ДАН АН РТ 2011, т.54, № 2, с.105-109

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УДК 51-71 + 534.014

З.Д. Усманов

КОЛЕБАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА, ОПИСЫВАЕМЫЕ В ЕГО СОБСТВЕННОМ ВРЕМЕНИ

Институт математики АН Республики Таджикистан

Путем замены независимой переменной нелинейное уравнение колебаний маятника преобразуется к линейному, которое поддается исчерпывающему исследованию. В новой переменной описание процесса упрощается, а его специфика и сложность проявляются в характере зависимости ньютонового и собственного (внутреннего) времён, т.е. старой и новой независимых переменных.

Ключевые слова: *математический маятник, колебание, ньютоново время, собственное (внутреннее) время.*

Адрес для корреспонденции: *Усманов Зафар Джураевич, 734063 Республика Таджикистан, Душанбе, ул. Айни 299/1, Институт математики АН РТ. E-mail: zafar-usmanov@rambler.ru*

Математический маятник - это невесомый прямолинейный твердый стержень конечной длины, один конец которого закреплен в неподвижной точке O, а на другом конце расположена материальная точка массы m. При рассмотрении движения маятника пренебрегается трением в точке подвеса и сопротивлением воздушной среды. Кроме того, не исключается возможность, что маятник может совершать полный оборот вокруг точки подвеса.

При выводе уравнения движения маятника под действием силы тяжести используется фактически ньютоново (“абсолютное, истинно математическое”) время, которое “…само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью”, [1]. В практических приложениях ньютоново время замещается астрономическим, которое можно считать также и собственным временем колебания маятника, поскольку оно порождается гравитационным полем, побуждающим движение маятника.

При описании какого-либо процесса возможно использование его самых разнообразных собственных времен, при этом предпочтение тому или иному из них по сравнению с каким-либо другим отдается только из соображений удобств. По этому поводу уместно напомнить точку зрения А.Пуанкаре, [2]: “Время должно быть определено так, чтобы уравнения механики были возможно более просты. Другими словами, нет способа измерения времени, который был бы истиннее другого; общепринятый способ измерения является более удобным”.

1. В настоящей статье используется такое собственное время, в котором уравнение процесса записывается в простом виде и легко интегрируется, вместе с тем специфика и сложность нелинейного колебания маятника сосредоточивается в функциональной зависимости ньютонова и собственного времен.

Итак, обратимся к уравнению движения математического маятника, состояние которого в произвольный момент t характеризуется углом φ его отклонения от вертикали, проходящей через точку O, см., например, [3]:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \qquad (1)$$

где g - ускорение силы тяжести и l - длина маятника. Применяя обозначения

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (2)$$

и $\nu^2 = \frac{l}{g}$, запишем (1) следующим образом

$$-\ \nu^2\, d\,\omega = \ \sin\varphi\ dt\,. \qquad (3)$$

Теперь с помощью равенства

$$d\tau = \ -\sin\varphi\ dt \qquad \left(dt = -\frac{d\tau}{\sin\,\varphi} \right) \qquad (4)$$

введем новую независимую переменную τ, называемую в дальнейшем *собственным временем* движения маятника. В новой переменной уравнение (3) перепишется в следующем виде

$$\nu^2\, d\omega \ = \ d\tau\,,$$

что после интегрирования приводит к такому результату:

$$\nu^2\,\omega \ = \ \tau \ + \ c\,, \qquad (5)$$

где c - произвольная константа интегрирования. Подставляя выражение для ω в соотношение (2), выводим

$$\nu^2\ \ d\,\varphi \ = \ (\tau + c)\,d\,t\,.$$

Теперь воспользуемся формулой (4) для того, чтобы в последнем равенстве выразить $d\,t$ через $d\,\tau$. Разделяя переменные, приходим к уравнению

$$-\nu^2 \sin\varphi\ d\,\varphi \ = \ (\tau + c)\,d\,\tau\,,$$

интегрирование которого дает:

$$v^2\cos\varphi \;=\; \frac{\tau^2}{2} + c\tau + c_1 \;, \qquad (6)$$

где c_1 - ещё одна произвольная константа интегрирования. Для определения c и c_1 зададим начальные условия:

$$\varphi = \varphi_0 \;\text{ и }\; \omega = \omega_0 \;\text{ при }\; \tau = 0\,.$$

Тогда из (5) следует $c = v^2\omega_0$ и потому

$$v^2(\omega - \omega_0) \;=\; \tau \;, \qquad (7)$$

а из (6) вытекает $c_1 = v^2\cos\varphi_0$. При таких значениях констант соотношение (6) принимает вид

$$v^2\cos\varphi \;=\; \frac{\tau^2}{2} + \; v^2\omega_0\tau + v^2\cos\varphi_0 \qquad (8)$$

Исключив в нём время τ с помощью (7), получим

$$2\,(\cos\varphi \;-\; \cos\varphi_0) \;=\; v^2(\omega^2 \;-\; \omega_0^2)\,. \qquad (9)$$

Формулы (7), (8) и (9) позволяют полностью описать движение маятника в зависимости от изменения его собственного времени. Не останавливаясь на этом, займёмся рассмотрением свойств собственного времени τ .

2. Прежде всего, отметим некоторые особенности, обусловленные определением $d\tau$ по формуле (4). В то время как относительно dt , по крайней мере в неявном виде, предполагается, что $dt > 0$, для $d\tau$ это вовсе не имеет место. Действительно, при $\varphi = 0$ будет $d\tau = 0$. Кроме того, в зависимости от знака $\sin\varphi$ возможны ситуации как с $d\tau > 0$, так и с $d\tau < 0$. Таким образом, на фоне ньютонового времени t, текущего “равномерно” и

безостановочно, собственное время процесса то останавливается, то возрастает, то уменьшается.

Добавим к сказанному, что в согласии с (9) возможные значения ω ограничены сверху и снизу максимальным и минимальным значениями угловой скорости маятника:

$$\omega_{\min}^2 = \max\left(0,\ \omega_0^2 - \frac{2}{\nu^2}(1+\cos\varphi_0)\right) \le \omega^2 \le \omega_{\max}^2 = \omega_0^2 + \frac{2}{\nu^2}(1-\cos\varphi_0).$$

Максимальное значение $\omega_{\max}$ маятник приобретает в положении $\varphi = 0$. Что касается минимального значения, то оно может достигаться:

либо при угле $\varphi = \pm\varphi_1$ $(\varphi_0 < \varphi_1 \le \pi)$, вычисляемом при "достаточно малом" $\omega_0 = \omega(\varphi_0)$ по формуле $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_0 - \frac{\nu^2}{2}\omega_0^2$, и тогда $\omega_{\min} = 0$;

либо при $\varphi = \pm\pi$, когда $\omega_0 = \omega(\varphi_0)$ будет "достаточно большой величиной", и тогда $\omega_{\min}^2 = \omega_0^2 - \frac{2}{\nu^2}(1+\cos\varphi_0) > 0$.

В свою очередь, согласно (7) значениям $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$ будут соответствовать максимальное и минимальное значения собственного времени:

$$\tau_{\max} = \nu^2(\omega_{\max} - \omega_0) > 0 \qquad \text{и} \qquad \tau_{\min} = \nu^2(\omega_{\min} - \omega_0) < 0.$$

Дополняя полученные результаты несложными вычислениями, можно констатировать, что при "достаточно малом" ω_0 математический маятник совершает периодические колебания с периодом $T = 4(\tau_{\max} - \tau_{\min})$, в процессе которых его угловая скорость при вращении против часовой стрелки увеличивается от минимального значения $\omega_{\min} = 0$ при $\varphi = -\varphi_1$ $(\varphi_0 < \varphi_1 \le \pi)$ до максимального значения $\omega_{\max}$ при $\varphi = 0$, а затем $-$ наоборот: уменьшается от значения $\omega_{\max}$ при $\varphi = 0$ до $\omega_{\min} = 0$ при $\varphi = \pi$.

При ”достаточно большом” ω_0 период колебания определяется уже величиной $T = 2(\tau_{\max} - \tau_{\min})$, угловая скорость увеличивается от значения $\omega_{\min} > 0$ при $\varphi = -\pi$ до максимального значения $\omega_{\max}$ при $\varphi = 0$, а затем – наоборот: уменьшается от значения $\omega_{\max}$ при $\varphi = 0$ до $\omega_{\min}$ при $\varphi = \varphi_1$. В обоих случаях монотонное увеличение ω характеризуется возрастанием собственного времени τ от значения $\tau_{\min}$ до значения $\tau_{\max}$, а монотонное убывание ω - обратным ходом τ от $\tau_{\max}$ до $\tau_{\min}$.

Рассмотренное в настоящей статье собственное время колебаний математического маятника является циклической переменной. По её значениям в пределах каждого полупериода собственного времени однозначным образом определяются состояния маятника (угол φ и угловая скорость ω), и наоборот, по φ и ω однозначным образом находится τ . По этим причинам переменная τ названа *собственным* или же *внутренним временем*, приспособленным для описания колебаний маятника. Для хронометрирования иных процессов оно пригодно лишь в пределах одного своего полупериода колебаний.

В заключение отметим, что непосредственная связь между t и τ извлекается из формулы (4), в которой $\sin\varphi$ с помощью (8) выражается через τ :

$$d\tau = -\sqrt{1 - \left(\frac{\tau^2}{2\nu^2} + \omega_0\tau + \cos\varphi_0\right)^2}\, dt\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М., Наука, 1989, 688 с.
2. Пуанкаре А. Ценность науки, часть 1, гл.2. Измерение времени. В книге: О науке – М. Наука, 1983, 560 с.

3. Зоммерфельд А. Механика. - М.: Госиздат Иностранной литературы. 1947, с.392

З.Ҷ. Усмонов

ТАСВИРИ ЛАППИШИ РАҚҚОСАКИ МАТЕМАТИКИИ ДАР ВАҚТИ ХУСУСИАШ

Институти математикаи АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон

Бо иваз кардани тағйирёбандаи новобаста, муодилаи ғайрихаттии лаппиши раққосак ба муодилаи хаттӣ оварда шудааст, ки он пурра тадқиқ карда мешавад. Дар тағйирёбандаи нав тасвири раванд соддатар мешавад, хусусият ва мураккабии он аз табиати вобастагии вақти нютонӣ ва хусусӣ (дохилӣ), яъне тағйрёбандаҳои кӯҳна ва нав зоҳир мегардад

Калимаҳои калидӣ: *раққосаки математикӣ, лаппиш, вақти нютонӣ, вақти хусусӣ (дохилӣ).*

Z.D.Usmanov

OSCILLATION OF MATHEMATICAL PENDULUM WRITTEN IN ITS OWN TIME

By replacing the independent variable, the nonlinear equation of the pendulum oscillation becomes linear which can be easily analyzed. In such a variable, the description of the process is simplified, and the whole complexity of the process is reflected in the functional dependence of Newtonian and intrinsic (internal) time, i.e. between the old and new independent variables.

Keywords: *mathematical pendulum, oscillation, Newtonian time, own (internal) time.*