Почему выполняются экстремальные принципы для энтропии и времен?[1]

Пространство и время: физическое, психологическое, мифологическое. М.: КЦ "Акрополь". 2004. С. 87-94.

© А. П. Левич

Кафедра общей экологии Биологического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова
Кафедра моделирования природных референтов времени Web-Института исследований природы времени

E-mail: http://www.chronos.msu.ru

Существует не так уж много способов формального представления фундаментальных законов в теоретическом естествознании. Один из самых распространенных из них – это, так называемые, уравнения движения. Например, уравнения Ньютона в классической механике, уравнение Шредингера в нерелятивистской квантовой механике, уравнение Дирака для релятивистского случая, уравнения Эйнштейна в общей теории относительности… Уравнение движения – это постулат, изобретенный гением, имя которого становится именем фундаментального закона.

Другой распространенный способ – формулирование экстремального принципа. Например, в физике известны принцип наименьшего времени распространения света П.Ферма, принцип наименьшего действия П.Мепертюи, принцип максимальной энтропии, принцип минимума производства энтропии… В биологии известны принцип наибольшей приспособленности Ч.Дарвина, принцип максимального разнообразия, принципы максимальной экспансии, максимального потока энергии и.т.п. (см. Фурсова и соавт., 2003). Угадывание постулата-уравнения заменяется в теориях, основанных на экстремальных принципах, угадыванием (т.е. тем же постулированием) функции или функционала, поиск экстремума которых методами вариационного исчисления приводит к описанию движения или развития исследуемой системы. Теории, построенные с помощью постулатов-уравнений или постулатов-функционалов, как правило, эквивалентны друг другу. А именно, вариационные методы позволяют для любого заданного функционала выписать уравнения движения в форме уравнений Эйлера-Лагранжа, а для любого уравнения движения можно подобрать функционал, для которого оно является уравнением Эйлера-Лагранжа.

Однако, экстремальные принципы, на мой взгляд, обладают большей обобщающей и эвристической силой. Рассмотрим пример камня, брошенного под углом к горизонту. Почему он движется по параболе? Объясняя явление, можно указать на квадратичное уравнение равнопеременного движения. Само это уравнение представляет следствие второго закона Ньютона для тела, движущегося под действием постоянной силы. Возможно и более общее объяснение – через движение по геодезической линии, которая является решением уравнения Эйнштейна в общей теории относительности. И уравнение Ньютона, и уравнение Эйнштейна могут быть получены из принципа наименьшего действия. Однако, уравнение равнопеременного движения относится к узкому классу движений под действием постоянной силы, второй закон Ньютона описывает движения под действием произвольных сил в слабых полях и с невысокими скоростями, уравнение Эйнштейна уже не связаны и этими ограничениями, а принцип наименьшего действия применим ко всем формам механического, электромагнитного и ряда других движений.

---

1 Работа поддержана Российским гуманитарным научным фондом, грант № 03-03-00040а.

Но почему же в мире действуют экстремальные принципы? Готфрид Вильгельм Лейбниц считал – потому, что мы с вами живем в "лучшем из миров". Я бы хотел додумать эту мысль – в чем конкретно наш мир так хорош, что в нем действуют экстремальные принципы. Движет мной не только любопытство, но и потребность науки в поиске законов изменчивости мира, особенно в тех исследовательских областях, для которых гениальное угадывание фундаментальных уравнений еще не свершилось.

И уравнения движения, и экстремальные принципы – это инструменты теоретического естествознания. Единственный путь построения формальной теории, открытый для теоретика, состоит в подборе математической структуры, удачно описывающей интересующий исследователя фрагмент реальности. Например, эмпирическое пространство описывают трехмерным многообразием действительных чисел. Совокупность "точечных" событий мира можно описать четырехмерным многообразием Минковского с псевдоевклидовой метрикой или метрикой, учитывающей риманову кривизну. Совокупность состояний атома принято описывать векторами в бесконечномерном гильбертовом пространстве или – равносильным образом – полем бесконечных матриц. Экологическое сообщество удобно описывать множествами со структурой разбиений.

Да и сама математика, по словам многоголового автора эпохи Н.Бурбаки (1963), представляет собой переплетение нескольких математических структур – алгебраической, топологической и структуры порядка. Для описания произвольных математических структур удобен язык математической теории категорий и функторов. Две особенности теоретико-категорного описания систем позволяют думать, что язык теории категорий более адекватен для описания реальности, нежели язык математики, основанной на теории множеств. Первая особенность – возможность оперировать сразу всей совокупностью одинаково структурированных множеств, что позволяет отождествить эту совокупность с пространством всех возможных состояний системы. Вторая особенность – та, что в категорию наряду со структурированными объектами равноправно и обязательно входят все допустимые их структурой способы изменения объектов, или преобразования состояний системы. Это позволяет заменить теоретико-множественное идеализированное представление мира в виде "застывших" объектов на адекватное миру представление его процессами.

Поиск выделенных – реально осуществляющихся – состояний систем среди всех потенциально возможных в методологии экстремальных принципов требует, во-первых, умения каким-либо образом упорядочить состояния между собой на шкале "больше-меньше", "сильнее-слабее" и т.п. и, во-вторых – выбора экстремального из этих состояний в полученном упорядочении. На языке математических структур такой поиск означает умение упорядочить структурированные множества, описывающие систему, и выбрать наиболее "сильную" (или наиболее "слабую") структуру в качестве той, что выделяет реализующееся состояние из всех возможных. Назовем сформулированное утверждение "*принципом экстремальной структуры*".

Теория категорий и функторов представляет аппарат, позволяющий сравнивать по "силе структур" любые структурированные множества. Метод сравнения легче всего понять, рассмотрев предельный случай структурированных множеств – множества без структуры. Для сравнения таких множеств можно использовать такую характеристику, как количество элементов в них (синонимы – кардинальные числа множеств, мощности множеств). Любые два множества сравнимы по количеству элементов. Для множеств со структурой характеристика по количеству элементов неинформативна, поскольку никак не связана со структурой. Однако, само понятие количества элементов не первично, а возникает как математическая конструкция при сравнении множеств с помощью соответствий между ними.

Термины "изменение объектов", "преобразование состояний", упомянутые в предыдущих абзацах, в данном контексте можно считать синонимами термина "соответствие". Частный случай соответствий представляют собой привычные функции, или отображения. Поясним примером метод сравнения множеств с помощью соответствий. Зададимся вопросом: чего (или кого) больше в некой комнате – стульев или людей? Один из способов ответить на этот вопрос – подсчитать количества стульев и людей, а затем сравнить полученные числа. Другой способ – установить соответствие между людьми и стульями, например, попросив, чтобы каждый из присутствующих в комнате людей занял один стул. После того, как люди рассядутся, мы сможем точно ответить больше ли в комнате стульев или людей в зависимости от того, остались ли свободными стулья или – стоящими без сидячего места люди. Замечу, что при этом мы можем не знать ни количества стульев, ни количества людей в комнате. Повторю, что процедура сравнения множеств с помощью соответствий носит более общий характер, чем подсчет количества элементов множеств.

Применение сравнения структурированных множеств с помощью преобразований (соответствий), сохраняющих имеющуюся структуру, порождает "*структурные числа*" структурированных множеств, обобщающие понятия кардинального числа, или "количества элементов", используемые для множеств без структуры (структурные числа превращаются в обычные количества элементов для частного случая бесструктурных множеств). Однако, структурные числа – это не конечная остановка на нашем пути к методу поиска экстремальных структур. Дело в том, что в отличие от бесструктурных множеств, которые всегда сравнимы с помощью числа элементов в них, структурированные множества могут оказаться не сравнимыми между собой, поскольку необходимые для сравнения соответствия могут существовать не для любой пары структурированных множеств. Это значит, что траектория "движения" системы от одного состояния к другому – "более сильному" – состоянию может прерваться из-за невозможности сравнить состояния, чтобы применить экстремальный принцип.

В математике существует способ обойти создавшуюся трудность с помощью метода "представлений". Метод состоит в замене объектов и преобразований одной категории объектами и преобразованиями другой. Делается это так, чтобы задаваемые структурой первой категории связи между объектами и между их преобразованиями не были нарушены. Вне математики подобный метод называют "методом аналогий". Собственно, представления из одной категории в другую и названы функторами, фигурирующими в названии теории наравне с категориями. Для любой категории структурированных множеств существует особый функтор в категорию множеств без структуры. Этот функтор сопоставляет каждому структурированному множеству совокупность его допустимых структурой преобразований. Оказывается, что количества этих преобразований упорядочены так же, как структурные числа множеств (если структурные числа сравнимы). Доказательство этой теоремы, а также строгие формулировки приводимых здесь утверждений содержатся в работе, специально посвященной применению теории категорий и функторов для описания систем (Левич, 1982). Предложенный метод сравнения структурированных множеств называется "*функторным сравнением структур*", а количество допустимых преобразований структурированных множеств – их "*функторными инвариантами*", или "*функторными числами*". Замечу, что функторные числа представляют собой следующее за структурными числами обобщение понятия "количества элементов" (Левич, 2001). Согласно этому обобщению, "правильное" сравнение структурированных множеств состоит в сравнении количеств их преобразований, не нарушающих заданную на множествах структуру. Для методологии применения экстремальных принципов оказывается очень важным, что функторные числа в отличие от структурных чисел сравнимы для любых структурированных множеств, т.е. экстремальный принцип, сформулированный на языке функторных чисел, применим для сравнения любых состояний исследуемой системы.

Уже проведенные и дальнейшие рассуждения должны продемонстрировать путь по созданию метода расчета (а не угадывания) экстремизируемых функций при применении методологии экстремальных принципов. На этом пути нам необходимо сделать следующий шаг. Количество допустимых структурой системы преобразований зависит от двух характеристик структурированного множества: от количества элементов в нем и от заданной на множестве структуры. Если мы хотим, чтобы экстремизируемая функция отражала именно свойства структуры, то вместо количества допустимых преобразований необходимо использовать удельное их количество (т.е. количество, приходящееся на один элемент множества). Можно показать, что удельные функторные инварианты упорядочены так же, как сами функторные инварианты, т.е. задачу о поиске экстремальных состояний систем они способны решать так же, как предшествующее обобщение чисел.

Полученная конструкция удельного инварианта структуры системы известна в науке под несколько другим именем. Чтобы понять это, назовем сохраняющуюся при допустимых преобразованиях структуру состояния системы его "*макросостоянием*", а состояния, в которые данное состояние переходит при допустимых преобразованиях – его "*микросостояниями*". Поскольку число состояний, в которые переходит данное состояние при допустимых преобразованиях, в точности равно числу этих преобразований, то в новых терминах удельный инвариант оказывается удельным количеством микросостояний, соответствующих заданному макросостоянию системы. Позволим теперь себе взять логарифм (по основанию, большему единицы, чтобы упорядочение прологарифмированных величин не изменилось на противоположное) от этого числа микросостояний. (Можно полагать операцию по взятию логарифма данью традиции, а можно подождать обоснования этой процедуры, которое скоро появится в нашем изложении.) В полученной конструкции опытный читатель сразу узнает ремейк больцмановского определения энтропии. Поэтому назовем логарифм удельного числа допустимых преобразований данного состояния системы его "*обобщенной энтропией*". Все сказанное выше позволяет считать обобщенную энтропию, во-первых, мерой структурированности состояний системы (можно уточнить – мерой удаленности состояния от его бесструктурного аналога, энтропия которого равна нулю) и, во-вторых, функцией состояния, непосредственно связанной с обобщением понятия о количестве элементов для структурированных множеств. Замечу, что возникшая конструкция энтропии получена вне каких-либо статистических или вероятностных предпосылок. Величина обобщенной энтропии может быть строго рассчитана для состояний любых систем, эксплицируемых математическими структурами. Она может быть вычислена для состояний, описываемых множествами с любым – большим или малым – количеством элементов. Вероятностные интерпретации могут возникать при рассмотрении определенных типов систем, но они совершенно не обязательны для расчетов энтропии. Для некоторых математических структур, например, для множеств с разбиениями, формула для обобщенной энтропии полностью совпадает с формулами для энтропии идеального газа Л.Больцмана или для энтропии каналов связи К.Шеннона. Функторные инварианты многих (а, возможно, и всех) математических структур могут быть выражены через инварианты ассоциированных со структурами разбиений. Возможно, этот математический факт объясняет "вездесущность" появления энтропии при описании самых различных естественных и антропных систем. А упомянутая выше связь конструкции энтропии с обобщением понятия "количество элементов" может служить методическим обоснованием методологического принципа, согласно которому "числа правят миром".

В рамках поставленной перед собой задачи по поиску экстремального принципа проследим цепочку возникших у нас в ходе исследования формулировок:

1. Следует отыскивать экстремальное состояние системы.
2. Для системы, моделируемой структурированными множествами, следует отыскивать состояние с экстремальной (например, с наиболее "сильной") структурой.
3. Следует отыскивать состояние системы, обладающее наибольшим (удельным) функторным инвариантом, т.е. наибольшим (удельным) количеством допустимых структурой системы преобразований.
4. Следует отыскивать состояние, обобщенная энтропия которого максимальна.

Осталось сделать заключительный шаг на пути формулирования искомого экстремального принципа. Этот шаг не следует из предшествующих построений, а связан с таким свойством изменяющихся систем, как открытость по отношению к потребляемым ресурсам. Я исхожу из исследовательской установки, утверждающей, что любые изменяющиеся системы потребляют некоторый ресурс. Это очевидно для систем, открытых по отношению к энергии или веществу, менее очевидно – для закрытых систем, например, если изменение представляет собой механическое движение закрытой системы. Ресурсом, "потребляемым" такой движущейся системой, можно считать необходимое для движения пространство (Левич, 1996). Впрочем, несогласный с моей установкой читатель может полагать, что рассмотрен лишь класс открытых в его понимании систем.

Еще одна принимаемая мною предпосылка утверждает, что допустимые изменения системы всегда ограничены нехваткой каких-либо ресурсов. Из-за этого в экстремальном принципе, порождающем закон изменчивости, экстремум обязательно должен быть условным.

В силу сказанного искомый принцип может звучать следующим образом: *из заданного состояния система переходит в такое состояние, для которого обобщенная энтропия максимальна в пределах, задаваемых доступными системе ресурсами*. Упоминание об ограничениях ресурсами – основное отличие приведенного принципа от Второго начала термодинамики (действующего исключительно в закрытых системах). Безусловный максимум энтропии, требуемый Вторым началом, приводит к однородному распределению характеристик системы, называемому "тепловой смертью". Условный экстремум энтропии для открытых, но ограниченных по ресурсам систем влечет неоднородные распределения. Причем степень их неоднородности может быть сколь угодно велика в зависимости от различий компонентов исследуемой системы по потребностям в ресурсах, ограничивающих развитие (Левич, 1980).

Предложенный экстремальный принцип имеет и темпоральную интерпретацию. Для меня понятие времени как явления мира является синонимом изменчивости объектов в мире. Время как часы я понимаю как способ измерения, или параметризации изменчивости. Назову системным временем последовательность состояний меняющейся системы. Энтропийный экстремальный принцип влечет монотонное увеличение энтропии состояний вдоль траектории изменчивости (последовательности состояний) системы. Тем самым, значения энтропии параметризуют изменения системы, другими словами, возникает энтропийная параметризация времени, или энтропийное время систем (Левич, 2002).

Еще один набор числовых характеристик системы, которые: 1) с необходимостью сопровождают изменчивость системы; 2) растут монотонно системному времени и, тем самым, 3) могут служить для параметризации изменений, – это потребляемые системой ресурсы. Количество "потребленного" ресурса определяет, так называемое, "*метаболическое время*" системы (Левич, 1986). Замечу, что система, потребляющая несколько ресурсов, существует в нескольких метаболических временах. Теоремы вариационного моделирования позволяют установить связь между энтропийным и метаболическими временами системы (Левич и соавт., 1994). Энтропия системы представляет собой "усреднитель" метаболических времен, причем энтропия монотонно растет вместе с ростом каждого их метаболических времен (Левич, Фурсова, 2002), т.е. энтропийное и метаболические времена системы согласованы. Указанная связь может служить эвристическим объяснением происхождения логарифмирования при вычислении энтропии через количество преобразований системы: благодаря логарифмированию, связь медлу энтропийным и метаболическими временами становится степенной, а не экспоненциальной, что, в свою очередь, упрощает формулы, в которых фигурируют обе параметризации времени.

Предложенный экстремальный принцип имеет еще одну строгую интерпретацию, связанную с метаболическим временем системы. Эта интерпретация следует из, так называемой, теоремы Гиббса (Левич, Фурсова, 2002). Согласно теореме, требование максимума обобщенной энтропии при ограниченном запасе некоторых ресурсов равносильно требованию минимума потребления системой этих ресурсов при том ограничении, что степень структурированности системы (выраженная значением обобщенной энтропии) должна быть не ниже некоторого порога.

Соответствующая формулировка экстремального принципа звучит так: *из заданного состояния система переходит в такое состояние, для которого потребление ограничивающих рост ресурсов минимально в пределах, задаваемых необходимой степенью структурированности системы*.

Резюмирую продемонстрированные результаты:

Природные и антропные системы моделируются математическими структурами.

На языке математической теории категорий и функторов система – это класс одинаково структурированных множеств, или макросостояние системы плюс класс допустимых преобразований этих множеств, или ее микросостояния.

Состояния системы можно упорядочить по числу допустимых ими преобразований. Этот способ упорядочения обобщает понятия "количество элементов" для бесструктурных множеств и "сила структур" для структурированных множеств.

Обобщенная энтропия состояния системы может быть определена через логарифм количества допустимых состояний преобразований и, в свою очередь, интерпретирована как мера структурированности состояния (мера удаленности состояния от его бесструктурного аналога) или как мера "обобщенной числовой мощности" состояния.

Для отыскания законов изменчивости систем может быть предложен обобщенный формализм, основанный на принципе максимума обобщенной энтропии.

Принцип максимума эквивалентен:

- *принципу реализации экстремального состояния системы;*
- *принципу реализации максимальной структуры ("сложности", "разнообразия", "структурной информации" и.т.п.);*
- *принципу максимальной (обобщенной) экспансии системы, т.е. ее "количественному" росту;*
- *принципу наименьшего "потребления" ограничивающих ресурсов или их определенной комбинации, которую можно назвать "обобщенной свободной энергией" системы;*
- *принципу минимального метаболического времени системы .*

Литература

1. Бурбаки Н. Архитектура математики // Очерки по истории математики. М.: Мир. 1963. С. 245-259.
2. Левич А.П. Структура экологических сообществ. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1980. 180 с.
3. Левич А.П. Теория множеств, язык теории категорий и их применение в теоретической биологии. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1982. 190с.
4. Левич А.П.. Алексеев В.Л., Никулин В.А. Математические аспекты вариационного моделирования // Математическое моделирование. 1994. Т.6. № 5. С. 55-71.
5. Левич А.П. Время как изменчивость естественных систем: способы количественного описания изменений и порождение изменений субстанциональными потоками // Конструкции времени в естествознании: на пути к пониманию феномена времени. Часть 1. Междисциплинарное исследование. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1996. С. 149-192.
6. Левич А.П. Энтропия как обобщение понятия количества элементов для конечных множеств // Философские исследования. 2001. № 1. С. 59-72.
7. Левич А.П. Время и энтропия // Вестник Российского гуманитарного научного фонда. 2002. № 1. С.110-115.
8. Левич А.П., Фурсова П.В. Задачи и теоремы вариационного моделирования в экологии сообществ // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8. № 4. С. 1035-1045.
9. Фурсова П.В., Левич А.П., Алексеев В.Л. Экстремальные принципы в математической биологии // Успехи современной биологии. 2003. Т. 123. № 2. С. 115-137.