)$$

где $g = p + Z$. И, как уже отмечалось в § 9.5, встает трудная философская, метатеоретичэская проблема: считать ли одновременность характеристикой, всецело порождаемой из каузальной структуры, или же одновременность следует неразрывно связывать с метрической структурой?

2º. Псевдопроблема — «обратимость времени». Операция $p^+ \mapsto p^-$, связанная с определением одновременности и записываемая в подходящих координатах («декартовых», «лоренцовых», «галилаевых») в виде

$$\begin{cases} t \mapsto -t \\ \vec{x} \mapsto \vec{x} \end{cases} \qquad (10.2.1)$$

породила уйму разговоров, в том числе и некорректных. Собственно, когда речь идет о большом числа разных, хотя и близких, нестрогих высказываниях большого числа лиц, «опровергнуть» ничего невозможно. Но мы постараемся внести в эту тему ясность, и тогда желающему, знакомому с тем или иным вариантом метатаоретических разговоров насчет обратимости времени, будет видно, в чем некорректность именно такого-то варианта.

Замена отношения $p < q$, на обратное $q < p$ называется чаще всего «обращением течения времени»: в координатах это замена *t* на - *t*. Что сохраняется в физике иди тиком обращении, а что нет? Все те законы, в формулировку коих входит только t^2 или $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, сохраняются, конечно. А это довольно широкий класс законов и разделов физики. Волновое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ относится к нему, следовательно, обладает помимо запаздывающего потенциала еще опережающим потенциалом. Лоренцова метрика относится к тому же классу, следовательно, вся специальная теория относительности «симметрична относительно обращения времени». Поэтому зачастую говорят про «обратимость времени в фундаментальных физических теориях». Так как то «время» которое согласуется с эмпирическим материалом, очевидно необратимо (в том смысле, что никто на может из понедельника вернуться в предыдущее воскресенье и пережить уик-энд задом наперед), то иногда говорят про «драматическое противоречие теории и практики». На деле ситуация не столь драматична — теория тоже не дает полной обратимости. Ведь физика не сводится к закономерностям, квадратичным по *t*. Например, уже в ньютоновой физике существовала такая фундаментальная физическая теория, как теория теплопроводности, в которой основным является уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (10.2.2)$$

Оно, конечно, не инвариантно относительно (10.2.1). Поэтому вся та физика, которая имеет дело с нагреванием — проводника ли под током, перемещающегося ли в среде тела — уже перестает быть симметричной и, следовательно, нет того «разрыва теории с практикой»} о котором беспокоятся упомянутые мыслители.

Но даже и в тех дисциплинах, в которых фигурируют исключительно выражения, инвариантные относительно (10.2.1), нот причин утверждать «обратимость времени» в темпоральном универсуме M_n. Максимум, что можно утверждать, — это «обратимость времени» в воображаемом касательном пространстве T_pM к универсуму M_n в событии p $\in M_n$. Поясним на примере. В космологии распространена метрика $ds^2 = dt^2 - R^2(t)d\rho^2$, где dρ — чисто пространственная. Эта метрика, естественно, инвариантна относительно замены

$$\begin{cases} dt \mapsto -dt \\ d\rho \mapsto d\rho \end{cases} \tag{10.2.3}$$

но получаемые из нее космологические решения, как известно, не обратимы во времени (нет $t \Rightarrow - t$). Нельзя сменить последовательность ядерных реакций, идущих в зависимости от убывания плотности вещества, обратной последовательностью реакций, которые шли бы с возрастанием плотности. Или еще более «чистый» пример. Рассмотрим в обычной эвклидовой геометрии на плоскости дифференцируемую кривую λ. Она имеет касательную в каждой точке, так что инфинитезимально эта кривая симметрична относительно своей нормали: касательная, перевернувшись, совпадет сама с собой. Но из этой инфинитезимальной симметрии, которая, собственно, восходит исключительно к дифференцируемости кривой и ничего специфичного для ДАННОЙ кривой λ не содержит — никак нельзя заключать о какой бы то ни было глобальной симметрии рассматриваемой кривой. Можно взять параболу, таутохрону, синусоиду, брахистохрону, спираль — кривая может виться как угодно, лишь бы гладко, без изломов и точек возврата. Тот, кто драматизует «противоречие» теории второго уровня рассмотрения и эмпирического факта необратимости старения, совершает именно такую ошибку переноса инфинитезимального свойства на глобальный аспект.

До сих пор мы оставались в рамках изотропного случая. В анизотропном же случае, как сказано в предыдущей рубрике, инвариантное множество при $p^+ \Rightarrow p^-$ не оказывается плоскостью, значит, ни существует координат, в которых было бы возможно (10.2.1). Таким образом! в анизотропном случае с самого начала ОТСУТСТВУЕТ «симметрия прошлого и будущего», отсутствует «обратимость времени». Можно пофантазировать, что, так как необратимость есть явление кумулятивное, то достаточно малого, ничтожного, отклонения от изотропии, дабы возникла устойчивая асимметрия времени. В этой идеологии изотропная модель выглядит как всего лишь высокоидеализированная модель более реалистического анизотропного случая, а при таких условиях «обратимость времени» делается невозможной даже на третьем уровне рассмотрения, — и проблема снимается полностью.

3º. И парциальная система отсчета и инерциальный наблюдатель. Будем вести рассмотрение на третьем уровне. Как и в § 6.5, рассматриваем инерциальную систему отсчета, т.е. систему параллельных временноподобных прямых l в A_n. Согласно сказанному в § 10.1, в изотропном случае одновременными для события p будут все события ас, которые лежат на плоскости, ортогональной l. Так как все прямые у нас параллельны, никаких трудностей не возникнет. Это определение вполне согласуется с той функцией времени, которая каждому событию x сопоставляет дату t_x, равную аффинной координате на прямой l. В отличие от ньютонова случая «здесь в пространстве (т.е. в фактор-универсуме $\frac{A_n}{l}$ может быть введена пространственная метрика ρ — введена исключительно из отношения <. Это та самая норма $\|\cdots\|$, которая фигурирует в (8.4.1): поскольку речь идет об изотропном случае, это обычная эвклидова норма (расстояние). Взяв теперь декартовы (прямоугольные) координаты, получим для их преобразования при переходе от системы отсчета с прямой l к системе отсчета с прямой l' (и, соответственно, с относительной скоростью $\frac{v}{c} = th\underline{l, l'}$) такие формулы:

$$\begin{cases} t \mapsto \left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t+\dfrac{\vec{v}\vec{x}}{c^2}\right) \\ \vec{x} \mapsto \left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\vec{x}+\vec{v}t+\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\,\dfrac{\vec{v}\times\left(\vec{v}\times\vec{x}\right)}{v^2}\right) \end{cases} \qquad (10.3.1)$$

$$\begin{cases} t \mapsto t+t_0 \\ \vec{x} \mapsto \vec{x}+\vec{x_0}+\dfrac{\vec{\alpha}\times\vec{x}}{\alpha}\sin\alpha+\dfrac{\vec{\alpha}\times\left(\vec{\alpha}\times\vec{x}\right)}{\alpha^2}\left(1-\cos\alpha\right) \end{cases} \qquad (10.3.2)$$

Здесь $\vec{\alpha}$ — угол поворота (в трехмерном пространстве) одной системы отсчета относительно другой.

Как уже отмечалось, сплошь да рядом не различают понятий «инерциальная система отсчета» и «инерциальный наблюдатель». Но первое по определению есть покрытие пространства *A*, прямыми *l,* т.е. по существу *n*-мерный объект. Второе — одна прямая *l,* т.е. объект одномерный. Физически второе понятие является вполне операциональным объектом, а для конструирования первого необходимо заполнить весь мир воображаемыми линиями тока вещества. Но для случая инерциальных наблюдателей в специальной теории относительности эти отличия почти незначимы, поскольку система отсчета ОДНОЗНАЧНО ЗАДАЕТСЯ указанием наблюдателя и обратно. Поверхности одновременности для обоих понятий одинаковы — гиперплоскость, ортогональная одному (и потому всем) наблюдателю. Но совсем иное будет в искривленных мирах, например, в таком простом, как мир де Ситтера.

Множество событий, одновременных событию *p,* произошедшему у наблюдателя *l,* в мире де Ситтера (см. § 8.6) тоже оказывается плоскостью ортогональной *l.* Дабы не загромождать изложения геометрическими подробностями, ограничимся двумерным случаем. Тогда «поверхность одновременности» — это прямая (пространственноподобная). Уже тут возникает парадокс. Дело в том, что по законам деситтеровой геометрии все перпендикуляры к прямой *l* обязательно пересекутся в одной и той же точке *w* на расстоянии $\frac{\pi}{2}R$ от прямой *l.* Таким образом, событие w оказывается «вечным мгновением» для наблюдателя *l,* если одновременность понимать в радарном смысле. Оно является МГНОВЕННЫМ событием (точкой), однако оно ОДНОВРЕМЕННО КАЖДОМУ событию у наблюдателя *l.* Если продолжать отсчитывать одновременность по ортогональным поверхностям за эту точку, то при превышении расстояния $\frac{\pi}{2}R$ «время потечет в обратную сторону». Конечно, от этих парадоксов можно избавиться за счет локального рассмотрения, но наличие их побуждает осторожнее относиться к высказываниям, относящимся к терминам «время», «энтропия» и им подобным, применительно ко всему миру в целом.

Как обстоит дело с системой отсчета, состоящей из инерциальных наблюдателей в деситтеровом мире? Прежде всего тут возникает та геометрическая трудность, что тут могут существовать ДВЕ РАЗНЫЙ системы отсчета с равным правом претендующие на такое название: при отсутствии кривизны эти два понятия совпадали в одно. Именно, в эвклидовом случае система прямых, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ одной общей прямой, автоматически оказывается системой ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ прямых. В геометриях же лобачевской, сферической, деситтеровой — не так. Это две разные системы, обе одинаково геодезические (инерциальные). Точно так же различаются и поверхности, ортогональные названным пучкам прямых: в первом случае они называются эквидистантами, а во втором — орисферами. Для нас важно, что ни та ни другая поверхность НЕ СОВПАДАЕТ с плоскостью — в отличие от эвклидова случая. Обе искривлены, хотя и по-разному. В отличие от прямых, ортогональных прямой *l,* ни эквидистанты, ни орициклы из того пучка, который задается прямою *l,* но пересекаются ни в какой общей точке: расстояние между ними — измеряемое по прямой соответствующего пучка — сохраняется одно и то же. Так мы усматриваем, что даже КАЧЕСТВЕННЫЕ свойства «одновременности» различны для инерциального наблюдателя и для системы отсчета из инерциальных наблюдателей. Это обстоятельство — общая трудность, возникающая при переходе к тем моделям, где отсутствует абсолютный параллелизм.

Дополнительно заметим, что при наличии абсолютного параллелизма пространствовремя обладает богатой группой автоморфизмов. В отличие от автоморфизмов ньютонова упорядочения, которые, как указано в формуле (6.6.2), нелинейны по t, автоморфизмы порядка при постулате близкодействия практически всегда линейны, а в изотропном случае формально имеют вид (10.3.1—2) с добавлением еще гомотетий

$$\left(t,\vec{x}\right)\mapsto\left(\lambda t,\lambda\vec{x}\right), \qquad \lambda > 0 \qquad (10.3.4.)$$

Гомотетии, как правило, игнорируют, относя их к масштабным преобразованиям (что, впрочем, ведет к утрате физиками одной важной подгруппы, подробнее см. [11], а поэтому группа Лоренца (10.3.1—2) выступает в литературе сразу в трех ипостасях: как группа преобразований систем отсчета, как группа преобразований инерциальных наблюдателей и как группа автоморфизмов самого пространствовремени. Смешение же этих трех разных аспектов чревато порой кардинальными философскими ошибками, примером некоторых из коих служат работы Л.Яноши.

4^o. Взрывная и вращающаяся системы отсчета. Рассмотрим описанную в § 6.5 взрывную систему отсчета. Отличие эйнштейново случая от ньютонова проявится в том, какой будет поверхность одновременности. Эта поверхность должна быть ортогональна пучку прямых, выходящих из одной общей точки —поскольку именно эти прямые составляют взрывную систему. Следовательно, это пространственноподобная сфера в псевдоэвклидовом пространстве ${}^{3}R_{4}$ с уравнением (9.4.1). На такой сфере автоморфизмами (10.3.1—2,4) порядка индуцируется геометрия Лобачевского. Поэтому оказывается справедливой потрясающая теорема Милна:

ТЕОРЕМА 19. Описание универсума в виде точечного взрыва, случившегося конечное число t лет назад, с последующим по инерции равномерным разбеганием вещества. остающегося в ограниченном объеме сферы радиуса ct эвклидова пространства, РАВНОСИЛЬНО описанию того же универсума как извечно от -∞ до ∞ существующей стационарной системы вещества, заполняющего бесконечное лобачевское пространство, где любая пара точек сохраняет постоянное расстояние.

Пожалуй, более сильного аргумента в пользу конвенциализма никто еще не выдвинул: не случайно А.А.Жданов столь резко выражался в адрес Е.А.Милна. Гораздо более громоздко передсказал по сути ту же теорему А.Л.Зельманов в 1958г.

С вращающейся системой в эйнштейновом случае гораздо хуже. Прежде всего, в пространствовремени специальной теории относительности невозможно взять вращающуюся систему, которая заполняла бы весь универсум. Так как вектор скорости в этой системе имеет вид

$$\left(1,-\rho\omega\sin\left(\alpha+\omega t\right),\rho\omega\cos\left(\alpha+\omega t\right),0\right) \qquad (10.4.1)$$

то система может покрывать только ту часть мира, для которой

$$\rho\omega < c \qquad (10.4.2)$$

где

f — радиус-вектор,

ω — угловая скорость.

Ограничимся этой частью универсума, т.о. некоторым цилиндром. На границе $\rho\omega = c$ кружатся «вращающиеся фотоны», которые сплошной стеной как бы отделяют вращающуюся систему материальных частиц от всего прочего мира. Для удобства рассмотрения возьмем пока только половину этого цилиндра при $t > 0$. Как тут обстоит дело с «поверхностью одновременности»? Сразу выясняется, что к векторному полю (10.4.1) не существует ортогональной поверхности. Следовательно, вращающаяся система материальных точек не имеет сечений одновременности в смысле § 10.1. Третье, условие в определении 13 из § 5.6 подпадает тем самым под сомнение — возможно ли оно?

Некоторый выход может быть найден, но чреватый опасностями. Можно рассмотреть линии тока в этой системе как интегральные кривые при начальных условиях на сечении $t = 0$. Тогда существует — и единственный — параметр ϑ, который описывает сразу все интегральные кривые поля (10.4.1), причем он аддитивен вдоль каждой кривой: ни из чего не следует, будто $\vartheta = t$. Он вполне годился бы на роль «координатного времени», тем более, что множества $\vartheta = const > 0$ — это гиперповерхность, секущая все линии тока. Но здесь сразу обнаруживается несколько трудностей.

Во-первых, эта гиперповерхность не ортогональна, конечно, линиям тока. Поэтому описание в координатах (ϑ, x, y, z) соответствует описанию мира не в прямоугольных, а в косоугольных системах координат. Наглядно это такое описание, которое мы имели бы, если бы в ньютоновой физике или в специальной теории относительности ось темпорат мы выбирали бы не в виде покоящейся материальной точки $x = 0, y = 0, z = 0,$ а в виде движущейся с переменной скоростью точки $\vec{x} = \int \vec{v}(t)dt$. Ясно, сколько порой вовсе непреодолимых затруднений породило бы такое описание. Увы, в случае вращающейся системы другого описания и не может быть.

Во-вторых, возникают темпоральные парадоксы. Поверхности $\vartheta = const$кое-чем напоминают сферы (9.3.1): как и сферы, они последовательно вложены одна в другую, а при направлении к границе

$\left\{(t, x, y, 0) \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{c}{\omega}\right.$, заполненной вращающимися фотонами, они асимптотически к ней стремятся, подобно тому, как сферы асимптотически приближаются к конусу $ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Но последний конус — световой, а поверхность из вращающихся фотонов — временноподобная. Поэтому в отличие от сфер оказывается, что поверхности $\vartheta = const$ не пространственноподобны. Это же означает, что имеются пары событий, для которых $p < g$, но $\vartheta_{\text{p}} = \vartheta_{\text{q}}$ и даже $\vartheta_{\text{p}} > \vartheta_{\text{q}}$ а, следовательно, функцию ϑ нельзя принять в качестве функционального времени (см. определение 5 из § 5.1).

Итак, вращающаяся система материальных точек не может быть системой отсчета в пространствовремени специальной теории относительности.

5º. Космологическая система отсчета. В космологии обычно рассматривают многообразие с метрикой:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)d\sigma^2, \quad d\sigma = f(x, y, z; dx, dy, dz) \qquad (10.5.1)$$

В случае, когда — как обычно предполагается — выполнены уравнения Гильберта-Эйнштейна и вещество представляется в виде жидкости, полностью задаваемой плотностью ρ и давлением p, оказывается, что траектории $x, y, z = const$ суть геодезические и линии тока этого вещества. При этом они заполняют без сингулярностей некоторую область, которая обычно и принимается за Вселенную. Сечения $t = const$ оказываются поверхностями, ортогональными линиям тока. В этом смысле система отсчета выбрана удачно, никаких трудностей нет, ее можно даже назвать «инерциальной», наподобие тех инерциальных систем отсчета, что мы рассматривали в мире де Ситтера. Но затруднения возникают совсем иного плана.

Именно, невозможно факторизовать универсум по этим линиям тока так, чтобы в полученном топологическом пространстве (собственно, это будет даже гладкое многообразие) удалось бы ввести наследственную метрику (ср, соображение, высказанные после определения 13 в § 5.6). Для деситтерова пространствовремени такая факторизация была еще возможна, хотя и давала разные результаты для разных пучков: для пучка прямых, ортогональных общей плоскости, получалось сферическое (n-1)-пространство, а для пучка параллельных прямых — эвклидово (n-1)-пространство. В формуле же (10.0.1) метрика «собственно пространства» меняется в зависимости от t, поэтому нельзя говорить про одну и ту же метрику вдоль фиксированной линии тока. Вот кабы метрика не менялась вдоль мировых линий системы отсчета, то ее пространственная часть годилась бы в качестве наследственной метрики на собственно-пространстве. Тиков случай стационарных метрик, но космологическая метрика не стационарна. Поэтому в космологии не используют единого понятия «пространства». За «пространство» принимают не фактор-универсум, а СЕЧЕНИЕ этого универсума поверхностью, ортогональной линиям тока, т.е. говорят лишь о «пространстве на дату $t = t_0$. Представление о пространстве как о системе материальных точек принадлежит Пуанкаре. Представление о пространстве как о сечении в пространствовремени принадлежит Паладю (впрочем, может быть, и Пуанкаре и Паладь имели предшественников, я этого не исследовал). Эйнштейн разделил воззрение Паладя (я не знаю, читал ли он его), сейчас в физике преимущественно трактуют «пространство» как сечение. Такое понимание, как мы видели на примере вращающейся системы, иногда ужасно, к подобным ужасам относится и космологическое решение Гёделя. Но первое понимание тоже, как видно на примере космологии, иногда невозможно.

На сечении $t = t_0$ наследственно вводится метрика $ds^2 = R^2(t_0)d\sigma^2$, превращающая его в риманово пространство с положительно определенной метрикой. Но само это сечение — обманчивый координатный артефакт. Вот пример. Одна метрика пусть будет:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a^2}{c^2} dr^2 \qquad \alpha = const \qquad (10.5.2)$$

а другая

$$ds^2 = dt^2 - \left(1 - \frac{a^2 r^2}{c^2}\right) \frac{\alpha^2 t^2}{c^2} dr^2, \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (10.5.3)$$

Тогда в первой пространство на сечении $t = t_0$ эвклидово. Во второй на $t = t_0$ задана метрика пространства Лобачевского с кривизной $\frac{a}{c} \neq 0$. Вроде бы — разные пространства. Но метрика (10.5.2) может быть преобразована на области $t > 0$ в метрику (10.5.3) простым преобразованием координат:

$$\begin{cases} t \mapsto \sqrt{t^2 - r^2} \\ r \mapsto \dfrac{c}{a} arth \dfrac{ar}{2c} \end{cases} \qquad (10.3.4)$$

Следовательно, «собственно пространство»« — координатный артефакт в космологии. Зельманов привел и более разительные примеры преобразований карт, при которых «конечное пространство» переходит в «бесконечное пространство» и т.д.

Мы знаем, что всякую темпоральную шкалу можно переградуировать практически произвольно (см. § 6.4). Как обстоит дело с градуировкой временной координаты t вдоль линии тока в (10.5.1)? С одной стороны, оказывается, что t есть длина дуги $\int ds$ геодезической, так что выбор такого именно времени естествен. С другой стороны, соответствует ли он предыдущим определениям? Именно, вернемся к радарному определению одновременности (определение 21 из § 10.1). Согласно нему, событие $p \in l$ одновременно $x \notin l$ если на l найдутся p_1 и p_2 такие, что свет, испущенный из p_1, в дату $t_1 = t_з - \tau$, дойдет до x, отразится и вернется к l в событии p_2 в дату $t_2 = t_p + \tau$, причем по определению x получает дату $t_x = t_p = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$. Применяя это к (10.5.1), сразу получаем условие:

$$\int\limits_{t_1}^{\frac{1}{2}(t_1+t_2)} \frac{dt}{R(t)} = \int\limits_{\frac{1}{2}(t_1+t_2)}^{t_2} \frac{dt}{R(t)} \qquad (10.5.5)$$

при произвольных t_1 в t_2. Оно выполняется только, если произвести! замену времени по (5.2.5). А тогда в физической интерпретации сразу многое изменится, например, отпадет привычный способ получать «красное смещение». О других изменениях мы уже говорили в § 5.2. Добавим немногое. Обычно в физике $R\ (o) = 0$, что отвечает «возникновению» или «твореиию» мира при «большом взрыве». Если функция $R(t)$ гладкая вблизи $t = 0$, то тогда ее главная часть имеет вид t^k, где $к$ целое положительное, а потому при указанной замене шкалы времени начало мира отодвигается на $\bar{t} = -\infty$ вместо $t = Q$, и мир существует вечно в такой градуировке. Физики из внегеометрических соображений полагают, что вблизи $t = 0$ функция $R(t)$ ведет себя как t^α, где $0 < \alpha < 1$. Тогда наша градуировка (5.2.5) не устраняет «начала мира»» как и описано в § 5.2. Но зато встает уже математический вопрос: а разве законно в теории ГЛАДКИХ многообразий рассматривать негладкую функцию $R(t)$? Это сингулярность более значимая, нежели сингулярность гладкой метрики в точке $t = 0$.

Мы задержались на примерах систем отсчета потому, что довольно часто этим понятием пользуются неграмотно. В большинстве случаев результаты получают верные, но эти же результаты можно получить другим способом, не прибегай к сомнительным понятиям. Иногда же и сами результаты ошибочны. Во всяком случае, описанная чересполосица логических несоответствий почти всегда присутствует в изложениях, принадлежащих физикам, причем сдается, что чем физик крупнее, тем больше нелепостей он себе позволяет (Эйнштейн и Уилер тому примеры). Пожалуй, единственным исключением здесь служит Шрёдингер, пишущий безошибочно. А эта ситуация, когда такие авторитеты, как Ландау, Уилер, Эйнштейн, позволяют себе «доказывать» посредством логических нелепостей, порождает ответную, но удручающую реакцию в виде публикаций Денисова, Логунова, Тяпкина и др.

6^o. Невозможность некоторых систем отсчета. В рубрике 4 мы увидели, что вращающаяся система отсчета невозможна в специальной теории относительности. Но все-таки система «синхронно вращающихся» материальных точек, пусть не покрывающая всего мира и не удовлетворяющая пункту 3 определения 13 § 5.6, тут существует. Сейчас мы покажем, что вообще говоря даже системы материальных точек, которые неограниченно во времени покрывали хотя бы ограниченную в пространстве область темпорального универсума, далеко не всегда существует.

Рассмотрим описанный в § 3.8 мир, полученный вырезанием (8.8.1) и введением порядка (8.8.3), дополнив его наследственной гладкостью и метрикой (кроме точки 0): см. рис. 19. Пожелаем построить стационарную систему материальных точек, т.е. взаимно-покоящихся. Если соответственную область мы выберем правее или левее темпоральной оси t (точнее, при $t \leq 0$ это ось $x = 0,$ а при $t > 0$ это результат склеивания лучей $x = t\, th\, \alpha$ и $x = -\, t\, th\, \alpha$), то никаких препятствий у нас не возникает. Но возьмем отрезок $t - t_0 < 0$, $-x_0 < x < x_0$ и проведем через него все неподвижные относительно x траектории. Это будет семейство параллельных прямых, как в § 6.5 и § 10.3, Они ортогональны взятому отрезку. Но так обстоит дело только до встречи прямых этого семейства с прямою выреза (правою или левою). Тут нарушится однозначность, а по определению системы отсчета через каждое событие должна проходить лишь одна кривая из семейства. Следовательно, в рассматриваемой модели сколько-нибудь длительная инерциальная система невозможна: материальные точки начинают сталкиваться друг с дружкой, система «вспучивается», «разрушается».

Взрывная система § 6.5 и § 10.4 здесь также невозможна. Те материальные точки, которые движутся относительно друг друга быстрее, нежели одна прямая выреза относительно другой, хлопот не доставляют. Но медленно движущиеся из точки $(t_0, 0)$ при $t_0 < 0$ пары материальных точек, одна вправо, другая влево, опять-таки встретятся в какой-то точке на прямых выреза, там самым нарушив однозначность.

Мы выбрали наиболее яркий пример с бесконечно большой точечной кривизной, но подобные затруднения типичны для ситуации с переменной кривизной. И здесь можно было бы в малой окрестности точки *0* загладить особенность ничто не меняя глобально.

7º. ***Нерешенная проблема — описание хаоса***. Казалось бы, естественна такая картина мира: в пустом пространствовремени беспорядочно, никак друг с другом не связанным образом, «по-броуновски», и не заполняя всего пространствовремени сплошным образом, движутся инерциальные частицы — в конечном или бесконечном числе. Но такая картина, которую вполне точно можно описать в ньютоновом пространствовремени, не нарисована еще сколько-нибудь точно математически в пространствовремени с постулатом близкодействия. Ни при наличии абсолютного параллелизма, ни при его отсутствии.

Возможно, отсутствие математической модели, эксплицирующей эту картину, связано с тем, что мало кто этим занимался. Возможно, здесь проявляются математические трудности, связанные именно со знакопеременной метрикой и обнаруженные В.Я.Крейновичем. Так, он установил, Что не существует вероятностной нормированной меры на множестве кривых в ${}^{3}R_{4}$, инвариантной относительно собственных преобразований Лоренца и сосредоточенной на временных кривых. Всякая нормированная лоренц-ковариантная случайная функция на ${}^{n-1}R_n$ инвариантная относительно собственных имеет либо бесконечную, либо разрыв кую дисперсию. Эти подобные результаты Крейновича заставляют задуматься, возможна ли кажущаяся «естественной» картина «броуновского движения» во Вселенной?

§ 11. КАУЗАЛЬНОСТЬ И ДЕТЕРМИНИЗМ

1º. Областьзависимости. Для простоты здесь мы ограничимся случаем универсума с одним отношением строгого порядка $p < q$. В содержательной интерпретации § 3.2 это означает, что q зависит в какой-то мере от p. «Зависит» еще не означает «полностью определено», и целью этого параграфа будет как риз проследить, когда можно говорить о «полностью определено».

Для множества $A \subset U$ мы знаем конструкцию A^+ — будущее для A, т.е. множество тех событий, которые зависят от событий из A, но, возможно, зависят еще и от других событий. Мы знаем также конструкцию границы, так что ∂A^+ отделяет те события, на которые мо ж по повлиять из A, от тех событий, на которые из A повлиять невозможно. Аналогично A^- и ∂A. У нас было введено понятие «ахронных пар точек», расширим эту дефиницию на произвольное множество. Говорим, что множество A ахронное, если для любых $x, y \in A$ не выполняется ни $x \in \overline{y^+}$ ни $y \in \overline{x^+}$.

Теперь перейдем к описанию кривых или последовательностей событий, в некотором смысле «пересекающих» или «не пересекающих» ахронное множество. Рассмотрим некоторую бесконечную последовательность событий $\ldots < P_k < P_{k-1} < \ldots < P_1$. Если бы существовал $\lim\limits_{k \to \infty} p_k = p_\infty$, то эту последовательность можно было бы заменить конечной последовательностью $p_\infty < p_2 < p_1$, в некотором смысле равносильной ей. С учетом того, что говорилось в § 8.5 про изотопные кривые, можно соединить соседние по номерам точки дугами кривых, в цепом получится тоже изотонная кривая λ, и требование отсутствия предельной точки p_∞ будет означать на языке кривых, что данная λ с концом $p_1 = \lambda 1$ неограниченно продолжим а в прошлое, т.е. $\urcorner \exists \lambda 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Пусть A — ахронное множество в темпоральном универсуме $(U, <)$. Убывающая бесконечная последовательность $\ldots < P_{k+1} < P_k < \ldots < P_1$ без предельной точки p (равносильно, неограниченно продолжимая в прошлое изотопная кривая λ при $\lambda 1 = p_1$), у которой точка $p_1 \in A^+$, называется СТОРОННЕЙ для A, если $p_k \notin A$ и $(p_k, p_{k-1}) \cap A = \varnothing$ при всех номерах $k > 1$ (равносильно, если $\lambda (0, 1] \cap A = \varnothing$).

Содержательно, что такое цепочка $\ldots < P_k < P_{k-1} < \ldots < P_1$? Это цепочка последовательных каузальных воздействий из прошлого p_k^- в будущее p_k^+. Таких воздействий, которые не сводятся к продолжению одного воздействия из p_∞. Завершение этих воздействий происходит после всех событий из множества A. ибо $p_1 \in A^+$. Естественно, что те цепочки воздействий, которые минуют A и сами и своими промежутками (p_k, p_{k-1}) «проходят стороной» от A. Заметим, что при естественных условиях компактности топологического пространства наше требование, чтобы не существовало предельной точки p_∞, запрещает последовательности «быть маленькой». Последовательность не может содержаться ни в каком компактном множестве, ибо она монотонна, а потому иначе существовал бы ее предел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Говорим, что событие $p \in A^+$ зависит по Коши от A, если A ахронно и через p не проходит ни одной сторонней для A последовательности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Областью $D_+(A)$ Коши-зависимости от A в будущее называется множество всех $p \in U$, которые зависят от A по Коши.

Аналогично через последовательности $P_1 \ldots < P_{k-1} < P_k < \ldots$, для которых не существует $p_\infty = \underset{k \to \infty}{\lim p_k}$, определяется область $D_-(A)$ Коши зависимости от A в прошлое.

Вот пример области зависимости $D_+(A)$ в специальной теории относительности. Пусть A есть шар

$$A = \{(t, x, y, z) \mid t = 0 \,\&\, x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\} \qquad (11.1.1)$$

Тогда

$$D_+(A) = \{(t, x, y, z) \mid t > 0 \,\&\, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \le R - ct\} \qquad (11.1.2)$$

$$\partial D_+(A) = \{(t, x, y, z) \mid t \ge 0 \,\&\, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R - ct\} \qquad (11.1.3)$$

при

$$A = \{(t, x, y, z) \mid t > 0 \,\&\, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \le R + ct\} \qquad (11.1.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. Говорят, что ахронное множество A есть поверхность Коши для будущего, если $A^+ = D_+(A)$.

Отметим, что «поверхность» здесь употребляется не в смысле геометрического термина, а как вузвукосочетание, входящее в термин «поверхность Коши».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. Горизонтом Коши в будущее называют $\frac{(\partial D_+(A))}{A}$, если A — поверхность Коши.

Горизонт отделяет те точки из будущего, на которые можно повлиять помимо A, от тех, на которые повлиять можно только через A. Как видно из (11.1.2—4), шар в специальной теории относительности не образует поверхности Коши. Вне него довольно чего, что может повлиять на будущее посильнее того, что внутри шара.

Смысл всех этих определений прост. Они в совокупности дают дефиницию того, что на будущее влияют события из множества A и только они — в том смысле, что вне их контроля ничто другое не влияет. Конечно, может сказываться еще и отдаленное прошлое, но оно всё в какой-то мере «корректируется» множеством A. Терминология, включающая имя «Коши», объясняется тем, что исторически «задание начальных данных» на поверхности $t = t_0$ (т.е. ахронной) математически корректно рассмотрел именно Коши, хотя сама постановка задачи возникала и раньше (Лаплас), а каузальные конструкции были разработаны только свыше ста лот после Коши. «Горизонты Коши» — это понятие возникло только в шестидесятые годы XX века. Содержательно работает оно только в очень незамысловато искривленных мирах общей теории относительности.

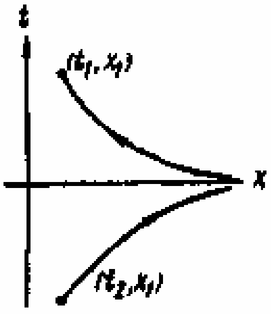


Рис.20

(11.2.2)

2°. Примеры поверхностей и горизонтов Коши. Прежде всего, в ньютоновом универсуме областей Коши-зависимости и поверхностей Коши не имеется. Возьмем простейший пример, бесконечное галилеево-иьютоново пространствовремя в его двумерном варианте. Единственное ахронное множество тут — это множество абсолютно одновременных событий (ахронность тут определяется без замыкания, иначе нет и ахронных множеств). Берем произвольно множество $A = \{(t, x) \mid t = t_0\}$ и точку $p_1 = (t_1, x_1) \in A^+$, т.е. $t_1 > t_0$. Существует ли проходящая через p_1 сторонняя последовательность? Да, например, последовательность точек, расположенных на изотонной кривой

$$(t, x) = \left(t, x_1 + \frac{1}{t - t_0} - \frac{1}{t_1 - t_0} \right) \qquad (11.2.1)$$

см. рис.20, не имеет предела, не пересекает $t = t_0$. Следовательно, получается, что «минуя $t = t_0$» из бесконечности может придти воздействие, которое повлияет на p_1. И это воздействие исходит из чего-то, на что само A никак повлиять не может. Сели взять теперь симметричную последовательность

$$(t, x) = \left(t, x_1 + \frac{1}{t_2 - t_0} - \frac{1}{t_1 - t_0} \right) \qquad (11.2.2)$$

то б содержательной интерпретации возможна такая картина. В дату $t = t_2 < t_0$ человек, покоящийся в точке $x = x_1$, помолился Богу. Молитва его со всё возрастающим ускорением пошла по кривой (11.2.2) на Бесконечность, где обитает Бог. Там, в Бесконечности, Он мгновенно услышал молитву и принял по ней решение, пославши человеку по кривой (11.2.1) весть: см. рис. 20. Его весть, войдя в физический мир, перемещалась с соблюдением законов физика и этот импульс достиг человека в том же месте $x = x_1$ в дату $t = t_1 > t_0$, обогнув все условия и препоны в $t = t_0$.

В пространствовремени специальной теории относительности таких неожиданностей не возникает. Всякая поверхность $t = t_0$ и даже вообще любая приличная пространственноподобная поверхность А (не такая маленькая, как шар (11.1.1), и на которой «не прокручено дырок»), разделяющая полупространство на два полупространства, оказывается поверхностью Коши. Для нее $A^+ = D_+(A)$. Горизонтов Коши нет. Это — максимально простое устройство мира с точки зрения казуальности.

Такая же простая картина наблюдается в мире де Ситтера (не факторизованном) с той лишь разницей, что поверхность $t = t_0$ тут компактна (она гомеоморфна S^3). В антидеситтеровском мире, напротив, устройство такое же, как в ньютоновом. Поверхность $t = t_0$, которая здесь гомеоморфна R^2, не является поверхностью Коши. Ведь световые ∂p^+ из той точки p, которая на расстоянии $\frac{\pi}{2}R$ предшествует этой поверхности, асимптотически стремится к поверхности $t = t_0$; см. рис.17. Точно так же световые ∂p^- из той точки q, которая на расстоянии $\frac{\pi}{2}R$ следует за $t = t_0$, параллельны $t = t_0$. Поэтому тут возникают сторонние поверхности, аналогичные (11.2.1—2) и прижимающиеся к этим световым. В антидеситтеровом случае мы имеем в виду не весь универсум, а лишь часть его, дабы можно было говорить про отношение <, а не $\prec$.

Топологически суть сказанного в том, что в ньютоновом мире интервал всегда не компактен, в деситтеровом и псевдоэвклидовом — всегда компактен, а в антидеситтеровом малые интервалы компактны, но при раздувании их превращаются в некомпактные. Это обстоятельство находит себе выражение в так называемом «постулате глобальной гиперболичности», который необходим — и во многих случаях достаточен — дабы существовали поверхности Коши.

Сложна картина областей Коши в шварцшильдовом случае. Внешний мир (t, r), как мы знаем из § 8.7, описывается в координатах (ρ, λ) значениями $\frac{\pi}{2} < \lambda < \pi$, см. рис. 18. Поверхность одновременности $t = t_0$ описывается $\lambda = \lambda_o$. Будущее для нее — это $\frac{\pi}{2} < \lambda < \lambda_0$, а также черная дыра $0 < \lambda \leq \frac{\pi}{2}$, куда уходят все временные и световые. Но на точку в полосе $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$ повлиять можно и из дубликата внешнего мира $-\frac{\pi}{2} < \lambda < 0$. Таким образом, для множества $\{(t, r) \mid t = t_0\}$ имеется сторонняя поверхность. Тем самым черная дыра не попадает в область зависимости для поверхности $t = t_0$, а световая поверхность $\lambda = \frac{\pi}{2}$ оказывается горизонтом Коши. Если же рассматривать факторизованное по π пространствовремя Шварцшильда, то оно темпорально не ориентируемо, и все глобальные рассуждения о A^+, A^-, $D_+(A)$ и т.п. теряют смысл.

3°. Поверхность Коши для дифференциальных уравнений.

Значимость поверхностей Коши в том, что при рассмотрении на втором и третьем уровнях обычно физические закономерности описываются посредством дифференциальных уравнений. Величина $u(t)$ подчиняется некоторому дифференциальному уравнению (или системе). На поверхности $t = t_0$, значения $u(t_0)$ и соответствующих производных заданы. Тогда, продолжая по гладким траекториям (кривым) однозначно на бесконечно малом (t_0, $t_0 + dt$) начальные значения в согласии с дифференциальным уравненном, мы сумеем ОДНОЗНАЧНО распространить их на будущее всюду, куда не проникает никаких сторонних последовательностей, т.е. на $D_+(t = t_0)$. Если поверхность $t = t_0$, является поверхностью Коши $D_+(t = t_0) = (t = t_0)^+)$, то можно осуществить это продолжение на всё будущее $t > t_0$. За горизонт Коши никакое дифференциальное уравнение не поможет проникнуть.

Здесь философски самое существенное — презумпция, что воздействия (в теории ли механического воздействия, в теории ли поля, в других ли вариантах макротеории) переносятся по ГЛАДКИМ мировым линиям, посредством ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ материальных точек (наблюдателей, траекторий, силовых линий). Любое нарушение гладкости приводило бы к появлению «сингулярностей», «бифуркаций» и неоднозначностей в решениях. Поэтому на первом, высшем по абстракции, уровне рассмотрения, на котором структуры гладкости не имеется, нет и аналога аппарату дифференциальных уравнений.

4º. Крушение парадигмы дифференциальных уравнений. До недавнего времени возражений против такого подхода не возникало. Хотя исторически в дифференциально-уравненческой парадигме наблюдалось множество пробелов и ошибок, работами каузальной школы к семидесятым годам XX века они все были выловлены, обсуждены, заштопаны. Но в восьмидесятые годы дифференциальные топологи обнаружили, что и самом важном для физики случае — четырехмерном на самых интересных для физики многообразиях — на R^4 и на $R \times S^3$ — можно задать не одну, а несколько, даже бесконечно-счетное множество различных (не диффеоморфных друг другу) гладкостей. Конечно, это относится не к локальной, а к глобальной теории, но ведь и понятия «область зависимости», «поверхность Коши» — тоже глобальные понятия. А в этой ситуации утрачивает смысл основная презумпция парадигмы дифференциальных уравнений, будто воздействия переносятся по гладким кривым: та самая кривая, которая в одной гладкости выглядит гладкой, в другой гладкости смотрится как негладкая. Обнаруженная РЕЛЯТИВНОСТЬ ГЛАДКОСТИ взамен молчаливо подразумевавшейся АБСОЛЮТНОСТИ ГЛАДКОСТИ под корень подрезает парадигму дифференциальных уравнений. Конечно, сохраняется то ее вечное значение, что «под этим фонарем светлее»: гипотеза дифференцируемости помогает высветить многие вопросы. Но какая бы то ни было категоричность высказываний, будто бы «мир устроен так-то», потому что посредством аппарата дифференциальных уравнений доказаны такие-то теоремы, — делается незаконной. При любом таком заявлении надлежит спрашивать: а как изменятся результаты, если сменить гладкость на другую? Заметим, что пока речь идет о трехмерных уравнениях, о трехмерных результатах, волноваться не приходится, ибо в 3-многообразии гладкость единственна с точностью до диффеоморфизма. Неприятности возникают именно в 4-многообразнях.

В поисках выхода мыслимы несколько направлений мысли. Одно — упование, что дифференциальные топологи изобретут конструкцию, с помощью которой можно будет среди всех гладкостей выделять одну, привилегированную, «абсолютную». Другое — отказ от глобальных построений в физике, ограничение и самоограничение существенно локальными результатами. Третье — отказ от парадигмы дифференциальных уравнений, например, замена всех уравнений на интегральные, в которых выбор гладкости не существенен. Четвертое, которое мы стараемся развивать, заключается в рассмотрении более общих, нежели гладкие, конструкций — финслерово пространствовремя, где световой конус не гладок: начатки теории «на первом уровне рассмотрения» и т.п. Из их созерцания могут зародиться новые концепции построения физики. Иные, нежели унаследованные от ньютоновски-галилеевых представлений и ошибочных мнений насчет возможностей дифференциальных уравнений.

Заметим, что хотя при переходе к первому, наиабстрактнейшему уровню рассмотрения приходятся отказываться от удобств, создаваемых презумпцией гладкости, тем не менее класс функций, соотнесенных с этим уровнем, портится не слишком сильно. Именно, удается доказать, что это должен быть класс почти везде дифференцируемых функций, так что тератологические функции вроде нигде не дифференцируемой, нам не угрожают. Именно поэтому, в частности, сохраняются все результаты, сформулированные в терминах интегральных уравнений. Впрочем, полезно отметить, что, не нуждаясь б предварительном задании структуры гладкости, интегральные уравнения нуждаются в предварительном задании структуры меры.

С общепознавательной, метатеоретической точки зрения очень важно, что идея детерминированности (частным вариантом которой является философия детерминизма) в науке укрепилась и держится исключительно посредством» дифференциальных уравнений, т.е. основана на презумпции абсолютности гладкости. С 1982 года детерминированность — будущего ли прошлым, прошлого ли настоящим, или в иных комбинациях — стала выглядеть необоснованной. Она после работ М.Фридмана сделалась «независимым постулатом». Это относится не только к таким глобальным постановкам проблемы, как «лапласов детерминизм», но и к совершенно конкретным детерминированностям.

Гл. 4. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ВИДЫ УПОРЯДОЧЕНИЯ

§ 12. ПОДХОД К МНОГОМЕРНЫМ ЕДИНЫМ ТЕОРИЯМ

1^o. Предел анизотропии. В § 3.4 мы ввели основной пример эйнштейнова упорядочения. Это порядок, задаваемый в $R \times E_{n-1}$, формулой

$$\left(t, \vec{x}\right) > 0 \Leftrightarrow t > \left\|\vec{x}\right\| \qquad (12.1.1)$$

где ||...|| — произвольная невырожденная несимметричная норма, т.е. положительно-однородная выпуклая функция $E_{n-1} \mapsto R$. Например, в двумерном случае (т.е. в трехмерном темпоральном универсуме) в координатах *x, y* норма может задаваться формулой

$$\left\|(x, y)\right\| = |x| + |y| \qquad (12.1.2)$$

Эта норма вдобавок симметрична $\left\|-\vec{x}\right\| = \|x\|$. Для нее скорость света, понимаемая как угловой коэффициент прямой на границе ∂O^{+}, равна 1 в направлении оси абсцисс $y = 0$, такова же в направлении оси ординат $x = 0$, но в направлении биссектрисы $x = y$ она равна 2/2. По промежуточным направлениям она возрастает от 2/2 до 1. Это — общая характеристика анизотропного случая: предельные скорости по разным направлениям различны. В терминах автоморфизмов: конус ∂O^{+} не имеет группы автоморфизмов, транзитивной на своих образующих.

При этом за счет невырожденности нормы все предельные скорости ограничены, т.е. существует такие c_1 и c_2, что $\left|\frac{dx}{dt}\right| \le c_1$ и $\left|\frac{dy}{dt}\right| \le c_2$, если $(t, x(t), y(t))$ изображает изотопную или каузальную кривую (см. § 8.5). В ньютоновом мире, напротив, по всем направлениям скорости неограниченны: $\left|\frac{dx}{dt}\right| < \infty$ и $\left|\frac{dy}{dt}\right| < \infty$. А что будет, если мы для некоторых направлений сохраним требование ограниченности скорости $\left|\frac{dx}{dt}\right| < \infty C$, а для других направлений дозволим неограниченно большие скорости $\left|\frac{dy}{dt}\right| < \infty$? Математически это соответствует тому, что в (12.1.1) будет разрешена вырождающаяся в ноль на каких-то направлениях норма, например, $\|(x, y)\| = |x|$. Тогда $\left|\frac{dx}{dt}\right| \le 1$, но $\left|\frac{dy}{dt}\right| < \infty$. Этот крайний случай анизотропии не укладывается в модели близкодействия. По тем координатам, по которым норма вырождается, допустимо дальнодействие, как у Ньютона. Но и полностью ньютоновым такой мир не является. Поэтому мы выделили такие каузальные модели в отдельную Главу.

2º. Заряд как размерность пространства признаков. Естественно, что мало надежды, оставаясь в рамках четырех стандартных, координат (*t, x, y, z*), получить содержательную интерпретацию такого порядка — симбиоза ньютонова дальнодействия по одним направлениям с эйнштейновым близкодействием по другим направлениям. Но, если мы не будем ограничиваться «географически-топографическими» признаками: долгота, широта и высота, т.е. координатами *x, y* и *z*, а наряду с ними еще как в каком-то смысле РАВНОПРАВНЫЙ ПРИЗНАК введем «электрический заряд» *e* введем как «пространственную» в широком смысле характеристику (см. § 14), то интерпретация перестанет быть неприемлемой с порога. Именно, для величин $\left|\frac{dx}{dt}\right|$, $\left|\frac{dy}{dt}\right|$, $\left|\frac{dz}{dt}\right|$ существует известная верхняя граница *c*. Но неизвестно никакого ограничения на $\left|\frac{de}{dt}\right|$. Совокупность (*t, x, y, z*) явится первым нашим примером «пространства признаков», общие соображения о котором мы изложим в § 14.

Итак, станем рассматривать пятимерное пространство (*t, x, y, z, e*), в котором отношение строгого порядка задано формулой:

$$(t,x,y,z,e)<(t',x',y',z',e'):\Leftrightarrow t'-t>\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2(z'-z)^2} \quad (12.2.1)$$

Пока изучение ведется локально, нам нет нужды как-нибудь специфицировать то одномерное многообразие, где изменяется e. Оно может быть R^1, может быть $\S^1$, ним это неважно. И точная «физическая размерность» e нам не важна, это может быть заряд или действие или еще что.

Согласно обшей теории, интервальной топологии T достаточно для получения всех основных структур ТОЛЬКО при выполнении постулата близкодействия. У нас он не выполнен «по электрической оси», ибо события (t, x, y, z, e) и (t, x, y, z, e') абсолютно одновременны согласно теореме 2 и определения 14 и лежат в замыкании одной точки в силу (12.2.1). Поэтому в пятой координате — слое — нам придется топологическую, и метрическую структуры ВВОДИТЬ НЕЗАВИСИМО, как уже отмечалось по другому поводу в § 6.5.

3º. Отношение предпорядка и расслоение. В § 6.3 мы видели, что отношение $p \le q$ получаемое замыканием $p \le \overline{p^+}$ отношения строгого порядка <, ужа может не оказаться само отношением порядка, потому что $\overline{p^+} \cap \overline{p^-} = \overline{p} \neq p$. В нашем случае, когда мы не по всем, а только по некоторым направлениям допускаем дальнодействие, будет то же самое, с той лишь разницей, что множество $\overline{p}$ не разделяет мир на две несвязанные компоненты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. Говорим, что темпоральный универсум $(U, <)$ расслоен своим упорядочением, если фактор-универсум $\dfrac{U}{p \in \overline{q}}$, является (относительно фактор-интервальной топологии) топологическим пространством размерности более единицы, а каждый слой состоит не из одной точки. (В силу наших аксиом $ТК_{1—8}$ никаких двусмыслиц с пониманием «размерности» не возникает.)

Этим определением исключается и ньютонов случай, когда фактор-универсум был одномерным, и случай близкодействия, когда слои были одноточечными.

Как и в ньютоновом случае, в слоях никакой удобной топологии из универсума отношением порядка не индуцируется (см. § 6.5): эту топологию приходится вводить дополнительно. В дальнейшем мы будем вести рассмотрение на втором уровне изучения и ограничимся теми универсумами, которые удовлетворяют следующему определению:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. Универсум единой теории — это темпоральный универсум ($U\ ,\prec,T\ ,\ F\ $) причем на U задана топология T более сильная, чем интервальная, и задана гладкость F, согласованная с T, причем при канонической проекции $\pi : U \mapsto \overset{u}{\underset{p}{=}}$ по правилу $\pi p\ =\ \overline{p}$ возникает гладкое расслоение с m-мерной базой ($m \geq 2$).

Это локально-тривиальное расслоение, и стандартно будем писать вместо символа U символ M, вместо базы ${}^{U}\!\diagup_{p}$ символ M_m, а слой обозначаем M_{n-m}.

4º. Структуры, согласующиеся с расслоением. Мы уже встречались с примером функции, согласующейся с расслоением π, — с изотопной функцией. В § 5.2 мы видели, что для абсолютно одновременных p и q функциональное время t дает одну и ту же дату $t_p\ = t_q$. Не только изотопные функции обладают этим свойством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30. Говорил:, что $f : U \mapsto R$ согласуется с расслоением π, если из $\pi x = \pi y$ следует $fx = fy$.

Иными словами, расслоением порождается некоторое отношение эквивалентности, и функция f обязана иметь одинаковые значения на эквивалентных значениях аргумента. Если -f согласуется с расслоением, то по ней в базе расслоения M_m однозначно строится фактор-функция, которую мы, допуская вольность обозначений, по-прежнему обозначим f.

Самые фундаментальные функции, согласующиеся с расслоением, это координатные функции (см. § 5.7). Именно, если база m-мерна, то мы в качестве первых m координатных функций выбираем функции, согласующиеся с расслоением. При таком выборе координат фактор-координатные функции зададут координатный набор функций в базе M_m. Естественно, что указанной ограничение на карты породит некую ограниченность допустимых преобразований карт. Именно, остаются допустимыми

$$\begin{cases} x^\alpha \mapsto f^\alpha\left(x^1,...,x^m\right), & 1 \le \alpha \le m \\ x^\mu \mapsto f^\mu\left(x^1,...,x^m,x^{m+1},...,x^n\right), & m < \mu \le n \end{cases} \qquad (12.4.1)$$

при обычных условиях на гладкость и на якобиан. Условие (12.4.1) удобнее переписать в виде

$$D^{\alpha'}_{\mu} = 0, \quad D^{\alpha}_{\mu'} = 0, \quad \alpha \le m < \mu \qquad (14.4.2)$$

где стандартно приняты обозначения (5.7.3). Ср. формулы (5.8.1) и (6.5.2).

Другой пример согласованности с расслоением — метрика. Если на M_n задана, например, квадратичная форма $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$, согласованная с расслоением в смысле определения 30, то такая форма обязана вырождаться в ноль на слое. В терминах сигнатуры ее сигнатура имеет вид (+ ... - … - 0, …, 0), где число нулей равно n-m. Тензоры, как известно, суть полилинейные отображении. Требование согласования полилинейных отображений с расслоением π также видоизменяет устройство отображений, и получается то, что называется «флагтензорами». Мы здесь не станем перечислять или описывать все возможные объекты, согласованные с расслоением. Теория таких объектов — это подуриманова (полуэвклидова) геометрия [8].

Во избежание термнинологических недоразумений уточним, что наше расслоение π не имеет ничего общего с так называемым «главным расслоением» и ассоциированными вопросами, где в слое действует какая-то группа. При последнем подходе над пространством (x^1, … , x^n) как бы надстраивается нечто вроде касательного пространства (dx^1, …, dx^n), и затем единый объект (x^1, …, x^n dx^1, …, dx^n) мыслится состоящим из базы (x^1, …, x^n) и слоя (dx^1, …, dx^n). У нас же расслоение совершается в самом пространстве (x^1, …, x^n). Никакой группы в слое мы не выделяем. Поэтому не надо смешивать терминологию и методику этих двух разных «расслоений».

5°. Дуальные числа и физические размерности. Полуэвклидова геометрия «располагается в промежутке» между школьной эвклидовой и псевдоэвклидовой геометриями. Именно, если длина вектора (t, x) в эвклидовой геометрии есть

$$l = \sqrt{t^2 + x^2} \qquad (12.5.1)$$

в псевдоэвклидовой она

$$l = \sqrt{t^2 - x^2} \qquad (12.5.2)$$

то в полуэвклидовой она

Видим, что так определенная длина согласуется с расслоением, задаваемым проекцией $\pi(t, x) = t$, пока речь идет о векторе, не лежащем в слое. Если же он лежит в слое, то ему приписывается длина, уже не согласующаяся с расслоением, при котором весь вектор проектируется в одну точку. Формулу (12.5.3) можно переписать с помощью так называемых дуальных чисел $\xi = xr$, где $r^2 = 0$. Напомним, что в том представлении чисел, где вещественные числа изображаются матрицами $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, а чисто мнимые — матрицами $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ дуальные числа изображаются $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ -\lambda & -\lambda \end{pmatrix}$.

Мнемоническая запись формулы (12.5.3) имеет вид

$$l = \sqrt{t^2 + (xr)^2} \qquad (12.5.4)$$

Из (12.5.1) усматриваем, что в эвклидовой геометрии длина вектора, как бы мы его ни брали, всегда является вещественным числом. Из (12.5.2) видно, что в псевдоэвклидовой геометрии векторы не нулевой длины бывают двух наименований: вещественные (при $|t| > |x|$) и чисто мнимые (при $|t| < |x|$). Это вполне соответствует тому, как применяются названные геометрии: первая применяются исключительно к величинам физической размерности «метр», а вторая как к величинам размерности «секунда», так и к величинам размерности «метр». Несводимость одной размерности к другой отражается формально в том, что вещественные числа и чисто мнимые числа не одинаковы. Из (12.5.4) видно, что в полуэвклидовой геометрии векторы бывают двух наименований: вещественные (при $t \neq 0$) и чисто дуальные xr (при $t = 0$). Таким образом, полуэвклидова геометрия также пригодна для моделирования двух разных физических размерностей. В частности, четырехмерная полуэвклидова R_4^1 моделирует ньютоново пространствовремя (на третьем уровне рассмотрения).

Возвращаясь к пятимерию (t, x, y, z, e) с расслоением $\pi\,(t, x, y, z, e) = (t, x, y, z)$, мы по аналогии с (12.5.4) пишем мнемонически метрику в виде

$$l = \sqrt{t^2 - x^2 - y^2 - z^2 + (er)^2} \qquad (12.5.5)$$

Эта метрика пригодна для моделирования трех наименований (размерностей): вещественные (секунда) для $|t| > \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ чисто мнимые (метр) для $|t| < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и чисто дуальные (кулон) для $t = x = y = z = 0,\ e \neq 0$. Для доказательств мы не станем использовать дуальные числа, которые настолько непривычны, что иные называют их «духами», «нечистой силой»: всё последующее строго доказывается посредством аппарата, указанного в рубрике 4. Но для не боящихся «нечистой силы» поучительно заметить, что всю последующую теорию МОЖНО построить, минуя объекты, согласованные с расслоением, минуя флагтензоры, если наложить обычную риманову геометрию на чисто дуальные координаты при соблюдении двух эвристических правил:

$$\sqrt{a^2+(br)^2}=\begin{cases}=|a|, & a\neq 0\\ =|b|r, & a=0\end{cases} \qquad (12.5.6)$$

и следующего: выражение вида a/r, где a — вещественное число возможно только при $a = 0$ (мотивировка ведь $\left(\frac{1}{r}\right)^2=\frac{1}{0}$). Именно таким путем автор пришел к своей полуримановой геометрии во владимирской тюрьме в 1962 году, а потом уже обосновывал ее «без нечистой силы».

Автоморфизмы (изометрии) метрики (12.5.5) аналогичны автоморфизмам ньютонова универсума (6.G.2) и содержат линейные и НЕЛИНЕЙНЫЕ слагаемые:

$$\begin{cases}x^{\alpha}\mapsto L^{\alpha}_{\beta}x^{\beta}, & 1\leq\alpha,\beta\leq 4\\ x^{s}\mapsto x^{s}+f\left(x^1,x^2,x^3,x^4\right)\end{cases} \qquad (12.5.7)$$

где

$\left(L^{\alpha}_{\beta}\right)$ — группа Лоренца,

f — произвольная функция четырех пространственновременных координат.

Эти автоморфизмы в точностью совпадают с общеизвестными допустимыми преобразованиями лагранжиана в электродинамика: пространственновременные координаты преобразуются посредством группы Лоренца, а «действие» преобразуется аддитивно, с точностью до добавления произвольной функции от *t, x, y* и *z*.

§ 13. ПОЛУРИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ И ЕДИНЫЕ ТЕОРИИ

1^o. Дефиниция однократно-расслоенного полуриманова пространства. Рассматриваем гладкое многообразна M_n с гладким расслоением $\pi :\mapsto M_n \mapsto M_m$. В базе $M_m = \pi M_n$ расслоения задается невырожденная риманова метрика в $g_{\alpha\beta}$, $1 \le \alpha, \beta \le m$. В слоях $W_{n-m} = \overset{-1}{\pi} \pi p \subset M_n$, $p \in M_n$ задается тоже невырожденная риманова метрика $g_{\mu\nu}$, $m < \mu, \nu \le n$. При этом зависят только от координат базы $x^1, \dots x^m$, а $g_{\mu\nu}$ суть функции от всех n переменных из M_n. В обычной римановой геометрии не задают таких тензоров, а сразу вводят g_{ik}, $1 \le I, k \le n$ на всем M_n. Соответственно матрицы компонент выглядят в обычной геометрии так

$$\begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & g_{\mu\beta} \\ g_{\alpha\nu} & g_{\mu\nu} \end{pmatrix} \qquad (13.1.1)$$

а в расслоенном случае так:

$$\begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & ? \\ ? & g_{\mu\nu} \end{pmatrix} \qquad (13.1.2)$$

Дабы уравнять расслоенный случай с римановым по числу компонент метрики, вводим компоненты $g_{\alpha\mu} = g_{\mu\alpha}$, $\alpha \le m < \mu$. Они, естественно, зависят уже от всех переменных. Геометрически $g_{i\mu i}$ задают то, что называется m-распределением

$$\omega_\mu : = g_{ik} \qquad dx^i = 0, \qquad (13.1.3)$$

ортогональным (трансверсальным) к слою M_{n-m}. *Как* будет видно на дальнейшего, физический интерес представляют лишь неинтегрируемые распределения.

Объект $q_{ik} = (q_{\alpha\beta}, q_{\mu м}, q_{\alpha\mu})$ преобразуется при преобразованиях карт (12.4.1—2) иначе, нежели тензор: именно, этот объект, называемый флагтензором g_{ik}, преобразуется по формулам:

$$\begin{cases} g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta}D^{\alpha}_{\alpha'}D^{\beta}_{\beta'} \\ g_{i'\mu'} = g_{\alpha\mu}D^{\alpha}_{i'}D^{\mu}_{\mu'} + g_{\mu\nu}D^{\nu}_{i'}D^{\mu}_{\mu'} \end{cases} \qquad (13.1.4)$$

Здесь, как это принято, штрихами помечены «новые координаты». Обратим внимание, что в силу расслоения, естественно, компоненты $q_{\alpha\beta}$ при преобразованиях но зависят от компонент $q_{\alpha\mu}$ и $q_{\mu\text{м}}$. И, в некотором смысле неожиданно, компоненты $q_{\alpha\mu}$ не зависят при преобразованиях от компонент $q_{\alpha\beta}$, а $q_{\mu\text{м}}$ — ни от $q_{\alpha\beta}$ ни от $q_{\alpha\mu}$, что уже естественно. Всюду в дальнейшем диапазоны суммирования по α, по μ и по i — свои, указанные выше.

Метрический флагтэнзор можно обосновать следующим образом. Обычный метрический тензор g_{ik} получается как отображение $g\colon E_n \mapsto E_n^*$,записываемое в виде

$$g\left(X^i\overline{e_i}\right) = X^i g_{ik}\underline{e}^k$$

где $\overline{e_i}\underline{e}^k = \delta_i^k\ \overline{e_i}$ — базисный вектор в E_n,

$\underline{e}^k$ — в сопряженном E_n^*: при этом по определению $\overline{e_i}\underline{e}^k = \delta_i^k$.

Требуется, чтобы g было невырожденным, а условие $g\ (x)Y = g\ (y)X$ обеспечивает симметрию $g_{ik} = g_{ki}$. Из-за того, что расслоением $\pi : E_n \mapsto E_m$ выделяются два новых векторных пространства (слой $E_{n-m} = \ker\pi = \{X \in E_n \ |\pi X = 0\}$ и база $E_m = \pi E_n$), отображение $E_n \mapsto E_m{}^*$ может быть заменено четырьмя отображениями: $E_m \mapsto E_m{}^*$, $E_{n-m} \mapsto E_{n-m}{}^*$, $E_m \mapsto E_{n-m}{}^*$ и $E_{n-m} \mapsto E_m{}^*$. Первым задается обычный метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ в базе E_{m}, вторым — обычный метрический тензор $g_{\mu\nu}$ в слое E_{n-m}. Третьим и четвертым задаются компоненты $g_{\alpha\mu}$ и $g_{\mu\alpha}$, причем на эти два отображения никаких условий невырожденности (обратимости) не налагаются.

Математическая тонкость состоит в том, что $g_{\alpha\beta}$, $g_{\mu\nu}$, $g_{\alpha\mu}$ и $g_{\mu\alpha}$ написаны все в разных базисах, а потому фигурировать в одной формуле им так же трудно, как трудно складывать вес и температуру. Проще всего дело обстоит с компонентами $g_{\mu\nu}$. Они определяются по вышеупомянутому базису $\overline{e_i} \in E_n$ только из всех базисных векторов выделяются те, что лежат в слое E_{n-m}: соответственно с сопряженным базисом $\underline{e^k} \in E_n^{\ *}$. Поэтому получаем обыкновенный тензор над E_{n-m}. Компоненты же $g_{\alpha\beta}$ определяются относительно базиса e_α в фактор-пространстве $E_m = \pi E_n$, так что базисные векторы суть не векторы из E_n, но классы эквивалентных между собой векторов $e_\alpha = \overline{e_\alpha} + \lambda^k_\alpha \overline{e_\mu}$ (здесь $\overline{e_\mu} \in E_{n-m}$, а λ^μ_α произвольны). За счет того, что образом E_m при отображении g служит сопряженное к тому же E_m пространство E^*_m, в конечном счете мы получаем обыкновенный тензор, только не над E_n, а над $E_m = \pi E_n$. В случае третьего отображения $g : E_m \mapsto E^*_{n-m}$ базисы в образе и прообразе существенно различны. Для того, чтобы можно было бы записать это отображение в базисе $\bar{e}_i \in E_n$ (и сопряженном к нему), т.е. дабы продолжить это отображение с E_m на отображение E_n, необходимо представить E_n в виде прямого произведения

$$E_m \times E_{n-m}$$

где E_m — некоторое подпространство из E_n.

Скажем, при фиксированном базисе $\bar{e}_\mu \in E_{n-m}$ за $\bar{e}_\alpha$, представляющие e_α, принимаются те, которые в формуле $e_\alpha = \overline{e_\alpha} + \lambda^k_\alpha \overline{e_\mu}$ получаются при $\lambda^\mu_\alpha = 0$. Конечно, класс таких представлений состоит не из единственного элемента и для описания степени произвола нужно рассматривать также компоненты $g_{\mu\nu}$, как видно из формулы

$$g\left(\overline{e}_\alpha + \lambda^\mu_\alpha \overline{e}_\mu\right)\overline{e}_\nu = g\left(\overline{e}_\alpha\right)\overline{e}_\nu + \lambda^\mu_\nu\, g\left(\overline{e}_\mu\right)\overline{e}_\nu = g_{\alpha\mu} + \lambda^\mu_\alpha g_{\mu\nu} .$$

Но и формулы преобразования компонент (13.1.4) при таком представлении включают в себя только компоненты $g_{\alpha\mu}$и $g_{\mu\nu}$ и ничего больше. Аналогично четвертое отображение продолжается в виде отображения $E_m \mapsto E^*_n$, когда E_n представляется в виде $E_m \times E_{n-m}$. Точно так же в описании степени произвола возникают $g_{\mu\nu}$ из формулы $g\left(\overline{e}_\mu\right)\left(\overline{e}_\alpha + \lambda^\nu_\alpha \overline{e}_\nu\right) = g_{\mu\alpha} + \lambda^\nu_\alpha g_{\mu\nu}$; при фиксированном $\hat{E}_m \times E_{n-m}$ будет $\lambda^\nu_\alpha = 0$. Формулы преобразования $g_{\mu'\alpha'}$ те же, что в третьем случае.

Наконец, отметим еще, что независимость формул преобразования компонент $g_{\alpha'\beta'}$ от $g_{\alpha\mu}$ и $g_{\mu\nu}$, очевидная при изложенном построении-дефиниции их, НЕ ВЫТЕКАЕТ из закона преобразования (12.4.2) $D^d_{\mu'} = 0 = D^{\alpha'}_\mu$. Ведь общий формулы преобразования тензора над E_n дали бы $g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta} D^\alpha_{\alpha'} D^\beta_{\beta'} + g_{\alpha\mu} D^\alpha_{\alpha'} D^\mu_{\beta'} + g_{\mu\nu} D^\mu_{\alpha'} D^\nu_{\beta'}$, где ничто не обязано быть нулем. Из условий (12.4.2) вытекает лишь независимость $g_{\mu'\nu'}$ от $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\mu}$.

По метрическому флагтензору g_{ik} почти обычными формулами римановой геометрии строятся компоненты «флагаффинной связности» $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ («символы Кристоффеля»), согласующиеся с этой метрикой. Последнее означает, что для ковариантного дифференцирования ∇ относительно связности Γ^i_{jk} имеют место $\nabla g_{\alpha\beta}\ 0$ и $\nabla g_{\mu\nu} = 0$, но условие $\nabla g_{\alpha\mu} \neq 0$ не налагается. Флагаффинная связность согласуется с расслоением, что приводит к двум результатам. Во-первых, имеют место равенства

$$\Gamma^\alpha_{\mu i} = 0, \qquad 1 \le \alpha \le m < \mu \le n, \qquad\qquad 1 \le i \le n \qquad (13.1.5)$$

причем в силу (12.4.2) это условие инвариантно относительно координатных преобразований. Второе — компоненты $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ не выражаются через компоненты метрики g_{ik}, оставаясь совершенно произвольными функциями n переменных. Подробнее про всё это см. [8] и [9].

Известно, что в римановой геометрии всегда можно по каждой фиксированной точке $p \in M_n$ выбрать карту так, чтобы $\partial_i g_{jk}(p) = 0$, где ∂_i обозначают частные производные. В полуримановой это не всегда возможно. Необходимым и достаточным условием существования такой «эвклидовой в точке» карты является выполнение условий:

$$\nabla_{\mu} g_{\nu\alpha} + \nabla_{\nu} g_{\mu\alpha} = 0 \qquad (13.1.6)$$

В этой карте $\Gamma^{i}_{jk}(p) = 0$, кроме $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, которые произвольны.

По компонентам связности обычным образом строится тензор (точнее, флагтензор) кривизны $R^{i}{}_{jkl}$. Он также в двух отношениях отличается от риманова тензора кривизны. Во-первых, имеют место следующие (инвариантные!) условия:

$$R^{\alpha}{}_{\mu ik} = 0; \qquad R^{\alpha}{}_{i\mu k} = 0 \qquad (13.1.7)$$

а, во-вторых, хотя $R^{i}{}_{jkl}$ выражается через Γ^{i}_{jk} обычным образом, но $R^{i}{}_{jkl}$ через g_{ik} не выражается (из-за произвольности $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$).

Совокупность всех названных, в этой рубрике объектов с законами преобразования (12.4.2) называется ПОЛУРИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ V^{m}_{n}.

2º. Многократное расслоение. Сам слой $W \subset M$ может оказаться тоже расслоенным, т.е. существует $\pi_2 : W \mapsto W'$ и т.д. В этом случае основная конструкция сохраняется, но $g_{\mu\nu}$ строится уже не как невырожденный метрический тензор, а полуриманов метрический флагтензор g_{ik} в предыдущей рубрике. В этом случае удобнее говорить не о расслоении слоя, а эквивалентным образом о цепочке вложенных друг в друга последовательных расслоений

$$\pi_k : M_n \mapsto M_{m_k}, \ldots, \qquad \pi_1 : M_{m_2} \mapsto M_{m_1} \qquad (13.2.1)$$

Такая полуриманова геометрия обозначается $V_n^{m_1 \ldots m_k}$, а все описанный конструкции сохраняются, но становятся весьма громоздкими, потому что диапазоны для индексов теперь суть $1 \le \alpha_1 \le m_1$, $m_1 < \alpha_2 \le m_2$, …, $m_k < \alpha_{k+1} \le n$. Мы встречались в предыдущем текста только с однократным расслоением. В § 6.5 полуриманова геометрия V_n^1 (т.е. $M_4 \mapsto R^1$, расслоение задавалось фундаментальным временем) описывала ньютоново пространствовремя. В § 5.8 полуриманова геометрия V_4^3 (т.е. $M_4 \mapsto M_3$, расслоение осуществлялось вдоль конгруэнции кривых) описывала систему отсчета для пространствовремени с постулатом близкодействия. Полуриманова (собственно, мы пока описали в § 12.5 только полуэвклидову ${}^3R_5^4$) геометрия ${}^3V_5^4$ (т.е. $M_4 \mapsto {}^3V_4$, расслоение осуществляется по отношению абсолютной одновременности, т.е. по замыканию отношения каузального порядка) описывала формулой (12.5.5) заряд наравне, с пространственновременными координатами специальной теории относительности, а формулой (12.5.7) — преобразования лагранжиана в этом случае. Ничто не мешает априори в последнем случае мыслить пространство не релятивистским, а ньютоновским, т.е. рассматривать цепочку расслоений-проекций $M_S \mapsto M_4 \mapsto R^1$. Тогда мы получили бы двукратно расслоенную полуриманову геометрию $V_5^{1,4}$. О ее физической пригодности см. § 13.7. А вот во втором примере депо обстоит иначе. Проекция, соответствующая слою одновременности при ньютоновом упорядочении, и проекция, соответствующая отождествлению всех событий на одной материальной точке, — не вкладываются одна в другую. Следовательно, при их объединении нельзя ввести двукратно расслоенной полуримановой метрики.

Другое направленно мысли, следуя которому мощно вводить многократно расслоенные пространства, состоит в повышении размерности, которая в предыдущих примерах равна 5. Этим мы займемся в рубриках 4є — 6є, также в § 14.

3º. Интерпретация компонент $g_{s\alpha}$. Описанные в рубр. 1є компоненты $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\mu м}$ для случая $m = 4$, $n = 5$ не вызывают недоумений. Первые обеспечивают метрический тензор в собственно пространствовремени, четырехмерном и инфинитезимально изотропном: при этом $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$ и $\partial_5 g_{\alpha\beta} = 0$. Вторые, принимающие теперь вид g_{55}, согласно (13.1.4) преобразуются по формуле

$$g_{s'5'} = g_{55} D^5_{s'} D^5_{s'} \qquad (13.3.1)$$

зависят от всех пяти переменных, но $\nabla g_{55} = 0$. Они вполне могут быть интерпретированы как масштаб для измерения заряда (или действия, или как мы истолкуем пятую координату), ибо

$$gs^2 = g_{55}(t, x, y, z, e)de\ de \qquad (13.3.2)$$

при условии, что $dt = dx = dy = dz = 0$. Компоненты же $g_{s\alpha}$ нуждаются в более пристальном рассмотрении. Согласно (13.3.3) они преобразуются по (формуле

$$g_{s'\alpha'} = g_{s\alpha} D^5_{s'} D^\alpha_{\alpha'} + g_{55} D^5_{s'} D^5_{\alpha'} \qquad (13.3.3)$$

курьезно, что точно такая же формула получается при использовании вместо (13.1.4) аппарата невырожденной римановой геометрии (V_5 или ${}^3V_4$ или ${}^4V_5$), чем и объясняется, что физики затормозили свое внимание исключительно на невырожденной геометрии. Однако совпадение одной или двух формулами неправильной теория с формулами теории правильной еще не доказывает правильность первой. Для интерпретации (13.3.3) стандартно прибегают к примерно такого рода рассуждениям. Компоненты g_{55} в точке-константы, и за счет изменения масштаба $D^5_{s'}$, можно всегда считать $g_{55} = 1$, а дальше масштаб не менять, т.е. $D^5_{s'}$ = *1*. Тогда (13.3.3) примет вид $g_{s\alpha} \mapsto g_{s\alpha} D^{\alpha}_{\alpha'} + D^5_{\alpha'}$. Коэффициенты $D^{\alpha}_{\alpha'}$, отвечают координатному преобразованию в собственно пространствовремени (x^1, x^2, x^3, x^4), а при выяснении специфики $g_{5\alpha}$ естественно в нем ничего не менять, так что $D^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha}_{\beta}$. Тогда (13.3.3) выглядит $g_{s\alpha} \mapsto g_{s\alpha} + D^5_{\alpha'}$. Дабы не путаться с лишним индексом «5», переобозначим $A_\alpha := g_{5\alpha}$ и раскроем согласно (5.7.3) содержание символа $D^{\alpha}_{\alpha'}$: получим

$$A_\alpha \mapsto A_\alpha + \partial_\alpha x^5 \qquad (13.3.4)$$

А это легко узнаваемое и хорошо известное в электродинамики преобразование ковектор-потенциала A_α посредством добавления градиента $\partial_\alpha f$ произвольной функции *f*, здесь $f = x^5$.

Поэтому стандартно принимают $g_{5\alpha}$ за электромагнитный потенциал A_α, мы в интерпретации тоже будем поступать так. Напомним, что условия ковариантной постоянности $\Delta g_{5\alpha} = 0$ налагаются по определению полуримановой геометрия.

Итак, геометрический подход позволил получить единым образом следующие объекты: метрический тензор пространствовремени $g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3, x^4)$, масштаб $g_{55}(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$ для измерения пятой координаты (действия, заряда) и ковектор-потенциал $A_\alpha(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$, причем в силу (13.1.8) выполняется $\Delta_5 A_\alpha = 0$. На данной стадии рассмотрения «лишней» оказывается функция g_{55}, которая получила название «скалярный потенциал» или «скалярное поле». Она не находит себе обсервационного соответствии при интерпретации, ибо классически ВСЁ электромагнитное поле сводится к $F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$ без какой-либо g_{55}. Далее, плохо, что вместо $\partial_5 A_\alpha = 0$ мы имеем лишь $\nabla_5 A_\alpha = 0$ Наконец, обращаясь к компонентам связности Γ^i_{jk}, обнаруживаем функции $\Gamma^5_{5\alpha}(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$ и $\Gamma^5_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$, которые также ни находят себе интерпретации.

4º. Отсутствие кривизны во внутреннем пространстве. В терминологии физиков, занимающихся едиными теориями, то, что у нас именуется «слой», называется ВНУТРЕННИМ ПРОСТРАНСТВОМ. Геометрия слоя в полуримановой геометрии полностью определяется метрикой g_{55} (общее — $g_{\mu\nu}$) и не зависит от метрики $g_{\alpha\beta}$ этого удобного обстоятельства нет в невырожденной геометрии. Мы зададим геометрию в слое так, чтобы она была там эвклидова и не зависела бы от координат из базы расслоения: это будут наши специфицирующие постулаты. До сих постулатов я не додумался в публикациях на эту тему шестидесятых годов, поэтому там изложение гораздо более громоздкое и отягощение ненужными функциями, хоти в целом подход верный. Оказывается, соответствующие этим постулатам условия:

$$\nabla_\alpha g_{55} = 0, \qquad 1 \le \alpha \le 4 \qquad (13.4.1.)$$

$$R^5_{5ik} = 0, \qquad 1 \le i, k \le 5 \qquad (13.4.2.)$$

инвариантны относительно допустимых преобразований (12.4.1—2) в силу формулы (13.1.7), поэтому вводить такие постулаты корректно. Тогда в области (а не в одной точке) можно выбрать карту, в которой $\Gamma^5_{55} = 0$, $\Gamma^5_{5\alpha} = 0$. Класс таких карт выделяется однозначно и инвариантно, эти кар ты связаны друг с другом линейными по пятой координате x^5 преобразованиями. В этом классе карт законно положить $\Gamma^5_{5\beta} = 0$, что мы и сделаем. В этой же карте $\partial_\alpha g_{55} = 0$, $\partial_5 g_{55} = 0$ и $\partial_5 g_{55} = 0 = \partial_5 A_\alpha$. Так устраняются все лишние объекты и затруднения, перечисленные в конца предыдущей рубрики.

В других, более геометричных словах, суть сказанного в том, что формулами (13.4.1—2) гарантирован абсолютно-параллельный перенос любого вектора ИЗ СЛОЯ по любому пути во всем 5-многообразии, Возможность такой гарантии возникает из структуры ПОЛУРИМАНОВОЙ геометрии, ее нет в РИМАНОВОЙ НЕВЫРОЖДЕННОЙ геометрии. Этим объясняется название, которое мы даем нашему постулату: ПОСТУЛАТ ЭВКЛИДОВОСТИ. Все взаимодействия описываются полуримановой геометрией с абсолютно-эвклидовым слоем.

5º. Шестимерный случай. Нет никаких препятствий развить эти методы на случай большего числа измерений. Рассмотрим $n = 6$ и по-прежнему берем 4-мерную базу ${}^3V_4$. Возможны два случая. Первый — расслоение однократное $\pi : M_6 \mapsto M_4$, а слой $\overset{-1}{\pi} \pi p$ уже не расслоен, тогда согласно постулату эвклидовости на ном выполняется эвклидова или псевдоэвклидова геометрия (R_2 или ${}^1R_2$). Второй случай — сам слой расслоен, так что в нем выполняется полуэвклидова геометрия R_2^1. Этот случай удобнее описывать в виде двух последовательных расслоений $\pi_1 : M_6 \mapsto M_5$ и $\pi_2 : M_5 \mapsto M_4$. Для определенности в первом случае рассмотрим тот подслучай, когда геометрия в слое эклидова с положительно определенной метрикой, т.е. $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Тогда допустимые в слое преобразования координат декартовы и имеют вид

$$D_{5'}^5 = \cos\varphi, \qquad D_{6'}^5 = \sin\varphi, \qquad \partial_i \varphi = 0 \tag{13.5.1}$$

Вводим объекты $A_i = g^{5\mu} g_{\mu i}$ и $B_i = g^{6\mu} g_{\mu i}$. В силу (13.1.6) имеем:

$$A_{\alpha 5} = 0, \qquad A_{\alpha 6} = -B_{\alpha 5}, \qquad B_{\alpha 6} = 0, \tag{13.5.2}$$

а (13.1.4) дают для A_α, B_α и $A_{\alpha,6}$ (калибровочные преобразования:

$$\begin{cases} A_\alpha \mapsto A_\alpha \cos\varphi + B_\alpha \sin\varphi + \cos\varphi \partial_\alpha x^5 + \sin\varphi \partial_\alpha x^6 \\ B_\alpha \mapsto -A_\alpha \sin\varphi + B_\alpha \cos\varphi - \sin\varphi \partial_\alpha x^5 + \cos\varphi \partial_\alpha x^6 \end{cases} \tag{13.5.3}$$

$$A_{\alpha,6} \mapsto A_{\alpha,6} \tag{13.5.4}$$

Отсюда вытекает теорема:

ТЕОРЕМА 20. Рассматриваемый случай полуримановой геометрии $^3V_6^4$ равносилен структуре ($g_{\alpha,\beta}$, W_α, $F_{\alpha,\beta}$, $G_{\alpha,\beta}$), где $W_\alpha(x^1, x^2, x^3, x^4)$ есть вектор (а не КЛАСС векторов с точностью до градиента, как обстояло дело с A_α) и

$$F_{\alpha\beta} = W_{[\alpha,\beta]}x^6, \qquad G_{\alpha\beta} = W_{[\alpha,\beta]}x^5 \tag{13.5.5}$$

$$\begin{cases} F_{\alpha\beta} \mapsto F_{\alpha\beta}\cos\varphi + G_{\alpha\beta}\sin\varphi \\ G_{\alpha\beta} \mapsto -F_{\alpha\beta}\sin\varphi + G_{\alpha\beta}\cos\varphi \end{cases} \tag{13.5.6}$$

Изометрии тут имеют вид

$$\begin{cases} x^\alpha \mapsto L^\alpha_\beta x^\beta \\ x^\mu \mapsto E^\mu_y x^\nu + f^\mu\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \end{cases} \tag{13.5.7}$$

где

L^α_β — группа Лоренца в $^3R_4$, матрица E^μ_ν задает вращения на эвклидовой 2-плоскости (x^5, x^6), а f^5, f^6 суть произвольные функции.

Инвариантами здесь будут $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ (длина в $^3V_4$), $d\sigma^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ (длина в слое при $dx^1 = dx^2 = dx^3 = dx^4 = 0$) и выражение

$$A_i \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^5}{d\sigma} + B_i \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^6}{d\sigma}$$

Хотя последнее выражение может играть роль лагранжиана, тем не менее в такой модели НЕТ МЕСТА электромагнетизму: ведь нет векторного поля, определенного с точностью до градиентного преобразования.

Рассмотрим теперь второй случай. Расслоение $M_5 \mapsto M_4$ порождает все те объекты, которые были рассмотрены в рубр. 4є с там тривиальным дополнением, что по построению они все не зависят от шестой координаты. Расслоение же $M_6 \mapsto M_5$ порождает добавочные объекты $g_{6\alpha}$, g_{65} и g_{66}, причем в силу абсолютной эвклидовости слоя (x^5, x^6) два последних суть константы (и $g_{66} = 1$), Закон преобразования (13.1.4) выглядит здесь

$$g_{6\alpha} = g_{6\alpha} D^{6}_{6'} D^{\alpha}_{\alpha'} + g_{65} D^{6}_{6'} D^{5}_{\alpha'} + g_{66} D^{6}_{6'} D^{6}_{\alpha'} \qquad (13.5.8)$$

что дает для объекта $B_i = g^{66} g_{6i}$ такие формулы калибровочных преобразований:

$$B_\alpha \mapsto B_\alpha + g_{65} \partial_\alpha x^5 + \partial_\alpha x^6 \qquad (13.5.9)$$

$$B_{\alpha,5} \mapsto B_{\alpha,5} \qquad (13.5.10)$$

$$B_5 \mapsto B_5 + const \qquad (13.5.11)$$

При этом согласно(13.1.6) имеет место

$$B_{\alpha,6} = 0 \qquad (13.5.12)$$

Это означает, что в данном случае помимо электромагнитного поля $A_\alpha = g^{55} g_{a\alpha}$ появляется еще, наподобие ${}^3V_6^4$, «векторный заряд» W_α(W_α: = $B_{\alpha6}$), зависящий здесь вообще говоря от первых пяти координат, а также поле $G_{\alpha\beta} = \int W_{[\alpha,\beta]} dx^5$, но здесь (в отличие от ${}^3V_6^4$) поля $F_{\alpha\beta}$ и $G_{\alpha\beta}$ независимы друг от друга. Итак, верна теорема:

ТЕОРЕМА 21. Рассматриваемый случай полуримановой геометрии ${}^3V_6^{4,5}$ равносилен структуре ($g_{\alpha\beta}$, A_α, W_α, B_α), где A_α = $A_\alpha(x^1, x^2, x^3, x^4)$ задан с точностью до калибровочных преобразований (13.3.4), а $W_\alpha = W_\alpha(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$ —инвариантно заданный вектор без калибровочных преобразований. Поля $F_{\alpha\beta} = A_{[\alpha,\beta]}$ и $G_{\alpha\beta}$ никак не связаны, константа B_5 определена с точностью до аддитивной постоянной. Изометрии суть

$$\begin{cases} x^\alpha \mapsto L^\alpha_\beta x^\beta \\ x^5 \mapsto x^5 + f^5\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \\ x^6 \mapsto x^6 + f^6\left(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\right) \end{cases} \qquad (13.5.13)$$

и имеются два варианта $A_\alpha x^\alpha$ и $B_\alpha x^\alpha + B_5 x^5$, это лагранжианы данной модели.

Так перед нами открывается перспектива получения новых взаимодействий, как сохраняя ранее полученные (электромагнетизм во втором случае), так и не сохраняя их (в первом случае). Во всех новых взаимодействиях будут возникать «векторные заряды» и иногда от зависимости по координатам из внутреннего пространства избавиться не удастся.

6^o. Силы взаимодействия. Мы считаем, что «сила» (точнее, «приведенная на единицу массы сила»), т.е. вторая ковариантная производная $\frac{\nabla}{ds}\frac{dx^{\alpha}}{ds}$ является функцией от скорости $x^{d}=\frac{dx^{\alpha}}{ds}$ материальной точки и от всех найденных в 5є тензоров. Обычно в физике сила для электромагнитного взаимодействия берется линейной по каждому из перечисленных тензорных аргументов: мы расширим класс допустимых функций, взяв ее тензорной рациональной функцией, не налагая на веса аргументов никаких ограничений. Предположим, что x не зависит от векторных переменных (кроме x). Тогда, так как $x_{\alpha}x^{\alpha}=1$ и потому $x^{\alpha}x_{\alpha}=0$, сразу оказывается, что уравнение движения («сила») имеет вид:

$$x^{\alpha}=\left(a_1\beta^{\alpha}_{\beta}+a,G^{\alpha}_{\beta}+a_3H^{\alpha}_{\beta}\right)x^{\beta}+\left(b_1F^{\alpha}_{\beta}F^{\beta}_{\gamma}F^{\gamma}_{\delta}+b_2F^{\alpha}_{\beta}F^{\beta}_{\gamma}F^{\gamma}_{\delta}+b_{27}H^{\alpha}_{\beta}H^{\beta}_{\gamma}H^{\gamma}_{\delta}\right)x^{\delta}+$$

$$+\left(c_1F^{\beta\gamma}F_{\beta\gamma}F^{\alpha}_{\delta}+c_2F^{\beta\gamma}F_{\beta\gamma}G^{\alpha}_{\beta}+c_{27}H^{\beta\gamma}H_{\beta\gamma}H^{\alpha}_{\delta}\right)x^{\delta}+$$

$$+\left(d_1F^{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F^{\varsigma}_{\delta}F_{\Sigma\xi}+d_2F^{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F^{\varsigma}_{\delta}G_{\Sigma\xi}+\ldots+d_{81}H^{\alpha\beta}H_{\beta\gamma}H^{\varsigma}_{\delta}H_{\Sigma\xi}\right)\cdot$$

$$\cdot x^{\gamma}x^{\delta}x^{\Sigma}\ldots$$

Здесь отточия внутри скобок означают одночлены, получаемые сочетаниями *F, G* и *H* (последнее — в семимерном случае) в соответствующих произведениях. Отточие в конце формулы указывает на соответствующие слагаемые веса 5, 7 и т.д. по *x, F, G, H*… . Коэффициенты *a*, *b*, ... суть неопределяемые теорией константы. В 6-мерном случае отсутствуют *H*, в 5-мериом отсутствуют *H* и *G,* а при *n* > 7. Появляются дополнительные слагаемые той же структуры, но с новыми тензорами.

В частном «кулоновом случае», когда $A_\alpha = (e, r^{-1}, 0, 0, 0)$, $B_\alpha = (e, r^{-1}, 0, 0, 0)$, и $C_\alpha = (e, r^{-1}, 0, 0, 0)$, можно (13.6.1) переписать короче для импульса $\vec{p}$ в виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)\vec{r} r^{-3} + \sum \mu_{ijk} e_1^i e_2^j e_3^k \vec{r} r^{-7} +$$

$$+ \sum \nu_{ijk} e_1^i e_2^j e_3^k (\vec{r}\vec{v})\vec{r} r^{-9} (c^2 - v^2)^{-1} + \dots$$

(13.6.2)

где в отточии стоят слагаемые с $(er^{-2})^5$, $(er^{-2})^7$, …., а суммирование производится по $0 \leq I, j, k \leq 3$ при условии $i + j + k = 3$. Константы λ_i, μ_{ijk}, ν_{ijk} не определяются теорией.

Если все константы, кроме λ_1, суть нули, то получаем кулоново поле в классическом виде. Если еще $\mu_{300} \neq 0$, то получаем «радиационную поправку» на кулоново поле. Члены с e^2, e^3 могут восприниматься в экспериментах как «более сильно действующие» сравнительно со слагаемыми, где присутствует только er^{-2}.

Довольно простыми рассуждениями при естественных предположениях получаем уравнения Максвелла для найденных взаимодействий. В линейном приближении они имеют вид:

$$F_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0, \qquad G_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0, \qquad \dots \qquad (13.6.3)$$

$$\Delta_\alpha F_l^{\alpha\beta} = \lambda x^\beta, \qquad \Delta_\alpha G_l^{\alpha\beta} = \mu x^\beta, \qquad \dots \qquad (13.6.4)$$

а в нелинейном случае надо в правую часть (13.6.4) вместо x подставить относящееся к этому взаимодействию члены из правой части уравнения (13.6.1).

7º. Возможно ли электричество в ньютоновом универсуме. Мы с самого начала постулировали, чтоб база расслоения $M_3 \mapsto M_4$ является псевдоримановым пространствовременем ${}^3V_4$ общей теории относительности. А что изменилось бы в теории, если бы база была V_4^1 ,т.е., полуримановым пространством, соответствующим ньютонову упорядочению? Тогда мы имели бы следующие объекты: g_{11}, $g_{\alpha\beta}(2 \leq \alpha,\beta \leq 4)$ и g_{55} соответственно суть метрика в одномерной базе (на оси темпорат), в собственно пространстве (трехмерном x, y z) и в одномерном слое x^5 . Затем имелись бы смешанные компоненты $g_{1\alpha}$ $(2 \leq \alpha \leq 4)$, $g_{\alpha s}$ и g_{15} отвечают векторному полю V_α тока вещества см. (6.5.3) , а g_{u5} и g_{15} пока не отождествленные. Законы преобразования суть: $g_{11} \mapsto g_{n} D^{1}_{1'} D^{5}_{1'}$ (13.7.1)

$$g_{\alpha\beta} \mapsto g_{\alpha\beta} D^{\alpha}_{\alpha'} D^{\beta}_{\beta'} \qquad (13.7.2)$$

$$g_{55} \mapsto g_{55} D^{5}_{5'} D^{5}_{5'} \qquad (13.7.\ 3)$$

$$g_{1\alpha} \mapsto g_{1\alpha} D^{1}_{1'} D^{\alpha}_{\alpha'} + g_{\beta\alpha} D^{\beta}_{1'} D^{\alpha}_{\alpha'} \qquad (13.7.4)$$

$$g_{\alpha s} \mapsto g_{\alpha s} D^{\alpha}_{\alpha'} D^{s}_{s'} + g_{55} D^{s}_{\alpha'} D^{5}_{s'} \qquad (13.7.5)$$

$$g_{1s} \mapsto g_{1s} D^{1}_{1'} D^{s}_{s'} + g_{\alpha s} D^{\alpha}_{1'} D^{s}_{s'} + g_{55} D^{s}_{1'} D^{5}_{s'} \qquad (13.7.6)$$

Из (13.7.4) видно, что при переходе к другой системе отсчета «скорости складываются» :